



Title	二次微分方程式ト積分方程式トノ關係（Ⅰ）
Author(s)	亀田, 豊次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 149, p. 357-364
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74586
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

660. 二次微分方程式ト積分方程式トノ 關係(I)

龜田 豊治郎

本論文デハ最初二次ノ定理ヲ証明スル。

y_1, y_2 ヲ微分方程式

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

ノ任意ノ二獨立解トスレバ、積分方程式

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \frac{y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)}{y_1'(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1(t)} G(t) u(t) dt \dots (A)$$

ノ解ハ

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \frac{Z_1(x)Z_2(t) - Z_2(x)Z_1(t)}{Z_1'(t)Z_2(t) - Z_2'(t)Z_1(t)} G(t) f(t) dt$$

デアール。但シ Z_1, Z_2 ハ微分方程式

$$Z'' + PZ' + (Q - G)Z = 0$$

ノ任意ノ二獨立解デアール。

次ニ之ヲ擴張シテ積分方程式

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \frac{y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)}{y_1'(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1(t)} G(t) u(t) dt \\ + \int_a^b \{y_1(x)\alpha(t) + y_2(x)\beta(t)\} u(t) dt \dots (B)$$

ノ解ヲ求メル。但シ α, β ハ任意ノ積分シ得ベキ函数、 a 及 b ハ任意ノ常數デアール。

積分方程式 (B) ハ α, β ノ適當ニ選ババ對稱核ヲ有ス

ル方程式トナルカラ、固有函数ノ問題ニ之
尚 a 及 b ハ必ズ ∞ 實數有限トハ限ラナイ。

(B) γ 更ニ擴張スレバ積分方程式

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \frac{y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)}{y_1'(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1(t)} G(t) u(t) dt \\ + \sum_{k=1}^n \int_a^b \{ y_1(x)\alpha_k(t) + y_2(x)\beta_k(t) \} u(t) dt \dots (C)$$

トナルノデアアルガ、此場合ヲモ論ズル。

二次微分方程式ト積分方程式トノ關係ハ普通 *Green*
ノ函数ニ依ルノデアアルガ、本論分デハ直接ニ且ツ一般的ニ此
問題ヲ論ジヨウトスルノデアアル。

第一節 基本定理

1. 簡單ノ爲メ

$$\frac{y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)}{y_1'(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1(t)} = K(x, t)$$

$$\frac{z_1(x)z_2(t) - z_2(x)z_1(t)}{z_1'(t)z_2(t) - z_2'(t)z_1(t)} = \overline{K}(x, t)$$

ト置ク。本節ノ目的トスル所ハ *Volterra* 型ノ核 $K(x, t)G(t)$
ト $-\overline{K}(x, t)G(t)$ トノ間ニ相反ノ關係が成立ツコトデア
ル。即チ

$$K(x, t)G(t) - \overline{K}(x, t)G(t) \\ = - \int_t^x K(x, \xi)G(\xi)\overline{K}(\xi, t)G(t)d\xi$$

$$= - \int_t^x \bar{K}(x, \xi) G(\xi) K(x, \xi) G(t) dt$$

ヲ証明スルノガ終局ノ目的デアルガ、之ニハ先ヅ $P=0$ ナル特別ノ場合ニ就テ証明スル。

2. 同知ノ如ク微分方程式

$$L(y) \equiv y'' + P y' + Q y = 0$$

ハ

$$y = e^{-\frac{1}{2} \int P dx} \eta$$

ト置クコトニ依リ

$$\eta + I \eta = 0 \quad (1)$$

ニ変形サレル。但シ

$$I = Q - \frac{P'}{2} - \frac{P^2}{4}$$

今 η_1, η_2 ヲ方程式 (1) ノ獨立解トスレバ $\eta_1' \eta_2 - \eta_2' \eta_1$ ハ常數ニ等シイ。加之 η_1 又ハ η_2 = 適當ノ常數ヲ乘ズレバ其値ヲ1トスルコトが出来ル。

斯ノ如キ η_1, η_2 = 對シ $K_0(x, t)$ ヲ次ノ如ク定義スル。

$$\left. \begin{aligned} K_0(x, t) &\equiv \eta_1(x) \eta_2(t) - \eta_2(x) \eta_1(t) \\ \text{但シ } \eta_1'(t) \eta_2(t) - \eta_2'(t) \eta_1(t) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

同様ニ微分方程式

$$M(z) \equiv z'' + P z' + (Q - G) z = 0$$

ニ於テ

$$Z = e^{-\frac{1}{2} \int p dx} \zeta$$

ト置ケバ、此ノ方程式ハ

$$\zeta'' + (I - G)\zeta = 0 \quad (3)$$

= 変形サレル。而シテ ζ_1, ζ_2 ヲ $\zeta_1' \zeta_2 - \zeta_2' \zeta_1 = 1$ + ル

(3) ノ二解トシ、 $\overline{K}_0(x, t)$ ヲ次ノ如ク定義スル。

$$\left. \begin{aligned} \overline{K}_0(x, t) &\equiv \zeta_1(x) \zeta_2(t) - \zeta_2(x) \zeta_1(t) \\ \text{但シ} \quad \zeta_1'(t) \zeta_2(t) - \zeta_2'(t) \zeta_1(t) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

斯ク K_0 及ビ $\overline{K}_0$ ヲ定義スルト此等ニハ種々ノ關係式
が成立ツ。其ノ内、後ノ証明ニ必要ナモノヲ補題トシテ掲ゲ
ル。

補題: $K_0(x, t)$ 及ビ $\overline{K}_0(x, t)$ ヲ夫々 (2) 及 (4) デ定
義スレバ

$$i) \quad K_0(x, x) = \overline{K}_0(x, x) = 0$$

$$ii) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_0(x, t) + I(t) K_0(x, t) = 0$$

$$iii) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \overline{K}_0(x, t) + \{I(x) - G(x)\} \overline{K}_0(x, t) = 0$$

$$iv) \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} K_0(x, t) \right]_{x=t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \overline{K}_0(x, t) \right]_{x=t} = 1$$

$$v) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} K_0(x, t) \right]_{t=x} = \left[\frac{\partial}{\partial t} \overline{K}_0(x, t) \right]_{t=x} = -1$$

$$vi) \quad K_0(t, x) = -K_0(x, t), \quad \overline{K}_0(t, x) = -\overline{K}_0(x, t)$$

之レヨリ相反ノ關係、即チ

$$K_0(x, t) G(t) - \overline{K}_0(x, t) G(t) \\ = - \int_t^x K_0(x, \xi) G(\xi) \overline{K}_0(\xi, t) G(t) d\xi$$

ヲ証明スル。

補題ノ iii) = 於テ x ノ代リ = ξ ト書ケバ

$$\overline{K}_0(\xi, t) G(\xi) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \overline{K}_0(\xi, t) + I(\xi) \overline{K}_0(\xi, t)$$

ヲ得ルカラ

$$\int_t^x K_0(x, \xi) G(\xi) \overline{K}_0(\xi, t) d\xi \\ = \int_t^x K_0(x, \xi) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \overline{K}_0(\xi, t) + I(\xi) \overline{K}_0(\xi, t) \right\} d\xi$$

此式ノ右辺ノ第一項 = 部分積分ヲ二回施セバ

$$\int_t^x K_0(x, \xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \overline{K}_0(\xi, t) d\xi \\ = \left[K_0(x, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \overline{K}_0(\xi, t) \right]_t^x - \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} K_0(x, \xi) \right) \overline{K}_0(\xi, t) \right]_t^x \\ + \int_t^x \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} K_0(x, \xi) \right) \overline{K}_0(\xi, t) d\xi$$

補題 i) iv) 及ビ v) ヲ用ヒテ之ヲ簡單ニスレバ

$$= -K_0(x, t) + \overline{K}_0(x, t) \\ + \int_t^x \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} K_0(x, \xi) \right) \overline{K}_0(\xi, t) d\xi$$

ヲ得ル。故ニ

$$\begin{aligned} \int_t^x K_0(x, \xi) G(\xi) \overline{K}_0(\xi, t) d\xi &= -K_0(x, t) + \overline{K}_0(x, t) \\ &+ \int_t^x \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} K_0(x, \xi) \right) \overline{K}_0(\xi, t) d\xi \\ &+ \int_t^x I(\xi) K_0(x, \xi) \overline{K}_0(\xi, t) d\xi \end{aligned}$$

然ル=補題 ii) = 依レバ最後ノ二積分ノ和ハ零トナルカラ、相反関係ハ直チ=得ラレル。即チ次定理ヲ得ル。但シ最後ノ式ノ証明ハ定理ノ前半ニ於テエトトヲ置換ヘ補題 vi) = 依ル。

定理 1. $K_0(x, t)$ 及ビ $\overline{K}_0(x, t)$ ヲ夫々 (2) 及ビ (4) デ定義スレバ

$$\begin{aligned} K_0(x, t) - \overline{K}_0(x, t) &= - \int_t^x K_0(x, \xi) G(\xi) \overline{K}_0(\xi, t) d\xi \\ &= - \int_t^x \overline{K}_0(x, \xi) G(\xi) K_0(\xi, t) d\xi \end{aligned}$$

即チ $K_0(x, t) G(t)$ ト $-\overline{K}_0(x, t) G(t)$ トハ Volterra 型積分方程式ノ核トシテ相反ノ関係=アル。

3. 以上ハ特殊ノ核 $K_0, \overline{K}_0$ = 就テノ定理デアルガ、之ヨリ一般ノ $K(x, t)$ ト $\overline{K}(x, t)$ = 對シ定理 1 ヲ擴張スル。最初=次ノ定理ヲ証明スル。

$$\text{定理 2. } K(x, t) \equiv \frac{y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)}{y_1'(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1(t)}$$

ハ獨立解 y_1, y_2 ノ取り方=無関係デアル。

証明: y_1, y_2 ノ代=他ノ二解 $a_{11}y_1 + a_{12}y_2, a_{21}y_1 + a_{22}y_2$,

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ヲ取り定理ノ分數式=入レ計算スルト此式ノ示

変デアルコトが直ニ分ル。

サテ η_1, η_2 ハ (1) ノニ獨立解デアルカラ

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2} \int p dx} \eta_1, \quad y_2 = e^{-\frac{1}{2} \int p dx} \eta_2$$

ハ方程式

$$L(y) = 0$$

ノニ獨立解デアル。

$$e^{\frac{1}{2} \int p dx} = b(x)$$

ト置キ、此レ等 y_1 及ビ y_2 カラ定義通り $= K(x, t)$ ヲ計算スレバ

$$\begin{aligned} K(x, t) &= \frac{\eta_1(x) \eta_2(t) - \eta_2(x) \eta_1(t)}{\eta_1'(t) \eta_2(t) - \eta_2'(t) \eta_1(t)} \cdot \frac{b(x)}{b(t)} \\ &= K_0(x, t) \frac{b(x)}{b(t)} \end{aligned}$$

ヲ得ル。同様ニ

$$\bar{K}(x, t) = \bar{K}_0(x, t) \frac{b(x)}{b(t)}$$

故ニ

$$\begin{aligned} &\int_t^x K(x, \xi) \bar{K}(\xi, t) G(\xi) d\xi \\ &= \int_t^x K_0(x, \xi) \bar{K}_0(\xi, t) \frac{b(x)}{b(\xi)} \cdot \frac{b(\xi)}{b(t)} G(\xi) d\xi \end{aligned}$$

故ニ定理 1 ニ依リ

$$= \frac{b(x)}{b(t)} \left\{ \bar{K}_0(x, t) - K_0(x, t) \right\}$$

$$= \bar{K}(x, t) - K(x, t)$$

同様 =

$$\int_t^x \bar{K}(x, \xi) K(\xi, t) G(\xi) d\xi = \bar{K}(x, t) - K(x, t)$$

ヲ得ル。之レ等ハ $K(x, t) G(t)$ ト $-\bar{K}(x, t) G(t)$ トガ相反關係 = アルコトヲ示スモノデアアル。即チ次ノ定理ヲ得ル。

基本定理. $K(x, t)$ ト $\bar{K}(x, t)$ トノ間 = ハ次ノ關係が成立ツ。

$$K(x, t) - \bar{K}(x, t) = - \int_t^x K(x, \xi) \bar{K}(\xi, t) G(\xi) d\xi$$

$$= - \int_t^x \bar{K}(x, \xi) K(\xi, t) G(\xi) d\xi$$