



Title	非可換群ノ双對定理ニ付イテ（I）
Author(s)	淡中, 忠郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 149, p. 364-375
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74587
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

661. 非可換群ノ双對定理ニ付イテ(I)

淡 中 忠 郎

*Pontrjagin*ノ代數的雙對定理が各方面ニ應用が廣イ
ノヲ之レヲ非可換群ニ(最後ノ目的ノ所ヲデニハ未ダ達シテ
ナイカ)ドレ位移セルカヲ考ヘテ見ルコトニスル。

其ノ一般ノ *topological group*ノ場合ニハ
*dual group*ニ當ルモノが第一ノ問題ナルガ之レハ

次ノ様ナ *semi group* ヲ考ヘルノガ自然ナル。即チ $\overline{G}$
 ヲ G ノ *bounded representation* $D(x) = \{D_{\rho\alpha}(x)\}$
 ノ集合トシ $\overline{G}$ ノ中デ

$$D^{(1)} \times D^{(2)} \quad (\text{Kronecker 積})$$

$$C^{-1} D C \quad (C \text{ハ任意ノ matrix})$$

$$\begin{pmatrix} D^{(1)} & & \\ & D^{(2)} & \\ & & \ddots \\ & & & D^{(k)} \end{pmatrix}$$

ナル *operation* ヲ考ヘニ入レタトキ $\overline{G}$ ヲ *dual semi group* トデモ稱ヘレコトニスレバ $\overline{G}$ ガ *character group* ノ代用ニナルデアラウト考ヘルノガ穩當デアル。一般ナ G デ $\overline{G}$ ヲ考ヘルトキハ勿論 G ノ *topology* ガ面倒ナ問題ニナルガ、コノデハ *discrete* ニシテ進メル。(G ガ *bicompact* ノ場合ヲシバラク目標ニスルカラ *abel* ノ場合カラ類推シテ見テモ之レデ不都合ヲ生ジナイコトハ想像サレル)

次ニ $\overline{G}$ ノ表現 A トハ $\overline{G}$ ノスベテノ *Element* ニソノ次數ト同ジ次數ノ *matrix* ヲ對應サシ之ヲ

$$D \xrightarrow{A} D \cdot A$$

トカクコトニスレバ、次ノ様ナ條件ヲ満足サレル場合ニ $\overline{G}$ ノ表現ト云フ。

$$D \text{ unitary} \quad \text{ナラバ} \quad D \cdot A \in \text{unitary}$$

$$(D^{(1)} \times D^{(2)}) \cdot A = (D^{(1)} \cdot A) \times (D^{(2)} \cdot A)$$

$$(C^{-1} D C) \cdot A = C^{-1} (D A) \cdot C$$

$$\begin{pmatrix} D^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & D^{(k)} \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} D^{(1)}A & & \\ & D^{(2)}A & \\ & & \ddots \\ & & & D^{(k)}A \end{pmatrix}$$

ニツノ表現 A_1, A_2 ノ積ハ

$$D \cdot A_1 A_2 = (DA_1) \cdot (DA_2)$$

デ定義スルコト = スレバ積モ表現 = ナルコト、コノ積 = 関シ
テスベテノ表現ガ群ヲ作ルコトハ見易イ。コノ群ヲ $\overline{G}$ ト書
ク。問題ハコノ群ト G トノ關係デアアル。

表現ヲモウ少シ取扱ヒヤスクスルヲメ = *Neumann*
(*Trans. A. M. S.* (1934)) ノ結果ヲ用ヒル。(記号モ
説明ナシ = 引用スル)。函数 $\sqrt{S(\mathcal{L})} D_{p\alpha}(x; \mathcal{L})$ ノ全
体ハ *normalized orthogonal system* ヲ作り
之レ等ヲ $f_p(x)$ デ表スト

$$(i) \quad f_p(x) f_q(x) = \sum_r \alpha_{pq}^r f_r(x)$$

$$(ii) \quad \overline{f_p}(x) = \overline{f_p}(x) = \sum_s \beta_p^s f_s(x)$$

ノ様ニ關係ガ成立スル。ユゝテ

$$\{D_{p\alpha}(x; \mathcal{L})\} \cdot A = \{D_{p\alpha}(A; \mathcal{L})\}$$

$$f_p(A) = \sqrt{S(\mathcal{L})} \cdot D_{p\alpha}(A; \mathcal{L})$$

ト書ケバ

$$(Lemma 1) \quad f_p(A) \cdot f_q(A) = \sum_r \alpha_{pq}^r f_r(A)$$

証明: 殆ンド自明。念、 α = 書イテ見ルト

$$f_p(x) = \sqrt{S(\mathcal{L})} \cdot D_{\rho\alpha}(x; \mathcal{L})$$

$$f_q(x) = \sqrt{S(\mathcal{Q})} \cdot D_{\tau\nu}(x; \mathcal{Q})$$

$$\begin{aligned} & \{D_{\rho\alpha}(x; \mathcal{L})\} \times \{D_{\tau\nu}(x; \mathcal{Q})\} \cdot A \\ &= \{D_{\rho\alpha}(A; \mathcal{L})\} \times \{D_{\tau\nu}(A; \mathcal{Q})\} \\ & \{D_{\rho\alpha}(x; \mathcal{L})\} \times \{D_{\tau\nu}(x; \mathcal{Q})\} \end{aligned}$$

$$= C^{-1} \left(\begin{array}{c} D(x; \mathcal{L}_1) \\ \vdots \\ D(x; \mathcal{L}_K) \end{array} \right) C$$

故 =

$$\begin{aligned} & \{D_{\rho\alpha}(A; \mathcal{L})\} \times \{D_{\tau\nu}(A; \mathcal{Q})\} \\ &= C^{-1} \left(\begin{array}{c} D(A; \mathcal{L}_1) \\ \vdots \\ D(A; \mathcal{L}_K) \end{array} \right) C \end{aligned}$$

等々。

$$(Lemma 2) \quad \bar{f}_p(A) = \sum_s \beta_p^s f_s(A)$$

証明: 全前

$$(Lemma 3) \quad \bar{f}_p(A) = \overline{f_p(A)}$$

$$\text{証明: } f_p(x) = \sqrt{S(\mathcal{L})} \cdot D_{\rho\alpha}(x)$$

$\{D_{\rho\alpha}(x)\}$ は unitary なるから

$$\sum_{\nu} D_{\rho\nu}(x) \cdot \overline{D_{\alpha\nu}(x)} = \delta_{\rho\alpha}$$

故 = Lemma 1, 2 カラ

$$\sum_{\nu} D_{p\nu}(A) \cdot \bar{D}_{\alpha\nu}(A) = \delta_{p\alpha}$$

一方 $\{D_{p\alpha}(A)\}$ が unitary, コトカラ

$$\sum_{\nu} D_{p\nu}(A) \cdot \overline{D_{\alpha\nu}(A)} = \delta_{p\alpha}$$

$$\therefore \bar{D}_{\alpha\nu}(A) = \overline{D_{\alpha\nu}(A)}$$

$R_{\mathcal{G}} \ni f_p(x)$, linear combination 全体
 1作ル Ring トスルト (i) ハ $R_{\mathcal{G}}$ マ 多元数系ト見做シ
 タ時, composition table トナリ A ガ $R_{\mathcal{G}}$ ノ一次,
 表現ヲ與ヘルコト = ナル。

(勿論

$$\sum_p C_p f_p(x) \rightarrow \sum_p C_p f_p(A)$$

ナル對應, 下 =)

(Lemma 4) 逆 = $f_p(x) \rightarrow f_p(A)$ デ與ヘラレタ

$R_{\mathcal{G}}$ ノ一次, 表現ガ

$$\bar{f}_p(A) = \overline{f_p(A)}$$

ヲ満足スレバ任意ノ $\mathcal{G}$ ノ表現 $\{D_{p\alpha}(x)\} =$ 對シテ

$$\{D_{p\alpha}(x)\} \rightarrow \{D_{p\alpha}(A)\}$$

ナル對應ハ $\bar{\mathcal{G}}$ ノ表現デアル。

証明: 略。

(Lemma 5) $\sum_p C_p f_p(x) = f(x)$ ノ實数部

$\mathcal{R}[f(x)] \wedge R_{\mathcal{G}} = \text{属ス}.$

$$\text{証明: } f(x) = \sum_p (c'_p + i c''_p) (\mathcal{R}[f_p(x)] + i \mathcal{I}[f_p(x)])$$

$$\mathcal{R}[f_p(x)] = \frac{1}{2} [f_p(x) + \bar{f}_p(x)] \wedge \text{(ii) カラ}$$

$$\subset R_{\mathcal{G}}$$

全様 =

$$\mathcal{I}[f_p(x)] \subset R_{\mathcal{G}}$$

$$\therefore \mathcal{R}[f(x)] = \sum_p \{ c'_p \mathcal{R}[f_p(x)] - c''_p \mathcal{I}[f_p(x)] \}$$

$$\subset R_{\mathcal{G}}$$

$$(\text{Lemma 6}) \quad f(x) = \sum_p c_p f_p(x) \quad , \text{real} + \text{イベ } f(A)$$

$\in \text{real.}$ 」

$$\text{証明: } f(x) = \bar{f}(x) = \sum_p \bar{c}_p \bar{f}_p(x)$$

$$\longrightarrow \sum_p \bar{c}_p \cdot \bar{f}_p(A) = \sum_p \bar{c}_p \cdot \overline{f_p(A)} = \overline{\sum_p c_p f_p(A)} = \overline{f(A)}$$

$$\therefore f(A) = \overline{f(A)}.$$

$$(\text{Lemma 7}) \quad \mathcal{R}[f(x)] \longrightarrow \mathcal{R}[f(A)].$$

$$\text{証明: } \text{Lemma 5 カラ } f(x) = g(x) + i h(x) \text{ トス}$$

ルト

$$g(x), h(x) \subset R_{\mathcal{G}}$$

$$g(x) \longrightarrow g(A) \quad (\text{real})$$

$$h(x) \longrightarrow h(A) \quad (\text{real})$$

カラ明ラカ。

$$(\text{Lemma 8}) \quad \sum_p c_p f_p(x) \geq 0 + \text{イ } \sum_p c_p f_p(A) \geq 0 \text{」}$$

証明: $\sum_p c_p f_p(x) =$ 現ハレル $D_{\rho\alpha}(x; \infty)$ ヲ全部含ム表現ヲ $D(x)$ トシ f ヲ $D(x)$ テ *unit matrix* = 寫サレル $\mathcal{O}_f$ ノ元素全体ノ作ル群トスル。 ($D(x)$ ハ *unitary matrix*)。 x ガ $\mathcal{O}_f$ ヲ動イタトキ $D(x)$ ノ作ル群ヲ $\mathcal{O}_f'$ トスルト

$$\mathcal{O}_f / \rho \rightarrow \mathcal{O}_f'$$

ハ *metric isomorph* ナル。 (*topologisch* トハ限ラナイ。例ヘバ $\mathcal{O}_f$ ヲ實數, *addition* ノ群

$$f_1(x) = e^{ix}, \quad f_2(x) = e^{ipx} \quad (p \text{ 無理數})$$

トスルト

$$x \rightarrow \begin{pmatrix} e^{ix} & \\ & e^{ipx} \end{pmatrix}$$

ハ逆カ連続デナイ)。 $\mathcal{O}_f'$ ノ *bounded continuous* ナ表現ハ又 $\mathcal{O}_f$ ノ夫レデモアルカラ A ハ $\mathcal{O}_f'$ ノ *dual semi group* $\overline{\mathcal{O}_f'}$ ノ表現トモ考ヘラレル。従ツテ定理, $\mathcal{O}_f$ ノ代リ = $\mathcal{O}_f'$ ヲ始メカラ考ヘテモ差支ヘナイ。

以下 $\mathcal{O}_f$ ハ *unitary matrix* カラナル群 $\{D_{\rho\alpha}(x)\}$ トシテ $\sum c_{\rho\alpha} D_{\rho\alpha}(x) \geq 0$ カラ $\sum c_{\rho\alpha} D_{\rho\alpha}(A) \geq 0$ ヲ出スコト = スル。(勿論 *matrix* トシテノ *topology* ヲ入レテアル)

$\mathcal{O}_f'' = \mathcal{O}_f''$ ヲ $\mathcal{O}_f$ ノ *abgeschlossene Hülle* トシソノ *Element* ヲ $\mathcal{Y}$ ト表ハス;

$$\mathcal{Y} = \{D_{\rho\alpha}(\mathcal{Y})\}$$

$\mathcal{O}_f''$ ノ任意ノ表現ヲ $\{\rho_{ij}(\mathcal{Y})\}$ トスルト

$$\phi(\mathcal{P}_{ij}(\eta), \overline{\mathcal{P}}_{ij}(\eta)) = 0 \quad (\phi: \text{多項式})$$

ナラバ

$$\phi(\mathcal{P}_{ij}(x), \overline{\mathcal{P}}_{ij}(x)) = 0 \quad x \in \mathcal{O}$$

$$\therefore \phi(\mathcal{P}_{ij}(A), \overline{\mathcal{P}}_{ij}(A)) = 0$$

即チ $\{\mathcal{P}_{ij}(\eta)\} \rightarrow \{\mathcal{P}_{ij}(A)\}$ ハ $\mathcal{O}''$ ノ表現

又 $\sum c_{\rho\alpha} D_{\rho\alpha}(x) \geq 0$ ナラ $\sum c_{\rho\alpha} D_{\rho\alpha}(\eta) \geq 0$

故ニ $\mathcal{O}''$ ガ定理ヲ証明スレバヨイ。

$\mathcal{O}$ ヲ始メテ unitary matrix, closed group
ノ $\{D_{\rho\alpha}(x)\}$ トシ

$$\sum c_{\rho\alpha} D_{\rho\alpha}(x) \geq 0 \quad \text{ナラ}$$

$$\sum c_{\rho\alpha} D_{\rho\alpha}(A) \geq 0$$

ヲ出ス。

unitary matrix $\{D_{\rho\alpha}(A)\}$ ガ $\mathcal{O}$ ノ中ニアルベ問題
ナイカラ $\mathcal{O}$ ノ中ニナイモ、トシ $\mathcal{O}_0$ ヲ $A = \{D_{\rho\alpha}(A)\}$ ト
 $\mathcal{O}$ ヲ含ム closed 群トスル。 $\mathcal{O}$ ハ bikompakt デ
アルカラ $\mathcal{O}_0$ ガ開テ居ル。 $\mathcal{O}_0$ ノ表現 $\{\mathcal{P}_{ij}(x)\}$ ヲ任意
ニトリト von Neuman (Annals of Math. vol.
37(1926)) P. 82 Remark 1 ナラ

$$(*) \quad \mathcal{P}_{ij}(x) = \phi(D_{\rho\alpha}(x), \overline{D}_{\rho\alpha}(x))$$

$x \in \mathcal{O}$ ナラバ勿論

$$\{\mathcal{P}_{ij}\} \rightarrow \{\mathcal{P}_{ij}(x)\}$$

ヨリ $\overline{O_f}$ の表現が得ラレ、且

$$\{p_{ij}(x_1, x_2)\} = \{p_{ij}(x_1)\} \cdot \{p_{ij}(x_2)\}$$

デアルカラ O_f の積 = ハ $\overline{O_f}$ の積が對應スル、エハ $\overline{O_f}$ の元素ト考ヘテモ差支ヘナイワケデアル。 $A = \text{對シテハ}$

$$x \cdot A = \{D_{p_a}(x)\} \cdot \{D_{p_a}(A)\} = \{D_{p_a}(xA)\}$$

$$\overline{x} \cdot \overline{A} = \{\overline{D}_{p_a}(x)\} \cdot \{\overline{D}_{p_a}(A)\} = \{\overline{D}_{p_a}(xA)\}$$

故ニ (*) デ

$$p_{ij}(A) = \phi(D_{p_a}(A), \overline{D}_{p_a}(A))$$

$$p_{ij}(xA) = \phi(D_{p_a}(xA), \overline{D}_{p_a}(xA))$$

ト置ケル

$$\left(\begin{array}{c} \{p_{ij}(x)\} \\ \vdots \end{array} \right) = C^{-1} \{D_{p_a}(x)\} \times \cdots \times \{\overline{D}_{p_a}(x)\} \times \cdots C$$

從ッテ上ノコトカラ

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} \{p_{ij}(x)\} \\ \vdots \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \{p_{ij}(A)\} \\ \vdots \end{array} \right) \\ &= C^{-1} \{D_{p_a}(xA)\} \times \cdots \times \{\overline{D}_{p_a}(xA)\} \times \cdots C \\ &= \left(\begin{array}{c} \{p_{ij}(xA)\} \\ \vdots \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\text{左辺} = \begin{pmatrix} \{p_{ij}\} \\ \vdots \end{pmatrix} x.A$$

$x.A$ は x, A を $\overline{\mathcal{O}_f}$ の元素と考へた時ノ積。

即チ

$$\begin{pmatrix} \{p_{ij}(x.A)\} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{p_{ij}(xA)\} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

トナツテ $x.A$ ナル *matrix* ノ積ハ同時ニ $\overline{\mathcal{O}_f}$ = 於ケル積ト考ヘテモ差支ヘナイ。左様ナ考ヘテ $\mathcal{O}_f$ ノ任意ノ *Element* ハ皆ソノ積ヲ $\overline{\mathcal{O}_f}$ ノ中ノ積ト考ヘテ $\mathcal{O}_f \subset \overline{\mathcal{O}_f}$ トシテヨイ。之ヲ式ヲ書ケバ

$$(*) \quad \begin{cases} \psi(D_{\rho\alpha}(x), \overline{D}_{\rho\alpha}(x)) = 0 & x \in \mathcal{O}_f \text{ ナラバ} \\ \psi(D_{\rho\alpha}(y), \overline{D}_{\rho\alpha}(y)) = 0 & y \in \mathcal{O}_f. \end{cases}$$

$$\overline{D}_{\rho\alpha}(y) = \overline{D_{\rho\alpha}(y)}$$

$$(\overline{D}_{\rho\alpha}(y) \text{ ハ } y \in \overline{\mathcal{O}_f} \text{ ト考ヘテ } (\overline{D}_{\rho\alpha}) \rightarrow \{\overline{D}_{\rho\alpha}(y)\})$$

ナル表現ヲ得テラ値)

次ニ $\mathcal{O}_f$ 及び $\mathcal{O}_f$ ノ *mean* ヲ比較スル。先キニ引用シタ *von Koenen* ノ定理ヲ $\mathcal{O}_f$ = 適用スルト $\mathcal{O}_f$ *irreducible* ナ表現ヲ得タ *normalized orthogonal system* ノ函数ハ皆 $D_{\rho\alpha}(y) \overline{D}_{\rho\alpha}(y)$ ノ多項式デアアル。従ツテ $R_{\mathcal{O}_f}$ ノ元ハ

$$\sum c_p f_p(y)$$

($f_p(x) \in R_{\mathcal{O}}$, normalized orthogonal
fu. ≥ 1 $D_{p\infty}(x)$ 及び $\bar{D}_{p\infty}(x)$, 多項式)

特 = $f_0(y) = f_0(x) = 1$ トオケバ

$$f(x) = C_0 + \sum_{p \neq 0} C_p f_p(x)$$

1 $\mathcal{O}_f =$ 於ケル mean $\wedge$

$$M_x[f(x)] = C_0$$

$D_{p\infty}(x)$ $\wedge$

$$\{D_{p\infty}(x)\} = \left(\begin{array}{c} \{D_{p,\sigma_1}(x; \mathcal{L}_1)\} \\ \vdots \end{array} \right)$$

1 如ク irreducible 1 ∞ = 於ケラアツタ ∞ ノトスル

ト $f_p(x) = \sqrt{S(\mathcal{L}_1)} \cdot D_{p,\sigma_1}(x; \mathcal{L}_1)$ $\wedge$ normalized
デアアル。

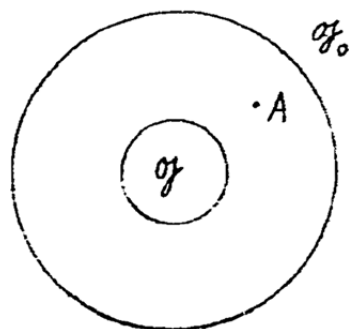
$\{D_{p,\sigma_1}(y; \mathcal{L}_1)\}$ ----- $\wedge$ 尚更 irreducible デ
アルカラ $\sqrt{S(\mathcal{L}_1)} \cdot D_{p,\sigma_1}(y; \mathcal{L}_1)$ ----- $\wedge$ normalized
in $\mathcal{O}_f$ デアル。 $D_{p\infty}$ 以外ノ表現ニツイテモ全盤ニマレバヨイ。

$$\therefore M_y[f(y)] = M_y\left[C_0 + \sum_{p \neq 0} C_p f_p(y)\right] = C_0$$

以上ノ準備が終ルト後ハ次ノ様ニスレ

バヨイ。

$\mathcal{O}_f$ $\wedge$ $\mathcal{O}_f$ デ closed デアルカラ
 $\mathcal{O}_f$ デ 0, A デ 1 + ル値ヲトル連続函
數 (従ツテ a. p. function) $\varphi(y)$



が存在スル。 ($\varphi(y) \geq 0$)

approximation theorem カラ

$$\left| \varphi(y) - \sum_p c_p f_p(y) \right| < \varepsilon$$

特ニ

$$\left| \varphi(x) - \sum_p c_p f_p(x) \right| < \varepsilon$$

y, x = ツイテ meanヲ作ルト兩者カラ夫々

$$\left| M[\varphi(y)] - C_0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| M[\varphi(x)] - C_0 \right| < \varepsilon$$

後者カラ $|C_0| < \varepsilon$

$$\therefore M[\varphi(y)] < 2\varepsilon, \quad M[\varphi(y)] = 0$$

之レハ $\varphi(A) = 1, \quad \varphi(y) \geq 0$ = 成スル。

$$\therefore A \subset G$$

從ツテ當然 $\sum c_p \wedge D_{p\alpha}(A) \geq 0$

以上テ証明が終ル。証明ノ途中一回 *limiting process*

ガアルカラ

$$\sum c_p f_p(x) > 0 \quad \text{カラ} \quad \sum c_p f_p(A) > 0$$

ハ出ナイ。