



Title	位相幾何學ノ形式化（Ⅳ）
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 149, p. 376-386
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74588
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

662. 位相幾何學ノ形式化(Ⅳ)

寺 阪 英 孝 (阪大)

§8. 前節デ出シタ $D(A)$ = 関スル関係式

$$D(D(A)) = D(A), \quad D(A+B) = D(A) + D(B)$$

ヲ使フト

$$P_1: \quad A^{PP} = A^P$$

$$P_2: \quad A \subset A^P$$

$$P_3: \quad (A+B)^P = A^P + B^P$$

ガ直グ出セル。 P_2 ハ定義カラ明カデアルガ, P_1 ハ

$$A^P = A + D(A)$$

$$A^{PP} = A + D(A) + D(A + D(A))$$

$$= A + D(A) + (D(A) + D(D(A))) = A^P$$

P_3 ハ

$$(A+B)^P = A+B+D(A+B)$$

$$= A+B+D(A)+D(B) = A^P + B^P$$

$$\text{次} = A^{\alpha c \alpha c \alpha} = A^\alpha = \text{ナラッテ } A^{PCPCP} \text{ ハ一様如何}$$

ナモノカ調べテ見ルト。先ヅ最モ都合ノヨイ場合デ開集合 U
ガ常 $= N_\infty$ (第一類ノ集合) デナイトキハ $D(A) = \text{等シクナ}$
ルノデアル。

(46) $A^{PCPCP} = D(A)$ (但シ凡テノ開集合 $U \in N_\infty$ ノ
場合)

(証) $D(A) = U^c$; (a) U ハ $AU \in N_\infty$ ナル最大開
集合。

$$A^p = A + U^c$$

$$A^{pc} = A^c U$$

$$D(A^{pc}) = V^c : (b) \quad V \wedge A^{pc} V = A^c U V \in N_\infty \text{ ナ}$$

ル最大開集合

$$\text{スレト } UV = UV(A + A^c) = AU \cdot V + A^c UV \in N_\infty \quad (a)(b)$$

開集合 UV が $\in N_\infty$ トイフノハ 假定 = ヨッテ

$$UV = 0$$

ノ時 = 限ル。又 $UV = 0$ ナラバ (b) ノ式モ成立スルカラ

$UV = 0$ が成立スル最大開集合ノ V ハ (b) ノ V ト一致スル。

サテ

(i) V が $UV = 0$ ナル最大開集合ナラバ、元來

$$UU^{ac} = 0 \text{ (公理 } A_2) \text{ ナル故 } U^{ac} \subset V$$

(ii) 一方 $UV = 0 \xrightarrow{(ii)} U^a V = 0 \sim V \subset U^{ac}$

(i) & (ii) $\rightarrow V = U^{ac}$. 故 = $V^c = U^a$

ヨッテ

$$D(A^{pc}) = U^a$$

$$\therefore A^{pcp} = A^c U + U^a = U^a$$

$$\therefore A^{pcpc} = U^{ac}$$

$$D(A^{pcpc}) = W^c \text{ トスレバ } W \wedge U^{ac} W \in N_\infty \text{ ノ}$$

最大開集合

$U^{ac} \in W \in$ 開故 $U^{ac} W \in N_\infty \wedge U^{ac} W = 0$ ト同ジデ

アル、サウスルト上述ノ (i), (ii) ト同様 = カ、ル最大ノ W

ハ

$$W = U^{ac \cdot ac}$$

U は正則開集合 ($U = U^{acac}$, §17, (40) 参照) ナル故

$$W = U$$

$$\therefore A^{pcpcp} = U^{ac} + U^c = U^c = D(A) \text{ ---}$$

一般ノ場合、開集合デアツテ而モ $\in N_\infty$ ナルモノが存在スルトキハ少々面倒ナル。今 $U \in N_\infty$ ナル開集合ヲ凡テ加ヘルト、 $D(A)$ ノ時ト同ジク *Banach* ノ定理ニヨツテ $\sum U$ モ $\in N_\infty$ 、即チ $\in N_\infty$ ナル最大ノ開集合ガアル譯デアールカラ、ソレヲ U_I トスル。

U_I : $U \in N_\infty$ ナル最大ノ開集合

サウスルト

$$(47) \quad A^{pcpcp} = D(A) + AU_I.$$

(証) 前ト大体同ジ方針デアアルガ少々面倒ダカラ讀ムノヲ省略サレテモ差支ハナイ。タゞ筆者トシテハ技巧的ニ相當苦心ヲシタ所デモアリ、且ツ一應ハ証明ヲシテ置カナイト安心ガ出来兼ネルノデアアル。扱テ

$$D(A) U^c: \begin{cases} (a) & U \wedge AU \in N_\infty \text{ ナル最大開集合} \\ (b) & U_I \in N_\infty \text{ ナル故 } U_I \subset U \end{cases}$$

$$A^p = A + U^c \rightarrow A^{pc} = A^c U$$

$$D(A^{pc}) = V^c: (c) \quad V \wedge A^{pc} V = A^c U V \in N_\infty \text{ ナル最大開集合}$$

$$\text{スルト } UV = UV(A + A^c) = AU \cdot V + A^c UV \underset{(a)(c)}{\in} N_\infty.$$

$$\text{逆} = UV \in N_\infty \text{ ナラバ } A^c UV \in N_\infty. \text{ ヨツテ } V \wedge$$

$UV \in N_\infty$ ナル最大開ノ V ト考ヘテ同ジデアアル。所デコレハ

丁度 $UV = U_I$ ノ時デアアル。即チ

$$D(A^{pc}) = V^c; (d) \quad V \wedge UV = U_I \quad \text{ナレ最大開ノ} V.$$

$$A^{pcp} = A^c U + V^c$$

$$\therefore A^{pcpc} = (A + U^c)V$$

$$D(A^{pcpc}) = W^c; (e) \quad W \wedge (A + U^c)V \cdot W \in N_{\sim} \quad \text{ナレ最大開ノ} W.$$

ヨツテ

$$\begin{aligned} VW &= (A + U^c)VW + (A + U^c)^c VW \\ &= (A + U^c)VW + A^c UV \cdot W \in N_{\sim} \end{aligned}$$

逆 = $VW \in N_{\sim}$ ナラバ (e) ノ式ヲ満足スルカラ $W \wedge$

$$(f) \quad VW = U_I \quad \text{ナレ最大開ノ} W.$$

ト考ヘテ同ジデアアル。サウスルト (d), (f) カラ $U = W$ ガ出
ルノデアアル。

何者

$$(i) \quad U(V + WU^{ac}) = UV + W \cdot UV^{ac} \stackrel{(d)}{=} U_I + 0 = U_I$$

ヨツテ (d) = ヨル V ノ最大性カラ $V + WU^{ac} \subset V$.

即チ $WU^{ac} \wedge V = \text{合マレル}$ 。ヨツテ (§ 2, (5) = ヨリ)

$V \cdot WU^{ac} \wedge WU^{ac} = \text{等シイ}$ 、スルト

$$\begin{aligned} WU^{ac} &= V \cdot WU^{ac} = VW \cdot U^{ac} \stackrel{(f)}{=} U_I \cdot U^{ac} \stackrel{(b)}{\subset} UU^{ac} \\ &\stackrel{A_2}{=} 0 \sim W \subset U^a \rightarrow W \subset U^{a \cdot cac} = U \end{aligned}$$

$$(ii) \quad VU \stackrel{(d)}{=} U_I \quad \text{デアアルガ、} W \wedge VW = U_I \quad \text{ノ最大開ナレ}$$

故 $U \subset W$

$$(i) \ \& \ (ii) \rightarrow U = W$$

$$\text{ヨッテ } D(A^{p^c p^c}) = U^c$$

$$A^{p^c p^c p} = (A + U^c)V + U^c$$

$$\text{サテ } AV = AV(U + U^c) = A \cdot VU + AV \cdot U^c$$

$$\stackrel{(d)}{=} AU_I + AV \cdot U^c$$

ヲ入レルト

$$A^{p^c p^c p} = U^c + AU_I = D(A) + AU_I \text{ ——}$$

$$A^{acaca} \text{ヲ } A^\alpha \text{ト書イタノニナラツテ}$$

$$(\text{定義}) \quad A^{p^c p^c p} \text{ヲ } A^\pi \text{トカク.}$$

コトニスレバ

$$(48) \quad A^{p^c p^c p} = A^\pi = D(A) + AU_I$$

トナル。

$\ast = a, \alpha, p, \pi$ ノ相互関係ヲ出サウ。ソノ爲メニ先ヅ A^a, A^α ノ性質ヲ掲ゲテオカウ。

$$A^a: \quad AU = 0 \text{ ナル最大開集合ヲ } U \text{トスレバ } A^a = U^c.$$

$$A^\alpha: \quad AU \in N \text{ (} N \text{ハ 粗集合ヲ表ハス) ナル最大開集合ヲ } U \text{トスレバ } A^\alpha = U^c$$

コレト

$$D(A): \quad AU \in N_a \text{ ナル最大開集合ヲ } U \text{トスレバ}$$

$$D(A) = U^c$$

トヲ比較スレバ $A^a, A^\alpha, A^p, A^\pi$ ノ順が出ル譯デアイル。

扱テ

$$(A^a, \text{証}) \quad AU = 0 \rightarrow A \sum U = 0 \text{ 故 最大ノ } U \text{ガ存}$$

在スル。

ソコデ

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad AA^{ac} = 0 + \text{ル故. } U \text{ノ最大性カラ } A^{ac} \subset U \\ \text{(ii)} \quad AU = 0 \xrightarrow{\text{(iii)}} A^a U = 0 \sim U \subset A^{ac} \end{array} \right\} \rightarrow A^a = U^c$$

(A^a , 証)

$$\text{(i)} \quad A \cdot A^{ac} = AA^{aca \cdot cac} \subset AA^{aca} \subset A^a A^{aca} \in N \text{ (粗集合).}$$

故 = U ノ最大性カラ $A^{ac} \subset U$

(ii) 一般 = (ii)ト類似シタ次式が成立スル。

$$(49) \quad (AU)^a \supset A^a U \quad (U \text{ハ開})$$

$$\begin{aligned} \text{何者} \quad (AU)^a &\supset A^a U \rightarrow (AU)^{a \cdot cac} \supset A^{a \cdot cac} U^{cac} \\ &= A^{acac} U \rightarrow (AU)^{acaca} \supset (A^{acac} U)^a \\ &\supset A^{acaca} U. \end{aligned}$$

コレヲ用キルト粗集合ハ α ヲトツタモノガ0デアルカラ

$$AU \in N \rightarrow (AU)^a = 0 \rightarrow A^a U = 0 \sim U \subset A^{ac}$$

$$\text{(i)} \text{ \& } \text{(ii)} \rightarrow A^a = U^c \text{ —}$$

サテ

$$AU = 0 \rightarrow AU \in N, \rightarrow AU \in N_{\sim}$$

+ル U ハ順 = 大キクナルカラ

$$A^a \supset A^a \supset D(A)$$

従ッテ

$$(50) \quad A^a \supset A^p,$$

$$(51) \quad A^a + AU_I \supset A^{\pi}$$

更 = 前節 $D(A)$ ノ関係式中, 可附番個ノ和 = 関スルモノ

$$D(A_1 + A_2 + \dots) = D(A_1) + D(A_2) + \dots + N, \quad N = \text{粗}$$

ヲ使フト直チ =

$$(52) \quad (A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots)^p = (A_1^p + A_2^p + \dots + A_n^p + \dots) + N, \\ N^\alpha = 0$$

が出ル。但シ $N^\alpha = 0$ ハ N が粗集合 ダトイフコトヲ示ス。又
同ソ式カラ (48) ヲ使ヘバ

$$(53) \quad (A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots)^\pi \\ = (A_1^\pi + A_2^\pi + \dots + A_n^\pi + \dots) + N, \quad N^\alpha = 0.$$

§9. 前節ノ式ヲ纏メルト

$$P_1: A^{pp} = A^p$$

$$P_2: A \subset A^p \quad (AA^{pc} = 0)$$

$$P_3: (A+B)^p = A^p + B^p$$

$$P_4: 0^p = 0$$

$$\alpha > p: A^\alpha \supset A^p$$

$$\alpha > \pi: A^\alpha + AU_I \supset A^\pi. \quad \text{コゝ} = A^\pi = B + AU_I,$$

$$B = B^\alpha \subset U_I^c$$

$$P_5: (A_1 + A_2 + \dots)^p = (A_1^p + A_2^p + \dots) + N, \quad N^\alpha = 0$$

(N ハ粗)

$$P_6: (A_1 + A_2 + \dots)^\pi = (A_1^\pi + A_2^\pi + \dots) + N, \quad N^\alpha = 0$$

最初ノ P_1, P_2, P_3 カラ §2, 3, 4 中ノ式デ α ヲ p =
置換ヘタモノハ悉ク成立スルコトガ判ル。又 P_4 ハ A_4 ト
 $\alpha > p$ トカラ出ルノデアルガ, コレハ $0^\alpha = 0 = 0^p$ 譯
デカラ, §5ノ式モ亦全部成立スル譯デアル。即チ §5 中ノ
 α ノ代リ = π ヲ入レタモノが成立スル。

處デ

$$A^\alpha = 0 \quad \text{即チ} \quad A^{\alpha c \alpha c \alpha} = 0$$

ハ粗集合ヲアルガ

$$A^\pi = 0 \quad \text{即チ} \quad A^{p^c p^c p^c} = 0$$

ハ何カト云フト、 U_I が存在シナイトキハ簡單デ、 A が N_∞ ナルコトヲ示シ、逆 = $A \in N_\infty$ ナラバ $A^\pi = 0$ ナル。然シ U_I が存在スル場合ニハ

$$A^\pi = D(A) + A U_I$$

デカラ $A^\pi = 0$ ナラバ成ル程 N_∞ 知ガ、逆 = N_∞ デカラト云ツラモ (逆) 必ズシモ $A^\pi = 0$ ハ 0 トハ限ラス。コノ場合ニハ

$$A^\pi \subset U_I$$

ガ N_∞ デアルタメノ必要且ツ余ナ条件ニナルノデアル。

ソコデ今 *Lefschetz* が *Topology* デ導入シタノニナラツテ $\text{mod } U_I$ トイフ概念ヲ採用シテ見ヨウ。一般ニ
《 $\widetilde{\text{Def.}}$ 》ハ《定義ニ從ツテ同意義》ト解スルコトトシ、次ノヨウニ定義スル：

$$\text{I. } A = 0 \text{ (mod } U_I) \underset{\text{Def.}}{\sim} A \subset U_I$$

$$\text{II. } A \subset B \text{ (mod } U_I) \underset{\text{Def.}}{\sim} A B^c = 0 \text{ (mod } U_I)$$

$$\text{III. } A = B \text{ (mod } U_I) \underset{\text{Def.}}{\sim} A B^c = B A^c = 0 \text{ (mod } U_I)$$

コノ際Ⅱハ次ノヨウニ解釋スルト意味が明瞭ニナル。

先ツ

$$A B^c = B A^c = 0 \text{ (mod } U_I)$$

ハⅠノ定義ニヨツテ

$$A B^c = U \subset U_I, \quad B A^c = V \subset U_I$$

デアル、ソコデ

$$A = A(B + B^c) = AB + AB^c = AB + U$$

$$B = B(A + A^c) = AB + BA^c = AB + V$$

トナルカラ、 A, B ハ同ジ AB ナルモノニ U_I ノ部分集合が
加ハツタモノダト云フコトが判ル。

ツマリ $A = B \pmod{U_I}$ ハ A, B が U_I ノ部分集
合ダケノ違ヒデ (ドイツ語デハ *his auf* トイフ) 等シ
イトカ、 U_I ノ集合ヲ無視スレバ等シイトカイフコトヲ表
ハシテキルノデアル。ソウスルト

$$A = B \pmod{U_I},$$

$$B = C \pmod{U_I} \longrightarrow A = C \pmod{U_I}$$

ダトカ

$$A = B \pmod{U_I} \longrightarrow AC = BC \pmod{U_I}$$

ダトカ、ソノ外斯ク云ツタ種類ノ式が出ルカラ、ソレヲ
應用スルト §2, 3, 4, 5 ノ諸式ハ式ノ後ニ $= \text{---} \pmod{U_I}$
 U_I)ヲ附ケテモ尚成立スルコトニナルノデアル。

コノ記法ニ從ハバ

$$A \in N_n \iff A^\pi = 0 \pmod{U_I} \xrightarrow[\text{Def.}]{\pi} A \\ \approx 0 \pmod{U_I}$$

最右ノ式ハ略記法デ、既ニ §6 デナジミダッタ。
§2 - 5 中デハ π = 置換ハ更ニ必要ガアレバ $\pmod{U_I}$
ヲ附ケタモノヲ (番号) π デ略記スル。ソウスルト $(20)^\pi$
ハ N_n ノ場合ニハ可附番個ノモノニツイテモ成立ツコト
が確カメラレル。

即ち

$$(54) \quad A_n \stackrel{\pi}{\approx} 0 \pmod{U_I} \quad n=1, 2, \dots \rightarrow \sum A_n \stackrel{\pi}{\approx} 0 \pmod{U_I}$$

(N_n / 可附番個 / 和ハ N_n デアル)

$$(55) \quad A_n \stackrel{\pi}{\approx} 0 \pmod{U_I} \rightarrow (A_1 + A_2 + \dots)^{\pi} = (A_1^{\pi} + A_2^{\pi} + \dots) + N = N \pmod{U_I}$$

$$\therefore N^{\alpha} = 0 \xrightarrow{\alpha > \pi} N^{\pi} = 0$$

故に

$$(A_1 + A_2 + \dots)^{\pi} \stackrel{(13)^{\pi}}{=} (A_1 + A_2 + \dots)^{\pi\pi} = N^{\pi} = 0 \pmod{U_I}$$

次に (22)^π トシテハ

$$(22)^{\pi} \quad (A^p A^c)^{\pi} = (A^{\pi} A^c)^{\pi} = (A^{\pi} A^{cp})^{\pi} = (A^p A^{cp})^{\pi} = (A^{cp} A)^{\pi} = (A^{c\pi} A)^{\pi} = (A^{c\pi} A^p)^{\pi}$$

が成立スル譯デアルが、相集合ノ場合ニ正則集合ヲ定義シタト同様ニ

(定義) $(A^p A^{cp})^{\pi} = 0 \pmod{U_I}$ 従ツテ (22)^π ノドレカーツガ $= 0 \pmod{U_I}$ ナル A ヲ p -正則ト云フ。所謂 Baire ノ性質ヲ有スル集合デアル。

p -正則集合ノ構造ヲ吟味スルタメ $X = A^{cpc} \subset A$ ヲ利用シテ

$$(55) \quad A = A A^{cpc} + A A^{cp} = A^{cpc} + A A^{cp}$$

トオケバ AA^{cP} ハ (22) $^{\pi}$ カラ 假定 = ヨツテ N ンデアル。
又 A^{cPc} ハ先ツ (37) $^{\pi}$ = ヨツテ (A, a, α ヲ A^c, p, π デ置換ヘル)

$$A^{cP} = A^{c\pi} + A^{cP}A^{c\pi c}$$

第二項ハコノ際 N ントナル。(37) デハ粗デアツタ)、第一項ハ $\alpha > \pi$ 式ヲ示シタ如ク正則閉集合 = N ンカ加ハツタモノデアル、ヨツテ (55) = 入レレバ

$$(56) \quad A = UP^c + Q$$

トナル、コノ U ハ正則閉集合、 P, Q ハ N ンデアツタ、*Kuratowski* ノ定義デ *Baire* ノ性質ヲモツ集合ト同ジナコトガ判ツタ。次 =

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} p\text{-正則集合ノ可附番個ノ和ハ亦 } p\text{-正則} = \text{ナル。} \\ A_n^p A_n^{cP} \stackrel{\pi}{\approx} o(\text{mod } U_I) \rightarrow (\sum A_n)^p (\sum A_n)^{cP} \\ \stackrel{\pi}{\approx} o(\text{mod } U_I) \end{array} \right.$$

$$(証) \quad p\text{-正則ヲ } (A_n A_n^{cP})^{\pi} = o(\text{mod } U_I)$$

ヲ形 = トルト

$$(\sum A_n)(\sum A_n)^{cP} = \sum A_n \cdot (\pi A_n^c)^P \subset \sum A_n A_n^{cP} \stackrel{\pi}{\approx}_{(54)} o(\text{mod } U_I)$$

コノ外色々出ルケレドモ、判リテキル定理ヲ彼モ出ル、是モ出ルデハ能カナイカラ此ノ位 = シテ、次ハ實函數論ノ形式化ト云フ、飛ンデモナイ畧論 = 移ラウト思フ。