



Title	二次微分方程式ト積分方程式トノ関係（Ⅱ）
Author(s)	亀田, 豊次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 150, p. 391-398
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74590
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

664. 二次微分方程式ト積分方程式 トノ關係(II)

亀田 豊治 郎

4. 基本定理ハ如何ナル條件ノ下ニ成立スルカラ茲ニ述
ベル。最初ニ注意ヲ要スルハ t, x 及び z ハ一畝ニ複素數
デアツテ、積分ハ z ヲリ x マデ一定ノ曲線 C = 沿フテ
爲サレルコトデアル。而シテ特ニ t, x, z ガ實數デ C ガ直線
ナラバ、基本定理ハ實積分ノ關係式トナル。

サテ前章ノ証明ニ於テ如何ナル前提ガ置カレタルカラ
一々考ヘテ、成立條件ヲ見出スト

- 1) $\mathcal{L}(y) \equiv y'' + P y' + Q y = 0$, = 獨立解ガ C = 於
テ有限デアアルコト。
- 2) $M(z') \equiv z'' + P z' + (Q - G)z = 0$, = 獨立解ガ C
= 於テ有限デアアルコト。
- 3) $b(x) = e^{-\frac{1}{2} \int^x P dz}$ ハ x ガ C 上ノ如何ナル點ニ
於テ 0 又ハ ∞ トナラナイコト。
- 4) $G(x)$ ガ C = 於テ ∞ トナラナイコト。

此等ハ基本定理

$$\begin{aligned} K(x, t) - \bar{K}(x, t) &= - \int_t^x K(x, \xi) \bar{K}(\xi, t) G(\xi) d\xi \\ &= - \int_t^x \bar{K}(x, \xi) K(\xi, t) G(\xi) d\xi \end{aligned}$$

ガ成立スルタメニ充分ナル條件デアル。今後コレ等四條

件ヲ便宜 "C上ノ條件" ト呼ブコトスル。

例1. m, n ヲ 0 デ+イ常數トシ

$$L(y) = y'' + m y$$

$$M(z) = z'' + n z$$

ト置ケバ

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \sin \sqrt{m} (x-t)$$

$$\bar{K}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \sqrt{n} (x-t)$$

$$G = m - n$$

トナル。

故ニ基本定理ハ

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{m}} \sin \sqrt{m} (x-t) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \sqrt{n} (x-t) \\ &= - \frac{m-n}{\sqrt{mn}} \int_t^x \sin \sqrt{m} (x-\xi) \sin \sqrt{n} (\xi-t) d\xi \end{aligned}$$

例2. m ヲ $\frac{1}{4} = \frac{1}{4x^2}$ 等シク+イ常數トシ

$$L(y) = y'' + \frac{1}{4x^2} y$$

$$M(z) = z'' + \frac{m}{x^2} z$$

ト置ケバ $y_1 = x^{\frac{1}{2}}, y_2 = x^{\frac{1}{2}} \log x$ ヲリ

$$K(x, t) = \sqrt{tx} \log \frac{x}{t}$$

$$\lambda, \lambda_1 = x^{\mu_1}, \lambda_2 = x^{\mu_2}, \mu_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4m}}{2},$$

$$\mu_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4m}}{2} \quad \exists 1)$$

$$\bar{K}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4m}} \left\{ \left(\frac{x}{t} \right)^{\mu_1} - \left(\frac{x}{t} \right)^{\mu_2} \right\} t$$

$$G(x) = \frac{1 - 4m}{4x^2}$$

トナル。而シテ基本定理ハ此ノ等 $K, \bar{K}, G$ = 對シ C が $\xi = 0$ ヲ通過シナイ限り成立スル。

正誤 第3款中 $b(x) = e^{\frac{1}{2} \int P dx}$ トアルハ $b(x) = e^{-\frac{1}{2} \int P dx}$,
誤 = 付訂正スル。

第二節 積分方程式 (A) ノ解

本節デハ冒頭 = 掲ゲタ方程式 (A), 即チ

$$u(x) = f(x) + \int_{(C)} K(x, t) G(t) u(t) dt \dots\dots\dots (A)$$

ノ解ヲ求メル。但シ α ハ有限ノ常數デアツテ、 C 上 = アルモ
ノトスル。

尚積分記号 = 附シタ (C) ハ α ヨリ x マデノ積分が曲線
 C = 沿フテ爲サレルコトヲ意味スル。

此ノ積分方程式ハ“C上ノ條件”が満足サレルトキハ容易ニ解クコトが出来ル。

先ヅ (A) が有限解ヲ有スルモノト假定シテ x ノ代リニ ξ ト書ケバ

$$u(\xi) = f(\xi) + \int_a^\xi K(\xi, t) G(t) u(t) dt \dots\dots\dots (1)$$

(1) ノ両辺ニ $\overline{K}(x, \xi) G(\xi)$ ヲ乗ジ a カラ x マデ C ニ沿フテ積分スレバ

$$\begin{aligned} & \int_a^x \overline{K}(x, \xi) G(\xi) u(\xi) d\xi \\ &= \int_a^x \overline{K}(x, \xi) G(\xi) f(\xi) d\xi \\ &+ \int_a^x \overline{K}(x, \xi) G(\xi) d\xi \int_a^\xi K(\xi, t) G(t) u(t) dt \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

“C上ノ條件”が満足セラルルモノトスレバ, (2) ノ最後ノ積分ハ順序ヲ変更シ得ル。即チ

$$\begin{aligned} & \int_a^x \overline{K}(x, \xi) G(\xi) d\xi \int_a^\xi K(\xi, t) G(t) u(t) dt \\ &= \int_a^x u(t) G(t) dt \int_t^x \overline{K}(x, \xi) K(\xi, t) G(\xi) d\xi \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

此ノ式ノ証明ハ t, ξ 及ビ x ヲ a カラ測ツタ C 線ノ長サノ函数トシテ表ハシ, *Dirichlet* ノ公式ヲ用フレバ直チニ得フレル。

サテ (3) 式ノ右辺ヲ基本定理ニ依リ変化スレバ

$$\begin{aligned} & \int_a^x \bar{K}(x, \xi) G(\xi) d\xi \int_a^{\xi} K(\xi, t) G(t) u(t) dt \\ &= \int_a^x u(t) G(t) \left\{ \bar{K}(x, t) - K(x, t) \right\} dt \end{aligned}$$

ヲ得ル。之ヲ (2) ノ右辺ニ代入スレバ

$$\begin{aligned} & \int_a^x \bar{K}(x, \xi) G(\xi) u(\xi) d\xi \\ &= \int_a^x \bar{K}(x, \xi) G(\xi) f(\xi) d\xi \\ &+ \int_a^x \bar{K}(x, t) G(t) u(t) dt \\ &- \int_a^x K(x, t) G(t) u(t) dt \\ \therefore & \int_a^x K(x, t) G(t) u(t) dt \\ &= \int_a^x \bar{K}(x, t) G(t) f(t) dt \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

(4) ヲ (A) ニ代入スレバ

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \bar{K}(x, t) G(t) f(t) dt \dots\dots\dots (5)$$

ヲ得ル。即チ (A) が有限解ヲ有スルナラバ (5) 式ヲ與ヘラレ
ネ、必ナラス。

逆ニ (5) 式が (A) ヲ満足スルコトニ $f(x)$ が C 上ニ於テ
有限ナラバ基本定理ニ依ツテ証明シ得ル。

故=次ノ定理ヲ得ル。

定理3. $K(x, t)$ 及ビ $\overline{K}(x, t)$ が“C上ノ條件”ヲ満足スル微分方程式ヨリ作ラレタ核デアツテ, 函数 $f(x)$ がC上ノ凡テノ点ニ於テ有限ナルトキハ, 方程式

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) G(t) u(t) dt$$

ノ有限解ハ

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \overline{K}(x, t) G(t) f(t) dt$$

ニ等シク且ツ之ニ限ル。

例1. 方程式

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x (x-t) u(t) dt$$

ヲ解ケ。但シ λ 及ビ入ハ帶數トシ必ズシモ實數デナイモノトスル。

$$(\text{解}) \quad \mathcal{L}(y) = y'', \quad G(t) = \lambda$$

ト置ケバ

$$K(x, t) = x - t$$

トナルカラ, 定理3が適用出來ル。

先ツ $\overline{K}$ ヲ計算スルニ

$$M(x) = x'' - \lambda x = 0$$

ノ二解ハ

$$x_1(x) = e^{\sqrt{\lambda} x}, \quad x_2(x) = e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

デアル。

故=

$$\bar{K}(x, t) = \frac{e^{\sqrt{\lambda}(x-t)} - e^{-\sqrt{\lambda}(x-t)}}{2\sqrt{\lambda}}$$

デアツテ、任意ノ曲線 C = 對シ “ C 上ノ條件” ハ満足
サレル。

故=

$$u(x) = f(x) + \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \int_a^x \left\{ e^{\sqrt{\lambda}(x-t)} - e^{-\sqrt{\lambda}(x-t)} \right\} f(t) dt$$

ハ $f(x)$ が有限ナル区域内ニ於テ所要ノ解デアル。

例2. $\lambda = \frac{1}{4}$ = 零シクナシ常數トシテ

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t} \right) u(t) dt$$

ヲ解ケ。

(解) 先ヅ $\frac{1}{x}$ 及 $\frac{1}{t}$ ノ二解 y_1, y_2 トスル微分方

程式

$$L(y) \equiv y'' + \frac{2}{x} y' = 0 \quad (1)$$

ヲ考ヘルト

$$K(x, t) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} y_1'(t) & y_2'(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t} \right) t^2$$

トナルカラ

$$G(t) = -\frac{\lambda}{t^2}$$

ト置ケバ、所題ノ方程式ハ定理3ノ形ニナル。故ニ微分方程式

$$M(z) \equiv z'' + \frac{2}{x} z' + \frac{\lambda}{x^2} z = 0$$

ノ二解ヲ知レバ之レヲ解クコトが出来ル。今

$$\nu_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4\lambda}}{2}, \quad \nu_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4\lambda}}{2}$$

ト置ケバ

$$z_1 = x^{\nu_1}, \quad z_2 = x^{\nu_2}$$

ハ $M(z) = 0$ ノ二獨立解デアツテ

$$\overline{K}(x, t) = \frac{x^{\nu_1} t^{1-\nu_1} - x^{\nu_2} t^{1-\nu_2}}{\sqrt{1-4\lambda}}$$

トナル。故ニ所要ノ解ハ

$$u(x) = f(x) - \frac{\lambda}{\sqrt{1-4\lambda}} \int_a^x \left\{ \left(\frac{x}{t} \right)^{\nu_1} - \left(\frac{x}{t} \right)^{\nu_2} \right\} \frac{f(t)}{t} dt$$

デアツテ、 C ハ $t=0$ ヲ通過シナイ任意ノ曲線デアレバヨ
イ。