



Title	Haarノmeasureニ就イテ, II
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1937, 150, p. 418-423
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74593
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

667. Haar measure = 就イテ, II

角 谷 静 夫 (阪大)

最初 = 前号ノ誤ヲ訂正スル。

前号ノ最後 347 頁 1 下ヨリ 7 行目以下ヲ次ノ如ク訂正スル。

「 μ , total variation μ ヲ考ヘル。 μ ハ任意ノ Borel 集合ニ對シテ $\bar{\mu}(E) = \mu(E \cdot P) - \mu(E \cdot N) = 0$ ヲ與ヘラレル。 μ ハ totally additive, left-invariant, non-negative デアリ。且ツ任意ノ $a \in G$ ニ對シテ $\bar{\mu}(P \dot{+} aP - P \cdot aP) = 0$ トナルカラ G が ergodic ナリトノ假定ヨリ $\bar{\mu}(P) = 0$ 又ハ $\bar{\mu}(G - P) = \bar{\mu}(N) = 0$ トナラネバナラナイ。然ルニ地方 $\mu(E_1) > 0$, $\mu(E_2) < 0$ ナル如キ Borel 集合 E_1, E_2 が存在スルコトヨリ

$$\bar{\mu}(P) \geq \bar{\mu}(E_1 \cdot P) \geq \mu(E_1) > 0,$$

$$\bar{\mu}(N) \geq \bar{\mu}(E_2 \cdot N) \geq -\mu(E_2) > 0$$

トナルカラコレハ矛盾デアル。ヨリテ G 1 left-invariant ナ measure ハ unique デナケレバナラナイ」

コレヲ証明ハ終ルノデアルガ、コノニ注意スベキハ μ が

必ラズシモ $\text{open set} = \text{對シテ正トナラヌコトデアル}$ 。
 ヨツテ ergodic の定義 = 於ケル $\text{measure } \mu = \text{對シ}$
 ラモ、 $\text{open set} = \text{對シテ正トナルコトヲ假定シナイコト}$
 ニスル。コノヤウナ $\mu = \text{對シテモ (I) の証明ガノママ成}$
 立スルコトハ明カデアロウ。(然シナガラ一般 = measure
 ト云へバ $\text{open set} = \text{對シテ正トナルモノヲ考へ}$
 ル)

次 = $\text{locally bicomcompact} + \text{topological}$
 $\text{group} = \text{對スル Haar, measure, uniqueness}$
 ヲ証明スル。コノ場合ハ、一般 = group ハ
 separable デナイカラ、 G 全体ヲ前ト同様ノ方法デ P ト
 N ト = 於ケルコトが出来ナクナル。ソレデ仕方がナイカラ
 $\text{bicomcompact} + \text{範圍ダケヲ考へルノデアル}$ 。

G 7 $\text{locally bicomcompact} + \text{topological}$
 group トセヨ。 G 1 $\text{left-invariant} + \text{measure}$
 が unique デナケレバ前ト同様 = シテ、ニツノ
 $\text{left-invariant} + \text{measure } \mu_1, \mu_2$ 、ニツノ
 1 $\text{Borel set } E_1, E_2$ ($\bar{E}_1, \bar{E}_2$ が何レモ bicomcompact
 = ナルモノ) 及び $\text{real number } \alpha$ が存在シテ
 $\mu_1(E_1) > \alpha \mu_2(E_1), \mu_1(E_2) < \alpha \mu_2(E_1)$ トナル。

今 E_1, E_2 ($U, U^{-1} = U, \bar{U}$ が bicomcompact ナル
 如キ開集合 U ヲ考へル。カ、ル U ハ G が locally
 bicomcompact ナルコトヨリ必ず存在スル。 $\bar{U}$ が bicom
 pact ナルコトヨリ $\bar{U}^3$ ハ又 bicomcompact デア

ル。

$(U^n, X = X_1, X_2, \dots, X_n, X_i \in U, i = 1, 2, \dots, n$
+ 此如キ点 X 全体ノ集リヲアル。) ヨツテ U^3 ハ

$\mu = \mu_1 - \mu_2$ + 此 totally additive + set-
function = 關シテ positive part P + nega-
tive part N ト分ケラレル。

又 μ ノ total variation $\bar{\mu}$ ハ $E \subset U^3$ + 此
Borel 集合 E = 對シテ $\bar{\mu}(E) = \mu(E \cdot P) - \mu(E \cdot N)$
= ヨツテ 與ヘラレル。

コノ P 及ビ μ が任意ノ $a \in U^2$ = 對シテ

$$\bar{\mu}((P + aP - P \cdot aP) \cdot U) = 0$$

ヲ満足シテキルコトヲ証明シヨ。

$$P + aP - P \cdot aP = (P - P \cdot aP) + (aP - P \cdot aP)$$

デアルカラ

$$(i) \quad \bar{\mu}((P - P \cdot aP) \cdot U) = 0$$

$$(ii) \quad \bar{\mu}((aP - P \cdot aP) \cdot U) = 0$$

ヲ証明スルバ十分デアル。

(i) ノ証明: 先ツ $(P - P \cdot aP) \cdot U \subset P$ + 此故

$$\bar{\mu}((P - P \cdot aP) \cdot U) = \mu((P - P \cdot aP) \cdot U) \geq 0$$

$$又 = (P - P \cdot aP) \cdot U \subset U - aP \cdot U \subset aU^3 - aP = aN$$

$$+ 此故 \mu((P - P \cdot aP) \cdot U) \leq 0$$

$$\therefore \bar{\mu}((P - P \cdot aP) \cdot U) = 0$$

(ii) ノ証明: 先ツ $(aP - P \cdot aP) \cdot U \subset aP$

$$+ 此故 \mu((aP - P \cdot aP) \cdot U) \geq 0$$

$$\text{次} = (aP - P \cdot aP) \cdot U \subset U - P \cdot U \subset U^3 - P = N$$

$$\text{+ル故 } \bar{\mu}((aP - P \cdot aP) \cdot U) = -\mu((aP - P \cdot aP) \cdot U) \geq 0$$

$$\therefore \bar{\mu}((aP - P \cdot aP) \cdot U) = 0$$

ヨッテ P / characteristic function $\neq \varphi(x)$

トスレバ

$$\int_U |\varphi(x) - \varphi(ax)| d\bar{\mu}(x) = 0$$

が任意 / $a^{-1} \in U^2$ (コレハ $a \in U^2$ ト同等) = 對シテ成立

スル。即チ任意 / measure $\lambda(a) =$ 對シテ

$$\iint_{U \times U^2} |\varphi(x) - \varphi(ax)| d\bar{\mu}(x) d\lambda(a) = 0$$

コノデ $\lambda(a)$ トシテ right-invariant + measure
ヲ取ル。

Fubini / 定理ヨリ $U \supset M_0$, $\bar{\mu}(M_0) = 0$ + ル集合
 M_0 が定マリ

$$\int_{U^2} |\varphi(x) - \varphi(ax)| d\lambda(a) = 0$$

が $x \in U - M_0 =$ 對シテ成立スル。即チ、 $x \in U - M_0$ +
ル各 x / $x =$ 對シテ λ -measure zero + 集合 E_x が
定マリ $a \in U^2 - E_x$ + ルトキ $\varphi(x) = \varphi(ax)$ 、又ハ
 $z \in (U^2 - E_x) \cdot x$ + ルトキ $\varphi(x) = \varphi(z)$ 。然ルニ $x \in U$
+ ルトキ $U^2 \times \supset U$ デアルカラ $z \in U - E_x \cdot x$ + ルトキ
 $\varphi(x) = \varphi(z)$ 。

同様ニ任意 / $y \in U - M_0 =$ 對シテ λ -measure

zero + 集合 E_y が定まり $x \in U - E_y$ かつ y かつ $\varphi(x) = \varphi(y)$. 然る $\lambda(U) > 0$, $\lambda(E_x \cdot x) = \lambda(E_y \cdot y) = 0$ であるから $x \in U - E_x$, $x \in E_y \cdot y$ かつ x が存在する. よって $\varphi(x) = \varphi(y)$. 即ち $\varphi(x)$ は $U - M_0 = \tau$ constant. よって $\mu(P \cdot U) = 0$ 又 $\mu(U - P) = 0$.

然る $\mu(E_1) > 0$, $\mu(E_2) < 0$, $E_1, E_2 \subset U$ かつ Borel 集合 E_1, E_2 が存在したから $\mu(P \cdot U) \geq \mu(P \cdot E_1) \geq \mu(E_1) > 0$, $\mu(U - P) = \mu(N \cdot U) \geq \mu(N \cdot E_2) \geq -\mu(E_2) > 0$ となるべきである。これに矛盾であるから G の left-invariant + measure は unique であるべきである。

—— (証明終) ——

[注意] この証明の最後部分に次のように補うことが出来る。

(この方法に深宮氏 = 教へていたダキマシタ) $x \in U - M_0$
 = 對して成立する式

$$\int_{U^2} |\varphi(x) - \varphi(ax)| d\lambda(a) = 0$$

$$\exists \int_{U^2} \varphi(x) |\varphi(x) - \varphi(ax)| d\lambda(a) = 0$$

$$\varphi(x) \int_{U^2} (1 - \varphi(ax)) d\lambda(a) = 0$$

λ が right-invariant であるから

$$\varphi(x) \int_{U^2 x} (1 - \varphi(a)) d\lambda(a) = 0$$

$x \in U$ かつ $U \subset U^2 x$ なる故

$$\varphi(x) \int_U (1 - \varphi(a)) d\lambda(a) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

同様 = $\varphi(x)$ が可逆元 $= \varphi(ax)$ が可逆元

$$(1 - \varphi(x)) \int_{U^2} \varphi(ax) d\lambda(a) = 0$$

$$(1 - \varphi(x)) \int_U \varphi(a) d\lambda(a) = 0 \dots\dots\dots (2)$$

(1), (2) の $x \in U - M_0$ に対して成立スル。

然ルニ

$$\int_U (1 - \varphi(a)) d\lambda(a) + \int_U \varphi(a) d\lambda(a) = \int_U d\lambda(a) = \lambda(U) > 0$$

デアルカラ

$$\int_U (1 - \varphi(a)) d\lambda(a), \int_U \varphi(a) d\lambda(a)$$

のどちらが 0 となるかは定まらなからナイ。そこで (1) と

(2) より $\varphi(x) \equiv 0$ と $\varphi(x) \equiv 1$ ($x \in U - M_0$) が得
ル。