



Title	非可換群ノ双對定理ニ付イテ（Ⅱ）
Author(s)	淡中, 忠郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 151, p. 17-25
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74597
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

671. 非可換群ノ双対定理ニ付イテ(II)

淡 中 忠 郎 (東北大)

(Lemma 9) Lemma 8 ト全様ニシテ

$$\left| \sum c_p f_p(x) \right| \leq M$$

ナラバ

$$\left| \sum c_p f_p(A) \right| \leq M$$

(Lemma 10) $\mathcal{R}_G$ 7 G ノスベテノ $a.p.$ 函数ノ
Ring (積ハ普通ノ積, convolution ナハナイ) トスル
ト A ハ $\mathcal{R}_G$ ノ一次表現ニマデ *fortsetzen* 出来ル。

証明: $\mathcal{R}_G$ ノ範圍デハ A ハ表現ニ成ツテキタ。

$f(x)$ 7 任意ノ $a.p.$ 函数トスルト $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$h_\varepsilon(x) = \sum c_p f_p(x)$ ガ定マリ

$$\left| f(x) - \sum c_p f_p(x) \right| < \varepsilon$$

$$\left| h_\varepsilon(x) - h_{\varepsilon'}(x) \right| \leq \left| h_\varepsilon(x) - f(x) \right|$$

$$+ \left| f(x) - h_{\varepsilon'}(x) \right| < \varepsilon + \varepsilon'$$

$$\therefore \left| h_\varepsilon(A) - h_{\varepsilon'}(A) \right| \leq \varepsilon + \varepsilon'$$

$$\therefore \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(A)$$

ガ存在スル。且ツ $h_\varepsilon(x)$ ノ取り方ニ無関係ナコトヲ明カデ
アル。之ヲ $f(A)$ ト書クト

$$(\alpha \cdot f)(A) = \alpha \cdot f(A)$$

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A)$$

$$(fg)(A) = f(A) \cdot g(A)$$

即ち $f(x) \longrightarrow f(A) = \exists$ リ一次, 表現がエラレル。

$f(A) = 0$ + ル $f(x)$ ハ $\mathcal{R}_f$ / $\mathfrak{p}(A)$ Primideal $\mathfrak{p}(A)$ を作る, (一次, Primideal 即ち $\mathcal{R}_f / \mathfrak{p}(A)$ の数体 = + ル) 逆 =

(Lemma 11) $\mathcal{R}_f$ / 任意, (一次, Primideal $\mathfrak{p}$ をとると $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(A)$ + ル $\bar{a}$ / 表現 A 有り。

証明: コノ辺ハ Boolean Ring = 関スル Stone, 論文 (Trans. A. M. S. Vol. 41 (1937)) ト同ジ論法が現ハレルが大シテ長クナイカラ全部略サナイデ述ベテ見ル。

$f(x) \equiv c_f \pmod{\mathfrak{p}}$ + ル常数 c_f を含リ易ク $f(\mathfrak{p})$ ト書リ, (代数函数, Riemann 面ノ点ノ定義トノ類似ヲ述ツテ見ルト duality ノ意味がハッキリスルマウ = 思ハレル)

$$\text{先ツ } f(\mathfrak{p}) = 0 \text{ + ラベ } g. l. b. |f(x)| = 0$$

$$\therefore \text{モシ } |f(x)| \geq \varepsilon > 0 \text{ + ラベ } \frac{1}{f(x)} \in \mathcal{R}_f$$

$$f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

$$I = \frac{1}{f(x)} \cdot f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \quad \text{矛盾}$$

$$\text{一般} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\mathfrak{p}) + \text{ル } x_1, x_2, \dots \text{ / 有ル}$$

コトモ

$$f(x) - f(p) \equiv 0 \pmod{p}$$

カラ出ル。

$$f(x) = g(x) + ih(x) \quad (g, h \text{ real})$$

トスルト, 上ノコトカラ $g(p), h(p)$ ハ real

$$f(p) = g(p) + ih(p)$$

$$\bar{f}(x) = g(x) - ih(x)$$

$$\bar{f}(p) = g(p) - ih(p)$$

$$\therefore \bar{f}(p) = \overline{f(p)}$$

故ニ $R_{\mathcal{O}_f}$ ノミデ考ヘルト Lemma 4, 假定ガ満足サレルカラ $\overline{\mathcal{O}_f}$ ノ表現 A ヲリテ

$$f_p(p) = f_p(A)$$

$R_{\mathcal{O}_f}$ ニ fortsetzen シテモ

$$f(p) = f(A)$$

以上ヲ要約スルト

(定理 I) $\overline{\mathcal{O}_f}$, Element A ト $R_{\mathcal{O}_f}$, 一次ノ Primideal トハ一対一ノ對應ヲナス

次ニ $\mathcal{O}_f$ ガ bikompaht ノトキ双對定理ヲ証明スル。之レハ一般ノ場合 bikompaht , トキニ双對定理ニナルヤウナ形ノ定理 (定理 3) ノ特別ノ場合デアアルガ独立ノ証明ヲ與ヘテ置ク。証明ハ Stone ノト同ジ。

(定理2) (Dualitätssatz)

$\mathcal{O}_f$ が bikompakt + ラベ $\mathcal{O}_f \cong \overline{\mathcal{O}_f}$ 但し $\overline{\mathcal{O}_f}$ の topology は weak topology 即ち $D_1, D_2, \dots, D_K$ ラ有限個ノ $\mathcal{O}_f$ ノ表現トシ $A \subset \overline{\mathcal{O}_f}$ ノ一ツノ vicinity トシテ

$$\|D_i(A) - D_i(B)\| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, K)$$

ナル B ノ set $\mathcal{U}(A; D_1, \dots, D_K; \varepsilon)$ フトル。

|| ハ勿論 Matrix ノ Norm, 例へバ von Neumann = 従ッテ

$$\|(C_{ik})\| = \sqrt{|C_{11}|^2 + \dots + |C_{21}|^2 + \dots}$$

証明: topology フ後廻シ=シテ代数的 + Isomorphie カラ始メル。之レハ $\mathcal{O}_f$ ノ Primideal $\mathfrak{p}$ (“一次,” トイフ言葉ヲ省略スルコト=スル) フ任意=トルト $\mathcal{O}_f$ ノ適當ナ a マリ。 $f(a) = 0$ ナル $f(x)$ ノ作ル Primideal $\mathfrak{p}(a)$ カ $\mathfrak{p}$ ト一致スルコトヲ証明スレバヨイ。之レ=ハ $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}(a)$ フ云へバ充分デアアル。コノ関係ガスベテノ $a =$ 對シテ成立シナイモノトスレバ

$$f_a(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \quad f_a(a) \neq 0$$

ナル $f_a(x)$ カ $a \in \mathcal{O}_f =$ 對シテ定マル。 $f_a(x) \geq 0$ トシテモヨイ。 $\therefore$

$$f_a(x) \cdot \overline{f_a(x)} = |f_a(x)|^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

$$|f_a(x)| \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

然カラ $|f_a(x)|$ フ始メカラ考へレバ充分デアカラデアアル。

$\text{überall dicht} = \text{且} \forall \text{ stetig isomorph}$
 $= \text{abbilden} \text{ 可 } \text{ル}。$

(注意) 之ハ定理 2ヲ含ム。何トナレバ ϕ ノ Bild $\widetilde{\phi}$
 が $\overline{\phi}$ ヲ überall dicht ナカラ ϕ 従ッテ $\widetilde{\phi}$
 が bikompaht ナラ $\widetilde{\phi} = \overline{\phi}$, $\phi \rightarrow \overline{\phi}$ ハ ϕ ,
 $\overline{\phi}$ が bikompaht 且ツ一対一ナカラ 逆ノ對應モ
 stetig トナツテ

$$\phi \cong \overline{\phi} \quad (\text{topologisch!})$$

トナル。Freudenthal, Topologische
 Gruppen mit genügend vielen
 fastperiodischen Funktionen, *Annals*
of Math. Vol. 37 (1936) Hauptsatz VII
 ト關係ガアル。

(証明) ϕ ノスベテノ $\text{irreducible representation}$ ヲ $D_1(x), D_2(x), \dots, D_k(x), \dots$
 トスル。(Unitary トシテモヨイ)。 $U_1, U_2, \dots$
 ヲ $D_1(x), D_2(x), \dots$ ト同ジ次数ノ unitary matrix
 ノ群トシ $U_1 \times U_2 \times \dots$ ヲ weak topology
 ヲ附ケテ考ヘル。(即チ neighborhood ハ有限個ノ
 Component ノ夫レノ直積) 之レハヨク知ラレタマウ
 $f_a(x)$ ハ a ノアル $\text{Umgebung } U(a)$ ナ > 0 。 $U(a)$
 ノ中カラ有限個ヲトリ出シテ

$$U(a_1) + \dots + U(a_s) = \phi$$

ト出來ル。

$$g(x) = f_{a_1}(x) + \dots + f_{a_s}(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

$$\therefore g. l. b. \quad g(x) = 0$$

of *bikompaht* なるカラ

$$g(a_0) = 0 \quad (a_0 \in \mathfrak{o})$$

$$\therefore f_{a_1}(a_0) = f_{a_2}(a_0) = \dots = f_{a_s}(a_0) = 0$$

従ッテ a_0 ハ $\mathfrak{U}(a_k) = \emptyset$ 属シナイコト = ナッテ矛盾スル。即チ

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(a) \quad (a \in \mathfrak{o})$$

topology : オハ 尙早 = 証明サレルカラ 略シテ置ク。

(定理 3) $\mathfrak{o}$ が充満澤山 *a. p.* 函数ヲ持ッバ $\mathfrak{o}$ ハ *bikompaht* ナ群ノ中 = *stetig isomorph* = *abbilden* サレル。 (*topologisch* = カドウカハ不明) 更 = 精密 = 云ハバ $\overline{\mathfrak{o}}$ ハ *weak topology* ヲ與ヘルト *bikompaht* = ナリ $\mathfrak{o}$ ハ $\overline{\mathfrak{o}}$ ノ中 = *bikompaht*。 $A \in \overline{\mathfrak{o}}$ トスルト

$$A \longleftrightarrow \{D_1(A), D_2(A), \dots, D_n(A), \dots\}$$

デ *topology* ヲモコメテ $A \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \dots$ ト考ヘラル。 $\overline{\mathfrak{o}}$ ハ $\mathcal{U}$ ノ中デ *closed* ナルコトハ明カデアアルカラ $\overline{\mathfrak{o}}$ ハ *bikompaht* ナルコトガカッス。

$G \rightarrow \tilde{G}$ stetig isomorph. の間が "カ" $\tilde{G}$ が $\tilde{G}$ で überall dicht " を証明スル。

$A \in \tilde{G}$, Umgebung $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U}(A; D_{P_1}, D_{P_2}, \dots, D_{P_S}; \varepsilon)$$

トシ

$$\|D_{P_i}(A) - D_{P_i}(a)\| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, S)$$

ナル $a \in \tilde{G}$, 存在ヲ示セバヨイ。 $a. p.$ 函数

$$f(x) = \sum_i \|D_{P_i}(A) - D_{P_i}(x)\|$$

$$f(A) = 0$$

$f(A) = \lim f(a_n)$ ($a_n \in G$) の前 = 証明シタカラ充分大キナル n = 對シテ $a = a_n$ トスレバ目的が達セラレル。

(定理 4) G any topological group
ナラ適當 = bicomact + $\mathcal{L}$ フトリト

$$\mathcal{R}_G \cong \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$$

實ハ $\overline{G} = \mathcal{L}$ フ間 = 合フ。

(注意) ユ、定理ハ van Kampen, Ann. of Math. vol. 37 (1936) で証明ナシ = 述べラレテ居ル。 $\mathcal{L}$ の作り方ハ述べナシ。

Kampen の引用シタアル Pontryagin, 論文ヲヨク讀ムベキル答ハ $\mathcal{L} = \overline{G}$ ハ可成リ具体的デハッ

キリシテ居ル様=思ハレル。

$$(証明) \quad f(x) \cdot g(x) = h(x) \quad x \in \mathcal{O}_f$$

$$+ \quad f(A) \cdot g(A) = h(A) \quad A \in \overline{\mathcal{O}_f}$$

等。

$\overline{\mathcal{O}_f}$, *topolog* , 附ケ方カラ $f(A)$ ハ連続従ッ
テ α . β . 函数デアアル。迄 = $\overline{\mathcal{O}_f}$, 連続函数 $f(A)$ アレバ
 $x \rightarrow \tilde{x}$ ($\tilde{x}$ ハ x テ *induzieren* カレタ $\overline{\mathcal{O}_f}$ ノ表
現。 $\mathcal{O}_f$ = 充分澤山 α . β . 函数ノ存在スルコトヲ假定シテ
ナイカラ

$$x \longleftrightarrow \tilde{x}$$

ハ分ヲナイ。) ノ時

$$f(x) = f(\tilde{x})$$

トオケバ $\mathcal{O}_f$ ノ α . β . 函数ガ得ラレル。

上ノ對應デ

$$\|f(x)\| = \mathcal{L} . u . b . |f(x)| = \|f(A)\|$$

$$M_x[f(x)] = M_A[f(A)]$$

等ハ今迄ノ考察カラ出ル。後若ハ

$$\left| \sum_i \lambda_i f(x a_i) - M_x[f(x)] \right| \leq \varepsilon$$

$$\sum \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \geq 0$$

カラ

$$\left| \sum_i \lambda_i f(A a_i) - M_x[f(x)] \right| \leq \varepsilon$$

$$\sum_i \lambda_i f(Aa_i) \rightarrow M_x[f(x)]$$

(uniformly in A)

トナツテ証明サレル。