OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Ôsaka Tayori, (Ⅰ)
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 151, p. 29-41
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74599
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

673. Ôsaka Tayori, (I)

北川　敏男（阪大）

別ニ、コレトイフ一定ノ目當テガアル譯デモナク、只、ソノ時々ノ機緣ニ委セ、氣樂ノ oshaberi ヲサセテ載クト有難イ。筆イヤ口ガヒッテ、ツイ不作法、不謹愼ニ亘ッテモ、ドウカ大目ニミテ、御寬恕ノ程ヲ御願ヒ申シマス。……ソウソウ、今日ハ紙談ニ書クヨリハX君ヘノ返事ヲサ

キ書カナケレバナラナカッタ。

1. X君、御無沙汰多謝。H. T. Davis ノ著書 The theory of linear operations ハ如何ダッタトノコトデシタネ。コノ本ガ出テカラ、モウ一年半ニモナッテ遅レテ失敬。600頁！頁数ノ多イトイフ意味デノ大著デアルニハ違ヒアリマセン。書名ヲヨクミルト、小文字デ from the stand point of differential equation of infinite order ト遠慮シタ ネウニ小サク断ッテキマス。

線型微分方程式，線型積分方程式ソウイッタモノハ吾々素人目ニデハ，相當マトマッテヰル様デスガ、一般ノ線型函數方程式論トナルト、對象ガ漠然トシテヰルダケニ、ソレノ Coordinating principle ガ何処ニ求メタラヨイカ。難シイコトニナリ相ダト云ッテ君モ何日カ面白イ話ヲシテクレマシタネ。

Davis ハ，differential equation of infinite order トイフ Bourlet 以來ノ、餘リ modern デナイ飛行機ニ乘ッテ Birds-eye-view ヲ書イテクレタノガコノ本ナノデスガ、Davis 君ハ大イニ謙遜シテ、the most promising field of investigation ガ indicate サレルナラバ著者ノ aims ハ達セラレタト思フト述ベテヰル。バラバラト本ヲメクッテ眺メテ、ヨク読メデナイカラ或ヒハ見當違ヒカモ知レナイケレド，Davis ノ言フコトハ例ノ月並文句

デナク、大ニ純情ヲ吐露シタモノト思ハレル。

Bourlet 譲リデハ，ドウモ見抜カリガ多イ。今コンデ自分ガ試ミル敍述ハ自分ナガラ思ハシクナイ。diff. eq, of infinite order デウマク coordinate 出来ルトコロモアルガ、ソウデナイトコロモアル。Coordinate 出来ナイモノノウチ、或者ハ，ソレト話シノ似寄ッタ Coord. シタモノノ脇ヘツケテオカウ。トモカク R. D. Carmicael 氏ノ言ハレル通リ、コノ方面ハ未開地デ、マトマット著述モナイ。ダカラ、コレデモ将来ノ研究者ノタメノ便宜ニハナルデアロウ ------- 遠イ米國デ Davis 君ガドウ思ッテヰルカハ分ラナイケレド，若シ、上ノマタナ考ヘデ書イタトスレバ，コウシタ本ニナルノモ成程ト合点ガ行キ相ダ。

ツマリ、(1) theory of diff. eq of infinite order ニヨル Coordination ト (2) Source book トシテ、reference book トシテ素材、原料ノ提供 —— コノ二ツガ本書ノ目指シタ所トスレバ、分リソウニ思ハレル。

2. X君、君モドウカ読ンデクレタマヘ。ソウサウ君ノトコロニナイ由デスカラ、内密ノ紹介ヲシテオキマセウ。第一章カラ第十二章マデナカナカノ volume デス。

第一章ハ史的回顧。Operation ノ心理學的檢討ニ始マル調子ヲラ、一寸近頃ノ数學書トハ違フノデス。ソシテ、ドウデス，Banach ノ本ヤ Stone ノ本ガ流

行シテキル今日，並ニ書イテキル Operation ノ定義ナド ハ前世紀モノデス。シカシ，コノ章ハ面白イ読物トシテノ興味本位ニ御覧ニナレバ結構。

巻末ノ文献ト相俟ッテ、Operation トイフ名ノツクモノヲ、残レナク記述セント意気込ンダコトデセウ。コレハ source book ノ役ニ適合シイ。

第二章カラ第十二章マデノウチ、第三章ハ The theory of linear systems of equations，第十二章ハ The theory of spectra デ、Stone ヤ Neumann ノ著ノアル今日、不必要ナコトニモ思ハレル。Davis トシテハ百科辞典的責務ヲモ，買ッテ出タカラ、他ニ譲ルワケニモ行カナイヤウナ気ニナッタノデセウが。ト二角記述ハアマリ rigorous デナイ。------本書ノ骨子ハ残リ9章ニ在ルワケデセウ。

3. X 君、大体 Tajori が長クナリマシタが、コレカラが本筋デス。微積ノ問題ニシテキル函数方程式、例ヘバ

$$\text{A.}\quad \int_a^b f(x+t)\,dg(t)=0; \quad \text{或ハ}\ =g(x).$$

$$\text{B.}\quad \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu(x)\int_a^b f(x+t)\,dg_\nu(t)=0; \quad \text{或ハ}\ =g(x)$$

ナド，函数 $g(x)$，$g_\nu(t)$ $(\nu=0,1,2,\cdots\cdots,n)$。$p_\nu(x)$ ナド與ヘラレタトキ $f(x)$ ヲモトメル問題ハドウ解決サレテキルカト思ッテ残リノ9章ヲメクッテミマシタ。

僕等トシテハ、無限階微分方程式ハ別ニ親譲リノ家賓デモナシ、タダ僕等ノ後ニドレダケナルカガ問題ナンダカラ。

Theory of differential eq. of infinite order ハ，コレラノ問題ニ対シテ解答ヲ與ヘテクレテキル。------ソノ話シノ前ニ *Bourlet* ノ定理トイフノガアッテ、コレガコノ方面ノ出発点ニナッテキルコトヲ云ハナケレバナラナイ。

Bourlet ノ函數方程式研究ハ「一價正則ナル函數ヲ一價正則ナ函數ニ *transmute* スル *transmutation* ハ無限階ノ線型微分演算子トシテ表ハサレル」トイフ定理ガ出発点デアル。ソコデ、*diff. eq. of infinite order* ヘノ研究ヘ，*Ritt*。*Perron*，*Sheffer*，*Valiron* ナドノ注意ガ向ケラレテ行ッタ。コノ様ナ傾向ノ出発点ニナッタ *Bourlet* ノ定理ノ証明ハ如何ナラントノ君モ氣ニナルデセウガ、ソレガ第二章 p. 99 — 105 ニ述ベラレテキル。*transmutation* ノ意味，粗雑ナ言ヒ方ヲ敢テシタ上ノ定理ノヨク正確ナ *expression* 等ハソレヲ參照シテクレ給ヘ。

4. *Generatrix* ガ登場シテクル。*Operation* ノ *Composition* ヤ *inversion* ガ *generatrix* ノ間ノ関係トシテ *expreess* サレル。シカシ，僕ニハ，*Generatrix* ノ定義等ピント來ナイ。

ソコデ、コウ考ヘテミテ行クコトニシヤウ。$e^{\lambda x}$ ナル

exponential function ヲ x ノ函數, (λ ハ parameter) トシテ、Λ ヲ operate シタトスル。$\Lambda e^{\lambda x} = g(\lambda, x) e^{\lambda x}$ トカケルコトハ常ニ可能, $e^{\lambda x} \neq 0$ デスカラ。ソウシタトキ $g(\lambda, x)$ ヲ Λ ノ generatrix ト呼ブコトニシヨウ。

コレハ或ル範囲ノ λ, x ニ関シテノミ定義サレルノガ一般デセウ (サラニ一般ニハ, $e^{\lambda x}$ ハ Λ ノ domain ニ属セヌ場合モアリマセウ. タトヘバ $L^2(-\infty, \infty)$ デ realized シタ Hilbert 空間。ソウイフ場合ハ今考ヘナイコトニシテ)。generatrix ノ例トシテ、Λ が (i) 微分演算, (ii) x ヲカケルトイフ所謂 Multiplication, (iii) Superposition 即チ $f(\alpha(x))$ ヲツクルコト, ($\alpha(x)$ given) ナドナラバ, generatrix ハ夫々 (i) λ; (ii) x (iii) $e^{(\alpha(x)-x)\lambda}$ トナルワケ。ダカラ、$g(\lambda, x)$ ハ (λ, x) ノ函数デアルダケデ、解析的ニハ全ク任意デアリウルワケデセウ。

シカルニ、diff. eq. of infinite order デ論ズルノハ, (λ, x) ニ変数ニ関シテノ正則函数デアッテ、適當ナ範囲デ

$$(1) \quad g(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \lambda^n \qquad \left(\begin{array}{l} a_n(x) \text{ ハアル範囲} \\ \text{デ一價正則} \end{array} \right)$$

トシテ表ハサレル場合ノミガ問題ニナル。コレヲ operation ニ翻譯シテ考ヘルトキ, formally

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) f^{(n)}(x)$

ナル Operation ガ對應スルト考ヘルノハ當然デアルガ、コレヲ、実際 transmutation ニツイテ証明シタノガ Bourlet ノ定理ト思ヘバ宜シイラシイ。

Chap. IV デハ、Operational Multiplication and inversion ノ題ノモトデイロイロナコトガ論ゼラレテヰルガ、本論ノ筋道即チ第一ノ目標カラ云フトΛノ generatrix $g(\lambda, x)$、他ノ Operation Γノ generatrix ヲ $h(\lambda, x)$ トスルトキ、ΛΓノ generatrix ヲ求メテヰルトコロ (p. 155—156) ガ要点ラシイ。ソレハ

(3) $h(\lambda,x)g(\lambda,x)+\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial \lambda}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2}+\cdots\cdots$

トナルカトイフコトデス（失礼、Notation ガ Davis ノト違ッテヰルッタ、謝々）——証明ハ省略シテオイ。

コノ定理ノ使ヒ途ハ $g(x)$ ヲ與ヘテ次ノ函數方程式

(4) $\Gamma f(x) = g(x)$

ヲ満足スル $f(x)$ ヲ求メヨトイフヤウナ場合、(3)ニ ノトオイテ、ソレヲミタス $g(\lambda, x)$ デモトメル。コレハ (2) ナル形デアラハサレテ、$\Lambda g(x)$ ヲツクレバ、(4) ト解ケナルヘ……。

formal ナ、飽リ = formal ナ理論。時代遅レ。

シカシ，何トカシテ、コレラが rigorous ＝基礎付ケラレハシマイカ。formalism ハ，粗末ニミラレヌキルケレドモ，シカシ、コレヲ活カシテ行カナケレバ，分リノヨイ理論ハ生レテコナイダロウ。……餘談ハ失礼，失礼。「レール」ノ補強，ドウデス、君ーツヤツテクレマセンカ。

5. X君、トモカク (1) ナル展開ニ對應サセテ、(2) ナル operation ヲ考ヘテ行ク。ソレが diff. eq. of infinite order ノ連前ナノダカラ、コレカラノ針路ハドウナルカ、想像ニ困難デナイデセウ。

1 第一ニ、$a_n(x) \equiv a_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ ナル場合、即チ常係数ノ場合。コノトキ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

ハ或ル円内デ正則ナコトモアラウシ。整函数ナコトモアロウ。トニカク、一應正則ナモノが Bourlet ノ定理ニエラレル operation ノウチカラエラレル。シカシテソレニ對應スル operation ハ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)}(z)$$

ト考ヘルコトニナルデアロウコト、想像通リニ進ンデ行ク。コノ operation ハ differentiation ト可換ナ operation ナラス。ソレハ $g(\lambda, x)$ が λ ノミノ函数デアルトイフ意味デ Λ ハ微分演算ノ函数ト云フコトニス

ルト、Dノ多價函數，特ニ Logarithm トナドモ考ヘラレナイカト云フコトニナルガ--------コレラノコトヲ述ベタノガ Chapter Ⅵ デアル。Chapter Ⅶ ニハ Heaviside calculus ガ書カレテヰル。

[2] 次ニハ，$a_n(x)=a_{n,0}+a_{n,1}x+\cdots\cdots+a_{n,N}x^N$ $(n=0,1,2,\cdots\cdots)$ デアッテNハ ∞ ニ無關係ナ自然數ノトキ。コレハ Laplace 型ト云ハレル。Davis ノ Arbeit ヲモッテ書カレタノガ Chap. Ⅶ デアル。（コレデ注意シタイノハ，Davis ノ方法ニヨレバ，function of infinite grade モ論ゼラレルコトデアル）

コレハ次ノヤウナ analogy ヲ辿ッテト思ヘバ宜シカロウ。

有限階微分方程式	無限階微分方程式
常係數	常係數（線形後動可能函數方程式ノ或ル場合ヲ含ム。）
polynome ヲ係數トスルモノ	Laplace 型

コウシタ analogy ハ更ニ続ケラレル。曰ク

Chap. Ⅸ: Generalised Euler differential eq. of infinite order; 曰ク Chap. Ⅹ: Differential eq. of infinite order of

fuchsian type。

Chap. XI モコンナ調子デセウ。

6. X君. Davis君ノ内容ノ話シハコレダケニスル。ソコデ僕等ノ問題トシタ (A), (B) ナドハドウイフ風ニ論ゼラレルカ、ソレハコウデス。

(A) $\int_0^t f(x+t)\,dg(t) = g(x)$ ナル函數方程式ハ

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \int_0^t t^n dg(t) = g(x)$

ニ reduce スルコトニヨツテ I ノ場合ニ入ル。

(B) デ特ニ、$p_n(x)$ ガスベテ polynome ナラバ，同様ナ方法デ Laplace 型ニ入ルコトニナロウス。

餘リ粗雜デスガ上ノ方程式デ與ヘラレタ x ノ範圍が問題デアル。シカシ，ソレハ $-\infty < x < \infty$ デアッテモ $a < x < b$ （有限區間）デアッテモ，$f^{(n)}(x)$ ノ大サニ關シテ適當ナ條件がアレバイヘル。

若シ，(A) = (5) デ表ハサレルタメノ條件が與ヘラレテナイヤウナ解 $f(x)$ ヲ問題トスレバ，ドウナルカ。眼カニ、diff. eq. of infinite order ハ適當出來ナイ。タトヘ，(5) ノ左辺ノ級數ハ一樣收斂デナク、何カ summability ヲ用ヒタトシテモ、ソレデモ，ソレハ程度ノ差デアル。

ソノ書ハモット簡單ナ例

(6) $f(x+1) - f(x) = 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$

ヲトッテ考ヘルトヨリ分リヤスイ。コレハ，例ヘバ〔0, 1〕デ定義サレタ全ク任意ノ函数 $f_1(x)$ ヲアタヘルトキ，

(7) $\quad f(x) = f_1(x) \qquad 0 \leqq x < 1$ デ

且ツ (6) ヲミタスヤウナ $f(x)$ ハ常ニ存在スル。（$f_1(x)$ ニ *periodic prolongation* ヲ施セバソレデヨイ。）イヘバ，長サ1ヨリ小ナ（シカシ，1ニイクラデモ近クトモカマワナイ）區間ヲアタヘルトキ、ソコニ於ケル勝手ナ値ヲトル解ガ存在スル。

コレハ有限階微分方程式トハ，大イニ趣ヲコトニスル。無限階微分方程式ノ現狀ヲ以テシテハ，コウシタ事情ハ分ラナイ。函数方程式ヲ解クノガ目的トスレバソレハ大キナ不満デアルト云ハナケレバナラナイ。

話シノ序ガラ、脱線ヲ許シ給ヘ。コウシタ自由度ハ何モ *difference eq.* ニカギッタワケデハナイ。

コウシタ自由度ハ，実ハ

(8) $$\lim_{r\to\infty}\int_{C_r}\left|\frac{e^{\xi\lambda}}{e^{\lambda}-1}\right||d\lambda| = O(1)$$

ナル関係ガ，ξ ヲ如何ニアタヘルモ，適當ニエランダ $\{C_r\}$ *countours* ノ *sequence* ニ對シテ $\varepsilon \leqq \xi \leqq 1-\varepsilon$ ナル ξ ニ關シテ一様ニ成立スルトイフコトカラ *follow* スル事実ダカラデ、（A ノ左辺ノ *operation* $\int_a^b f(x+t)\,d\varphi(t)$ ニツイテソノ母函数 $\int_a^b e^{\lambda t}\,d\varphi(t)$ ヲベ，上式 $e^{\lambda}-1$ ノ場所ニオクトキ、云ヘ

ルナラバ，同様ナ性質ヲモツ。

ソレヲ僕ハ O-association ト揖斐ガ書イタケレド，長サノ自由幅ヲキット云ッタ方ガ適切デアツタカモ知レナイ。

Y. X君、コウナツテミルト. diff. eq. of infinite order ヲ有難ガル訳ニハ行カナイネ。R. D. Carmicael 學長殿ハ " relatively unexplored domain, the importance of which will certainly be more fully recongnised as the subject is further developed in the next two or three decades " ト仰言ツテキルカ、(R. D. Carmicael Linear differential eq. of infinite order. Bull. Am. Math. Soc. 42 (1936))。

ソレハ，(A), (B) ヲ含ム線型函数方程式論ノ重要サヲ意味スルモノデナケレバナルマイ。コレカラ、発展シテ行ッタトキ、diff. eq. of infinite order ハドンナ位置ヲ占メルカ、ソレハ見物デアロウ。問題ハ，吾々ノ場合ニハ。given サレヲヰル。ソレヲ攻撃スル方法ガ問題ダ。駄目ナ方法ハサラリト西ノ海ヘ捨テテ出直スコトダ。

Davis ノ本ヲ読ンデ diff. eq. of infinite order ノ前途洋々タリト思フ人ハナイデセウ。トニカク出直スコトデアル。Davis ノ本ニハイロイロナ例題ガ澤山ア

ッテ何カ新シイ思付ガアッタ様ナトキニハ，ソレデハソノ方法デコノ例題ニ當ッテミルトドウナルカトイッタ工合ニ，云ハバ練習帖トシテ使ヘソウダ。

Davis ノ本ニ Valiron ノ方法（ソノ重要性ハ大デアル．R. D. Carmical 參照）ガナイ。又 Difference eq. ガノセテナイ。コレハヨク開拓サレタ branch トシテ omit シタノデアロウカ。シカシ，Nörlund ノ Hauptlösung ノ考ヘハ (A) ナル函數方程式ニモ拡張サレル。ソウシタ特有ノ味ヲ盛ラナクテハ，面白味モナイコトニナルデハナイカ。單ナル übertragung ハ數學者ノ演習問題ニ過ギナイ。

X君、最後ニ君ノ御健康ヲ祈ル。新年早々乱雑ナ Jayori ハ至極迷惑カモ知レナカッタケレド永々ノ御約束デシタカラ。君ハコレヲ読ンデ多大ノ疑問ト混雑トヲ感ゼラレルコトデアロウ。コウシタ疑問ヲ健実ニ育テ上ゲ、混迷ヲ切リ拓イテ行クコトハ，コレカラノ問題デ，ソノ解決ハ，吾々ノ望ンデ止マヌトコロデアル。generatrix ノトリ扱ヒ，ソレニツイテハ，又近イウチニ愚見ヲ御知ラセ申上ゲマス。