



Title	偏微分不等式二就イテ
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 152, p. 43-48
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74600
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

674. 偏微分不等式 = 就イテ

南 雲 道 夫 (阪大)

§ 緒 言

1928年 = A. Haar ハ 偏微分不等式

$$\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \leq A \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + B |u| + \delta$$

= 於テ $|u(x, 0)| \leq M$ ($\alpha \leq x \leq \beta$) + ラバ $y \geq 0$,

$\alpha + Ay \leq x \leq \beta - Ay$ + ル 範囲ヲ

$$|u(x, y)| \leq M e^{By} + \delta (e^{By} - 1)$$

+ ル コトヲ 基ニシテ, *Canchy* 以來, *Charakteristik* ノ 理論ヲ 離レテ,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

ノ 解ノ 一意性ヲ, 之ガ 境界 條件 及ビ $f(\quad)$ ト 夫ニ 連続 = 変化スレコト等ヲ 証明シタ (*Atti del Congresso Internazionale dei matematici Bologna Tomo III, 5. — 10.*). 尚, J. Schauder ハ 上ノ 不等式ヲ 基ニシテ *Charakteristik* ノ 理論ヲ 離レテ 偏微分方程式ノ 解ノ 存在ヲ 論ジテキル (*Commentarii Math. Helvetici 9 (1936—1937) 263—283*).

上ノ 論文ハ 最近ノ, 存在ヲ 知ツタバカリテ, 内容ハ 未ダ 讀メデナイガ、之レニ ツケテ *Perron* ガ 常微分方程式ノ

場合 = 微分不等式ヲ考ヘタヤ $\dot{y} =$ 、一般ノ $f(x, y, u, u_x)$
ニツイテエ、

$$\frac{\partial v}{\partial y} > f(x, y, v, v_x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \leq f(x, y, u, u_x)$$

及ビ $u(x, 0) < v(x, 0)$ カラ、 $y > 0$ + ル 適當 + 範圍
内デ

$$u(x, y) < v(x, y)$$

ガ証明出来ヌカト考ヘヲ見タ。之レハ領域ノ境界及ビ $f(x, y, u, p)$ ニツイテ適當ナ條件 (p = 関シ *Lipschitz* = 似タ條件) ガアレバ成功シタ。(尤ノ數カ多イ場合 = ∞)

§ 本 論

本論デモ細カイ條件ヲ濃密ニ述ベルコトハ略シテ
オク。

$\mathcal{L}$ ヲバ $n+1$ 次元ノ空間 $(x_1, \dots, x_n, y)$ 内
デ不等式

$$A \geq y \geq 0 \quad \text{及ビ} \quad B^\mu(x, y) \geq 0 \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

ニヨツテ定メラレタ有界ノ領域トスル。又 $[\mathcal{L}]$ ヲバ $2n+2$
次元ノ空間 $(x_1, \dots, x_n, y, u, p_1, \dots, p_n)$ 内ノ
領域ヲ指シ $(x, y) \in \mathcal{L}$ + ルモノトシ、 $f(x, y, u, p)$
ハ $[\mathcal{L}]$ デ連続ナ函数トスル。

尚 $\mathcal{L}$ ノ境界点ハイツレモ高々 n 個、 $B^\mu = 0$ = 属シ、
ソノ点ヲ含ム $B^\mu = 0$ = ツイテハ微分形式 $\sum_{i=1}^n B_i^\mu dx_i$

$(B_i^\mu = \frac{\partial B^\mu}{\partial x_i})$ は一次的 = 独立 + モノトスル。

定理 $u(x, y), v(x, y)$ は $\mathcal{L}$ で連続微分可能
 で $u = u(x, y), v(x, y)$,

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

が $[\mathcal{L}]$ 内 = アルヤウ + 函数トスル。

今 $u = v(x, y)$ と = アル $\mathcal{L}$ の境界点 $R =$ 於てハ
 $\lambda_\mu \geq 0$ + ルスベテノ $\lambda_\mu =$ ツキ

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x, y, v, v_x) - f(x, y, v, v_x - \sum_{(R)} \lambda_\mu B_x^\mu) \\ \geq \sum_{(R)} \lambda_\mu B_x^\mu \end{aligned}$$

が成立スルモノトスル。〔但シ $\sum_{(R)}$ ハ R が属スルヤウ +

$B^\mu = 0$, $\mu =$ ツイテノ加法ヲ意味スル, 又 λ_μ ハ

$p = v_x - \sum_{(R)} \lambda_\mu B_x^\mu$ が $[\mathcal{L}] =$ 属スルモノダケデヨイ]

次 = $u(x, y), v(x, y) =$ ツイテハ $\mathcal{L}$ で

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial y} \leq f(x, y, u, u_x), \quad \frac{\partial v}{\partial y} > f(x, y, v, v_x)$$

及ビ $u(x, 0) < v(x, 0)$

が成立スルモノトスル。

シカラバ $\mathcal{L}$ 内デ

$$u(x, y) < v(x, y).$$

(証明) 充分小ナル $y =$ ツイテハ 明ラカ =

$$u(x, y) < v(x, y).$$

ソコテ帰謬法ヲ用ヒテ此全体デ之レガ成立ヲ証明スル。

上ノ不等式ガ成立シナイヤウナ y ノ最小ノ値ガアル。ソノ点ヲ (x_0, y_0) トスル。

先ヅ (x_0, y_0) ガ Ω ノ内点ナラバ、 $u(x_0, y_0) = v(x_0, y_0)$ 、 $u(x, y_0) \leq v(x, y_0)$ ヨリ、 (x_0, y_0) デハ $u_x = v_x$

$$\text{又} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \geq \frac{\partial v}{\partial y}.$$

之レハ不等式 (2) ト矛盾スル。

次ニ $R = (x_0, y_0)$ ガ Ω ノ境界点トシ、 $\mu \in (R)$ ガ此ノ点ヲ含ム $B^\mu = 0$ 、 μ ノ番号トスル。

$y = y_0$ 上デ (x_0, y_0) ヨリ Ω ノ内側ヘノ微分Vektorハ

$$\sum_{i=1}^k B_i^\mu dx_i > 0.$$

之ニツイテハ $u(x, y_0) \leq v(x, y_0)$ ヨリ

$$\sum_{i=1}^k (v - u)_{x_i} dx_i \geq 0.$$

從ツテ $(v - u)_{x_i} = \sum_{(R)} \lambda_\mu B_i^\mu$ ナル $\lambda_\mu \geq 0$ ガ存在スル。故ニ

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} - \sum_{(R)} \lambda_\mu B_i^\mu.$$

次ニ Ω ノ境界点 (x_0, y_0) ヲ通り $B^\mu = 0$ 内ニアル

曲線 $x_i = x_i(y)$ を沿って考へれば, (2), (1), (3) 及び

$$B_i^\mu \frac{dx_i}{dy} + B_y^\mu = 0$$

より,

$$0 \geq \frac{d}{dy} (v - u)_{x=x(y)} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} + \sum_i (v_{x_i} - u_{x_i}) \frac{dx_i}{dy}$$

$$> f(x, y, v, v_x) - f(x, y, u, u_x) + \sum_i \sum_{(\mathbb{R})} \lambda_\mu B_i^\mu \frac{dx_i}{dy} \geq 0.$$

之れは矛盾である。(証了)

§ 應 用

以上ノ方法ヲ特ニ

$$\frac{\partial u}{\partial y} \leq A \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| + B |u| + \delta = f(x, y, u, u_x), \quad (\delta > 0)$$

ニ應用スルバ, $\mathcal{D}$ 中ニ $0 \leq y$, $\alpha + Ay \leq x \leq \beta - Ay$ トシ,

$$v(x, y) = M' e^{By} + \delta' (e^{By} - 1),$$

且ツ $\delta' > \delta$, $M' > M (> 0)$ トスルバ

$$\frac{\partial v}{\partial y} > f(x, y, v, v_x)$$

之レカラ $u(x, 0) \leq M$ ナラバ, $\mathcal{D}$ 内ニ

$$u(x, y) \leq M e^{By} + \delta (e^{By} - 1)$$

ガ証明サレル。又 u ノ代リ $-u$ ヲ考ヘルコトニヨリ結局

$$|u(x, y)| \leq M e^{By} + \delta (e^{By} - 1)$$

ヲ得ル。