



Title	Uniformly convex space 二於ケル weak convergence
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 154, p. 71-80
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74609
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

683. Uniformly convex space = 於ケル weak convergence

角 谷 静 夫 (阪大)

S. Banach 及び S. Saks の L^p ($p > 1$) 空間 = 於
テ点列 $\{x_n\}$ が一点 x = 弱収斂スルトキ、 x_n ノ適當ナ
部分列 $\{x_{n_k}\}$ ヲ取レバ

$$\sigma_k = \frac{x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}}{k}$$

カ x = 強収斂スルコトヲ証明シタ。(1)

然ルニ J. Schreier が直グノ後ヲ示シタ如ク。(2)

コレト同様ナ定理ハ連続函数ノ空間 C ニハ成立シナイ。即チ
 $0 \leq t \leq 1$ = テ定義サレタ連続函数ノ系列 $\{x_n(t)\}$ = テ
常數 0 = 弱収斂スルガ、如何ニ部分列 $\{x_{n_k}(t)\}$ ヲ取
ツテモ

$$\sigma_k(t) = \frac{x_{n_1}(t) + x_{n_2}(t) + \dots + x_{n_k}(t)}{k}$$

-
- (1) S. Banach et S. Saks: Sur la convergence forte dans les champs L^p , *Studia Math.*, 2(1930).
- (2) J. Schreier: Ein Gegenbeispiel zur Theorie der schwachen Konvergenz, *Studia Math.*, 2(1930)

が $0 =$ 強収斂 (一様収斂) シタイモノが存在スル。⁽³⁾

此ノ如ク $L^p (p > 1)$ = 於テ成立スル定理ガ $C =$ 於テ成立シナイノハ如何ナル原因ニ依ルノデアロウカ。

コレニ對シテ次ノ定理ガーツノ解答ヲ映ヘル。

定理. *uniformly convex + Banach space*
= 於テハ点列 $\{x_n\}$ が一点 $x =$ 弱収斂スレバ適當ニ部分列 $\{x_{n_k}\} =$ 對シテ

$$\sigma_k = \frac{x_{n_1} + x_{n_2} + \dots + x_{n_k}}{k}$$

ハ $x =$ 強収斂スル。

13) 更ニ Z. Zalcwasser がソノ後ヲ示シテキル如ク、空間 $C =$ 於テモ x_n が $x =$ 弱収斂スルトキハ適當ニ

Toeplitz / schema $\lambda_k^n (k=1, 2, \dots, n, n=1, 2, \dots)$
($\lambda_k^n \geq 0, \lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_n^n = 1$) ヲ取レバ

$$\sigma_n = \lambda_1^n x_1 + \lambda_2^n x_2 + \dots + \lambda_n^n x_n$$

ハ $x =$ 強収斂スルノデアアル。然ルニコノ定理ハ S. Mazur
ニ依レバ一般ノ Banach 空間ガ成立スルノデアアル。

Z. Zalcwasser: Sur une propriété du
champ des fonctions continues, *Studia*
Math., 2 (1930)

S. Mazur: Über konvexe Mengen in
linearen normierten Räumen, *Studia*
Math. 4 (1933)

定理ヲ証明スル前 = *uniformly convex space*
ノ意味ヲ説明シナケレバナラナイ。コレハ J. A. Clarkson
ニヨツテ導入サレタ概念デアル。⁽⁴⁾ *Banach space* (γ)
ノ *Norm* $\|x\|$ が次ノ性質ヲ持ツトキ *uniformly con-*
verse デアルト云フ。

(U) 任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對シテ $\delta(\varepsilon) > 0$ が定マリ

$$\|x\| = \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \quad \text{トラバ}$$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon) \quad \text{トナル。}$$

J. A. Clarkson ハ *Banach space* = 属スル
値ヲ取ル函数ノ積分 = 關スル問題 = 際シテコノ考ヘヲ導入シ
タノデアル。⁽⁵⁾

Clarkson ハ L^p ($p > 1$) が *uniformly convex*
デアルコトヲ示シテキルカラ上、定理ハ *Banach-Saks*
ノ結果ヲ含ムワケデアル。

定理ノ証明ヲスルタメニ上ノ條件 (U) ヲソレト同等ナ (U')
ニヨツテ置キカヘル。

(U') 任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對シテ $\delta'(\varepsilon) > 0$ が定マリ

$$\|x - y\| \geq \varepsilon \cdot \text{Max}(\|x\|, \|y\|) \quad \text{トラバ}$$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq (1 - \delta'(\varepsilon)) \cdot \text{Max}(\|x\|, \|y\|) \quad \text{トナル。}$$

(4) J. A. Clarkson: *Uniformly convex space*,
Transaction of the Amer. Math. Soc.
40 (1936)

(5) 泉信一氏: 積分論 47 頁参照。

(U') = 於テ $\|x\| = \|y\| = 1$, $\delta'(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ トオケバ
 (U) トナルカラ (U') が成立スレバ (U) が成立スルコトハ明カ
 デアル。

次 = 、逆 = (U) が成立スルトキハ適當 = $\delta'(\varepsilon)$ を取レ
 バ (U') が成立スルコトヲ示サシ。

先ツ $\|x\| \geq \|y\|$ ト假定シテモ差支ナイ。次 =
 $\|x\| = \|y\| = 0$ ナルトキハ明カデアルカラ $\|x\| > 0$ ト假
 定シテモ差支ナイ。

更 = $\|x\| > 0$ デアレバス、 y を夫々 $\frac{x}{\|x\|}$, $\frac{y}{\|x\|} =$
 ヨツテ置キカヘレバ $\|x\| = 1$, $\|y\| \leq 1$ ト假定シテモ一般
 性ヲ失ハナイコトハ容易ニワカル。

ヨツテ $(U) \rightarrow (U')$ を証明スル代リ =

(U'') 任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對シテ $\delta''(\varepsilon) > 0$ が定マリ

$$\|x\| = 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \text{ トラバ}$$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta''(\varepsilon)$$

トオキ、 $(U) \rightarrow (U'')$ ナルコトヲ証明スレバヨイ。

$(U) \rightarrow (U'')$ の証明:

$\eta > 0$ を十分小サク $< \varepsilon$ ナル如クトリ (コノ大キサハ後
 デ定メル) $1 \geq \|y\| \geq 1 - \eta$ ナルトキヲ考ヘル。

$z = y / \|y\|$ トオケバ $\|y - z\| = 1 - \|y\| \leq \eta$ デアル
 カラ

$$\begin{aligned} \|x - z\| &= \|x - y + y - z\| \geq \|x - y\| - \|y - z\| \\ &\geq \varepsilon - \eta > 0 \end{aligned}$$

ヨツテ $\|z\| = \|x\| = 1$ ナルコトト (U) トヨリ

$$\left\| \frac{x+z}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon - \eta)$$

コレヨリ

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x+y}{2} \right\| &= \left\| \frac{x+z}{2} + \frac{y-z}{2} \right\| \leq \left\| \frac{x+z}{2} \right\| + \left\| \frac{y-z}{2} \right\| \\ &\leq 1 - \delta(\varepsilon - \eta) + \frac{\eta}{2} \end{aligned}$$

右辺 $1 - \delta(\varepsilon - \eta) + \frac{\eta}{2}$ ハ η ヲ十分小サク取レバ (ε ハ固定) 明カニ < 1 ナルカラ、此ノ如キ η ヲ取リコレヲ η_0 トスル。

即チ $1 \geq \|y\| \geq 1 - \eta_0$ ナルトキハ

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon - \eta_0) + \frac{\eta_0}{2} < 1$$

次ニ $\|y\| < 1 - \eta_0$ ナルトキハ

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \frac{\|x\| + \|y\|}{2} < \frac{1 + 1 - \eta_0}{2} = 1 - \frac{\eta_0}{2} < 1$$

ヨツテ常ニ $\|x - y\| \geq \varepsilon$, $\|x\| = 1$, $\|y\| \leq 1$ ナラバ

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x+y}{2} \right\| &\leq \max \left(1 - \delta(\varepsilon - \eta_0) + \frac{\eta_0}{2}, 1 - \frac{\eta_0}{2} \right) \\ &\equiv 1 - \delta''(\varepsilon) < 1 \end{aligned}$$

定理ノ証明: $X=0$ ナルトキニ証明スルベシナル。

$\{X_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) が $X=0$ ニ弱収斂スルトセヨ。

0. G $\|X_n\| = M$ トオケバ $M < \infty$ ナル。

先づ $\{X_n\}$ ヨリ 部分系列 $\{X_{m_n}\}$ ($n=1, 2, \dots$)

($1 < m_1 < m_2 < \dots < m_n < \dots$) を選ぶ

$$\left\| \frac{X_{m_{2n-1}} + X_{m_{2n}}}{2} \right\| \leq \theta \cdot M \quad (n=1, 2, \dots)$$

トナルヤウニスルコトが出来ルコトヲ示サウ。コノニ

$$\theta = \max\left(\frac{3}{4}, 1 - \delta'\left(\frac{1}{2}\right)\right) < 1$$

ニテコレハ点列 $\{X_n\}$ 及び M ニハ無関係ナ常数ナル。

$m_1 = 2$ トオキ、 $\|X_2\| \leq \frac{M}{2}$ ナラバ $m_2 = 3$ トオク。

$$\begin{aligned} \left\| \frac{X_{m_1} + X_{m_2}}{2} \right\| &= \left\| \frac{X_2 + X_3}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{M}{2} + M \right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot M \leq \theta \cdot M \end{aligned}$$

ナル。 $\|X_2\| > \frac{M}{2}$ ナラバ $\|X_n - X_2\| > \frac{M}{2}$ ナル如キ最初ノ $n (> 2)$ を取りコレヲ m_2 トオク。

カナル n が存在スルコトハ若シスベテノ $n > 2$ ニ對シテ

$$\|X_n - X_2\| \leq \frac{M}{2} \text{ トナレバ}$$

$$\|X_2\| = \|X_2 - 0\| \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \|X_2 - X_n\| \leq \frac{M}{2}$$

トナツテ矛盾スルコトヨクワカル。

カナル m_1, m_2 ニ對シテハ

$$\|X_{m_1} - X_{m_2}\| > \frac{M}{2} \geq \frac{1}{2} \max(\|X_{m_1}\|, \|X_{m_2}\|)$$

デアルカラ $(\overline{U}')$ ヨリ

$$\left\| \frac{X_{m_1} + X_{m_2}}{2} \right\| \leq (1 - \delta'\left(\frac{1}{2}\right)) \cdot \max(\|X_{m_1}\|, \|X_{m_2}\|) \leq \theta \cdot M$$

ヲ得ル。

次ニ $m_3 = m_2 + 1$ トオキ、 m_1 カラ m_2 ヲ定義シタノ
ト全ク同様ノ方法ヲ m_n ヲ定義スル。コノ操作ヲツゞケレバ
所要ノ部分系列ヲ得ルコトハ明カデアアル。

今簡単ノタメ

$$X_n^{(1)} = \frac{X_{m_{2n-1}} + X_{m_{2n}}}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

トオケバ $0 < \|X_n^{(1)}\| \leq \theta \cdot M = \tau$ 且ツ $\{X_n^{(1)}\}$ ハ $X=0$ =
弱収斂スル。ヨツテ $\{X_n\}$ カラ $\{X_n^{(1)}\}$ ヲ定義シタノト全
ク同様ノ方法ニヨツテ $\{X_n^{(1)}\}$ カラ $\{X_n^{(2)}\}$ ヲ定義シテ、コ
レガ

$$X_n^{(2)} = \frac{X_{m'_{2n-1}} + X_{m'_{2n}}}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$1 < m'_1 < m'_2 < \dots < m'_n < \dots$$

トニノ形デアリ $0 < \|X_n^{(2)}\| \leq \theta^2 \cdot M$ トナルヲ示スルコト
が出来ル。 $\{X_n^{(2)}\}$ が $X=0$ = 弱収斂シテ、且ツ各々ノ
 $X_n^{(2)}$ ($n=1, 2, \dots$) が最初ノ系列 $\{X_n\}$ ノうちノ相異ル
4個ノ算術平均トトツテキレコトモ明カデアアル。

一般ニ系列 $\{X_n^{(p)}\}$ が既ニ定義サレコレガ

$$(i)_p \quad \|X_n^{(p)}\| \leq \theta^p \cdot M, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(ii)_p \quad X=0 = \text{弱収斂スル。}$$

$$(iii)_p \quad X_n^{(p)} (n=1, 2, \dots) \text{ ハ何レモ最初ノ系列 } \{X_n\}$$

ノうちノ相異ル 2^p 個ノ算術平均デアアル。

ヲ満足シテキルトキ、コレヨリ系列 $\{X_n^{(p+1)}\}$ ヲ定義シテコレガ

$$(i)_{p+1} \quad \|X_{n+1}^{(p+1)}\| \leq \theta^{p+1} M, \quad n=1, 2, \dots$$

$$(iv)_{p+1} \quad X_n^{(p+1)} = \frac{X_{m_{2n-1}}^{(p)} + X_{m_{2n}}^{(p)}}{2}, \quad n=1, 2, \dots$$

$$1 < m_1^{(p)} < m_2^{(p)} < \dots < m_n^{(p)} < \dots$$

ヲ満足スルマウニ選グコトが出来ル。 $\{X_n^{(p+1)}\}$ が

$(ii)_{p+1}$, $(iii)_{p+1}$ ヲ満足シテキルコトハ $(ii)_p$, $(iii)_p$ 及ビ

$(iv)_{p+1}$ ヨリ容易ニワカル。

$p=1, 2, \dots$ ニ對シテ系列 $\{X_n^{(p)}\}$ が定義サレタトキ $x_1, X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \dots, X_1^{(p)}, \dots$ ヲ考ヘヨウ。各々 $X_1^{(p)}$ ハ $(iii)_p$ ヨリ

$$X_1^{(p)} = \frac{X_{l_1^{(p)}} + X_{l_2^{(p)}} + \dots + X_{l_{2^p}^{(p)}}}{2^p}$$

ト云フ形デ

$$1 < l_1^{(1)} < l_2^{(1)} < l_1^{(2)} < \dots < l_4^{(2)} < l_1^{(3)} < \dots$$

$$\dots < l_{2^{p-1}}^{(p-1)} < l_1^{(p)} < \dots$$

デアル。

コレヲ順次

$$n_1, n_2, \dots, n_K, \dots$$

デ表ハス。即チ

$$n_1=1, \quad n_2=l_1^{(1)}, \quad n_3=l_2^{(1)}, \dots, n_{2^p}=l_1^{(p)}, \quad n_{2^p+1}=l_2^{(p)},$$

$$\dots, n_{2^{p+1}-1} = l_{2^p}^{(p)}, n_{2^{p+1}} = l_1^{(p+1)}, \dots$$

トオク。コノ如ク定義サレタ n_k = 對シテ $\{X_{n_k}\}$ が求ムル
部分系列デアルコトヲ示サウ。即チ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{X_{n_1} + X_{n_2} + \dots + X_{n_k}}{k} \right\| = 0$$

ナルコトヲ示サウ。コノタメニハ任意ノ p = 對シテ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{X_{n_1} + X_{n_2} + \dots + X_{n_k}}{k} \right\| \leq \theta^p \cdot M$$

トナルコトヲ示セバ十分デアル。

簡單ノタメニ $X_{n_k} = y_k$ トオク。

$$q \cdot 2^p - 1 \leq k < (q+1) \cdot 2^p - 1$$

ナル k ヲトレバ

$$\begin{aligned} \|y_1 + y_2 + \dots + y_k\| &\leq \|y_1 + y_2 + \dots + y_{2^p-1}\| \\ &+ \sum_{i=1}^{q-1} \|y_{i \cdot 2^p} + y_{i \cdot 2^p+1} + \dots + y_{(i+1) \cdot 2^p-1}\| \\ &+ \|y_{q \cdot 2^p} + y_{q \cdot 2^p+1} + \dots + y_k\| \end{aligned}$$

トナリ

$$\frac{1}{2^p} (y_{i \cdot 2^p} + y_{i \cdot 2^p+1} + \dots + y_{(i+1) \cdot 2^p-1})$$

ハ明カニ $\{X_n^{(p)}\}$ ノ element デアルカラ

$$\begin{aligned} \|y_1 + y_2 + \dots + y_k\| &\leq (2^p - 1) \cdot M \\ &+ (q-1) \cdot 2^p \cdot \theta^p M + (2^p - 1) M \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_k}{k} \right\| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{(q-1) \cdot 2^p}{k} \theta^p M$$

$$= \theta^p \cdot M$$

———— (証明終) ————