



Title	Cauchy級数ノ Parseval定理ト Hilbert空間ノ内積
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 154, p. 80-93
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74610
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

684. Cauchy 級数 / Parseval 定理ト Hilbert 空間ノ内積

北 川 敏 男 (阪大)

§1. 問題 $L^2(a, b)$ 函数空間 — 即チ有限區間 (a, b) デ, 自來カ L -integrable デアルヤウナ函数全体ヨリナル空間ニ於テハ, 通常ソノ任意ノ二ツノ elements f 及ビ g ノ内積ヲ

$$(1) \quad (f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

ヲ以テ定義スルコトニヨツテ, Hilbert 空間ガ形成サレレ。然シ内積ヲ (1) ノ形ニ定義シナケレバチラスコトハナイ、要ハ Hilbert space ノ内積トシテノ性成ヲモツタモノデアリサヘスレバヨイ。 (1) ノ形式ハ簡單ダカラ、抽象論ノ一ツノ realization ヲ與ヘルトイフ目的ナラベ、何モ云フコトハナイ。

然シ Hilbert 空間論ヲヨリ具体的ナ問題ニ應用スル

トキ —— 例へバ、線型微分演算子ノ境界値問題ニ應用スル
トキ、*inner product*ガ(1)ノ形デアルガタメニ應
用範圍ニ制限ガツクトイフコトハ注意スルヲモナイコトデ
アロウ。即チ

$$L[y(t)] \equiv \sum_{r=0}^n p_r(t) y^{(r)}(t)$$

トスルトキ、*formally* $y =$,

$$(2) \int_a^b L[f(t)] \overline{g(t)} dt = B(f, g) - \int_a^b f(t) L^* \overline{g(t)} dt \quad (1)$$

ナリ所謂 *Lagrange*ノ關係式ニ於テ、 $B(f, g)$ ハ、

$$(3) \begin{array}{c} f(a) \quad f'(a) \cdots \cdots, f^{(n-1)}(a) \\ g(a) \quad g'(a) \cdots \cdots, g^{(n-1)}(a) \end{array} \bigg| \begin{array}{c} f(b) \quad f'(b) \cdots \cdots f^{(n-1)}(b) \\ g(b) \quad g'(b) \cdots \cdots g^{(n-1)}(b) \end{array}$$

ニミ *depend* シタモノデアル。手取り早ク云へバ、「兩
端ノ値ニミ關係シタモノ」デアル。 L ニ附随シタ *sym-*
*metric transformation*ノ研究ハ、 $B(f, g) = 0$
ナル條件ニ密接ニ關係スルノデアルカラ、

“内積ヲ(1)ナル形ニトツタ結果、線型微分演算子ノ境
界値問題ハ「兩端ノ値ニミ關係シタモノ」ニカ論
ゼラレテキナイ。”

トイフコトニナル。ヨリ間ノ幸シイ消息ハ、M. H. Stone,
著 *Linear transformation in Hilbert space*

(1) $B(f, g)$ ハ *Concomitant*, L^* ハ *adjoint + dif-*
ferential operation

and their applications to analysis,
Chapter X, § 2-3 ヲミレバ容易ニ看取サレル。

然ルニ、微分方程式ノ境界値問題トシテハ、Hilbert
空間論發展ノ以前ニ、モット一般ノ形ノモノガ論ゼラレタキ
ル。ソノ代表トシテ J. D. Tamarkin: Math. Zeitschr.
27 (1928) pp 1-54 ヲ挙げルコトが出来ヨウ。ソノ他
Birkhoff, Stone ノ研究ニマルガ、例ヘハ境界條件ト
シテ n 個ノ linear functional

$$(4) \quad l^{(p)}\{f(\xi)\} = \sum_{r=0}^{n-1} \int_a^b f^{(r)}(\xi) d\alpha_{r,p}(\xi) = 0$$

($p=1, 2, \dots, n$)

ノモノヲ、論ジタモノガアル。

(4) ノヤウナ形ノモノニ對シテモ、Hilbert space
ノ空間が適用サレルコトハ望マシイ。ソレニハ内積ヲ (1) ト
定メテ掛ツテハ駄目デナイカト思フ。映ヘラレタ (4) ノ形ニ
應ジテ、inner product ヲ定義シ直シ、ソノ上デ適用
スルコトニシタガ宜シカロウト思フノデアレ。

以上ハ想像ニ互ツヌコトデ、恐縮デアルカラコゝデハ、
以上ノ方針デ、試ミターツノ貧弱ナ結果ヲ報告シタイ。ソノ
結果ハ、第一階ノ微分演算子 $Df(x) = f'(x)/i$ ニ附随シタ
境界條件

$$L_{\xi}\{f(\xi)\} = \int_a^b f(\xi) d\varphi(\xi)$$

ニノミ関係シタモノデアル。コレデ問題ニツイテノ御説明ヲ

終ル。(2)

§ 2. 與へラレタ linear functional = 関スル
Cauchy 級数ノ導入。

$$L_{\xi}\{f(\xi)\} = \int_a^b f(\xi) d\varphi(\xi)$$

ヲ與へラレタ functional トスル。

簡單ノタメニ $a=0, b=2\pi$ トスル。

$$G(\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{\lambda t} d\varphi(t)$$

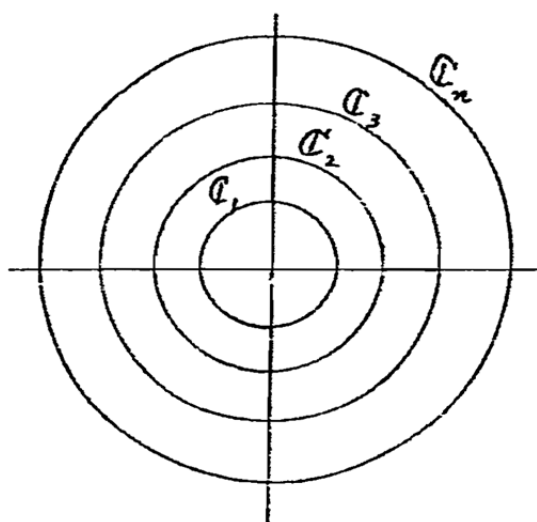
ハ λ ノ 整函数デアアル。今茲ニ、Contour $\mathbb{C}$ ヲ λ -plane
ニ トツテ

$$(5) \quad S_{\mathbb{C}}(x, f) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}} \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)} L_{\xi}\left\{e^{\lambda \xi} \int_0^{\xi} f(\eta) e^{-\lambda \eta} d\eta\right\} d\lambda$$

ヲ考ヘルト、コレハ、 f ヲ フクヘタ トキ $\sum \sum a_{p, \nu} x^{\nu} e^{\lambda p x}$
ノ形ニ ナツテキル。ソコデ contoursノ sequence

(2) 主ナル結果ハ、以下ニ述バレル定理 I 及ビ II デアル。定理 I
ヲ得ルタメニ、Cauchy 級数及ビ、特ニ ヲ Parseval
定理ヲ利用スル。コレヲハ、當テ私が論ジタコトノアルモノ
デアレタレドモ、別ノ條件ノモトヲ論ズルノガアツテ前論
ヲ引用スルコトハナイ。尚私カ、Jap. Journ. Math.
13 (1937) ノ論文ノ中ニ 當イタ Cauchy 級数ノ Parseval
定理ハ、條件が多キニ失シ、トテモキタナイ。コレハシカシ
簡單ナモノニ直セルコトが分ツテ来タ。

$\{C_n\}$ をとり、圖ノ如ク C_n ノカコム範圍ハダンダンニ全平



面ニ擴ガツテ行クヤウニトル。

カクシテ $G(\lambda)$ ノ零點ヲダン
 ダンニソノ内部ニフクメテ行
 ク、カクシテ

$$\{S_{C_n}(x, f)\} \quad (n=1, 2, \dots)$$

ハーツノ series を定義スル。

コレヲ ℓ = 關スル Cauchy

series ト呼ブコトニシヨウ。

$G(\lambda)$ = 關シテ次ノコトヲ假定スル：

條件 I $G(\lambda)$ ノ零點ハスベテ純虚數且ツ simple: コ
 レヲ $\{i\lambda_n\}$ デアラハシ、次ノヤウニ番号付ケラレテアル
 トスル：

$$\dots < \lambda_{-n} < \lambda_{-n+1} < \dots < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$$

條件 II $|\lambda_n - n| \leq D \quad (-\infty < n < \infty)$ トナルヤウナ
 常數 $D < 1/\pi^2$ が存在スル。

條件 III 正數 α, β がアツテ、

$$+\infty > \beta \geq G'(i\lambda_n) \geq \alpha > 0 \quad (-\infty < n < \infty)$$

以上ノ如キ條件ヲ漸次導入シツツ議論ヲススメル。

Lemma 1 (i) 條件 I—II ノモトニ於テ

$f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ ノ、 ℓ = 關スル Cauchy series

ヲ

$$(b) \quad f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}.$$

トアラハストキ⁽³⁾、次ノ関係が成立スル。

$$(i) \quad (1 - \pi\sqrt{D}) \sum |a_n|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

$$\leq (1 + \pi\sqrt{D}) \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

$$(ii) \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \text{ ナル任意ノ sequence} = \text{對シテ}$$

$$\sum a_n e^{i\lambda_n x}; \quad \sum a_n e^{-i\lambda_n x}$$

ハ夫々 $L^2(0, 2\pi)$, $L^2(-2\pi, 0)$ = 属スル函数 = in the mean r converge スル。

証明ノ方針: 條件 I ノモトニ於テハ $\{e^{i\lambda_n x}\}$ = 對スル Biorthogonal function-set $\{g_n(x)\}$ が定義サレル。他方條件 I, II ナミタスマウナ $\{e^{i\lambda_n x}\}$ = 關シテハ、Non-harmonic series⁽⁵⁾ = 展開サレル。

Cauchy 展開ト、コノ展開トハ條件 I—II ノモトデハ同ジ。展開ヲ意味スルコトガワカル。關係 (i) ハ Non-harmonic series⁽⁴⁾ = ツイテ Wiener ノ証明シタトコロデアル、(i) ナル關係カラ、(ii) ハ容易ニ導ケル。

Lemma 1 = ヨリ、次ノコトガ成カル。 $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$

(3) 條件 I ノモトデハ、 $\{S_{C_n}(x, f)\}$ が $\{C_n\}$ ナ適當ニトリキコシタ形ニナルコトハアキラカ。

(4) Wiener-Paley: Fourier transforms in the complex domain. Am. Math. Coll. pp 100—113 ナミラレタシ。

ヲ任意ニ取ルベキ、 $\sum a_n e^{i\lambda_n x}$ ヲ f , Cauchy 展開
トスルベキ

$$\sum_{-N}^N a_n e^{-i\lambda_n x} \quad (N=1, 2, 3, \dots)$$

ハ in the mean ナル $f_*(x) \in L^2(-2\pi, 0) =$
converge スルカラ

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & [0 \leq x \leq 2\pi] \\ f_*(x) & [-2\pi \leq x < 0] \end{cases}$$

ニヨリ、 $f_1(x) \in L^2(-2\pi, 2\pi)$ ヲ define スルコト
が出来ル。

§3. Cauchy series / Parseval 関係

Lemma 2 $f(x), g(x)$ ヲ $L^2(0, 2\pi)$ へ属ス
ル任意ノ二ツノ elements トスル。 l = 関スル Cauchy
級数ヲ

$$(8) \quad \begin{aligned} f(x) &\sim \sum a_n e^{i\lambda_n x} \\ g(x) &\sim \sum b_n e^{i\lambda_n x} \end{aligned}$$

トスル。 §2 / 終リテ述べタ方法ヲ、 $f(x), g(x)$ へ対シテ、
 $L^2(-2\pi, 2\pi)$ へ属スル $f_1(x), g_1(x)$ ヲ夫々 define
スル。

シカルトキ

$$(9) \quad (f, g) \equiv l_\xi \left\{ \int_0^\xi f_1(\eta) \overline{g_1(\eta - \xi)} d\eta \right\}$$

ヲ以テ define スルナラバ

$$(10) \quad (f, g) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k b_k G'(i\lambda_k)$$

トナル。(但シ、條件 I, II を假定シテノ話デアル)

証明ノ方針: 今假リ =

$$g_{(n)}(x) = \sum_{k=-n}^n b_k e^{i\lambda_k x}$$

トオク。

簡單ナ計算ノ示ス如ク

$$L_{\xi} \left\{ \int_0^{\xi} f_1(\eta) \overline{g_{(n)}(\eta - \xi)} d\eta \right\} = \sum_{k=-n}^n a_k \overline{b_k} G'(i\lambda_k)$$

他方ニ於テ

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\xi} f_1(\eta) \overline{g_1(\eta - \xi)} d\eta - \int_0^{\xi} f_1(\eta) \overline{g_{(n)}(\eta - \xi)} d\eta \right| \\ & \leq \sqrt{\int_{-2\pi}^{2\pi} |f_1(\eta)|^2 d\eta} \cdot \sqrt{\int_{-2\pi}^{2\pi} |g_1(\eta) - g_{(n)}(\eta)|^2 d\eta} \end{aligned}$$

デアアル。Lemma 1 = ヲリ。 $\{g_{(n)}(\xi)\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) ----- $g(\xi) =$ in the mean ⁽⁵⁾ converge スルカラシテ

$$\left\{ \int_0^{\xi} f_1(\eta) \overline{g_{(n)}(\eta - \xi)} d\eta \right\} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(5) $g_1(\xi)$ ト $g_{(1)}(\xi) \equiv \sum_k b_k e^{i\lambda_k x}$ トヲ混同シナイデモラヒタイ。以下 $\{k_n(x)\}$ が $k(x) =$ in the mean converge スルトイフノハ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |k_n(x) - k(x)|^2 dx = 0$$

ノ意味デアアル。

ハ ξ ノ 函数トシテ $[0, 2\pi]$ ガ一様 =

$$\int_0^\xi f_1(\eta) \overline{g_1(\eta - \xi)} d\eta$$

= converge スル。 $g(\eta)$ ハ bounded variation
 ガカラ、 $L_1(C)$ デ bounded + functional. ガカラ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_\xi \left\{ \int_0^\xi f_1(\eta) \overline{g_{(n)}(\eta - \xi)} d\eta \right\} = (f, g)$$

トナル。

Lemma 3 (f, g) = 依ッテ define シタ bilinear

form ハ 次ノ性質ヲモツ。

(1°) $(af, g) = a(f, g)$ 茲 = a ハ 任意ノ complex
 number;

(2°) $(f+g, h) = (f, h) + (g, h)$;

(3°) $(f, g) = \overline{(g, f)}$ (以上 = 關シテハ 條件 I - II ノ 假
 定ノモトデアル)。

(4°) 條件 III ヲ加ヘレバ, (モットヨク $G'(i\lambda_n)$ ガスベテ
 ノ 整数 n = 對シテ 正デモヨイ), $f \neq 0$ 又ハ $f = 0$ カラ
 夫々 $(f, f) > 0$ 又ハ $(f, f) = 0$ ヲ得ル。

証明ハ Lemma 2 ノ (10) ノ 式カラ明ラカ。吾々ハ
 $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ ノ Cauchy series (6) = 關シテハ

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 G'(i\lambda_k) < \infty \text{ トイフコトヲ知ツタ。然ルニ逆ニ、}$$

Lemma 4

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 G'(i\lambda_k) < \infty \text{ ナル如キ 任意ノ } \{a_k\} (k=0, \pm 1,$$

$\pm 2, \dots$) = 對シテ、コレヲ *Cauchy* 展開ノ係數トスル
如キ $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ が必ず存在スル。(條件 I, II, III ノ
モトヲ。) シカモ、 $f(x)$ ハタエーツ=決マル。

証明: 條件 III カラ $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ が follow スル。

從ツテ、*Lemma 1* = ヨリ、($N_1 > N$ ト假リ=スル)

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{-N}^{-N_1} a_k e^{i\lambda_k x} - \sum_{-N_1}^{N_1} a_k e^{i\lambda_k x} \right|^2 dx \\ \leq (1 + \sqrt{D}\pi) \left(\sum_{-N_1}^{-N} |a_n|^2 + \sum_N^{N_1} |a_n|^2 \right)$$

トナルカラ $\left\{ \sum_{-N}^N a_k e^{i\lambda_k x} \right\}$ ハ *in the mean* $\Rightarrow$

$f(x) \in L^2(0, 2\pi) = \text{tend}$ スル: $f(x) \sim \sum a_k e^{i\lambda_k x}$
トナルコトハ明テカ。

以上ヲ綜合スレバ、次ノ結果ヲ得ル。

定理 I $\varphi(\xi)$ ヲバ、 $(0, 2\pi)$ = 於テノ有界変分ノ函數
トスル。

$$G(\lambda) \equiv \mathcal{L}_{\xi} \{ e^{\lambda \xi} \} \equiv \int_0^{2\pi} e^{\lambda \xi} d\varphi(\xi)$$

ハ條件 I, II, III ヲ悉クミタストスル。

然ルトキ=ハ、 $L^2(0, 2\pi)$ 空間=於テ、内積ヲバ

Lemma 3 , (9) = ヲツテ define スルコト=ヨリ、

$L^2(0, 2\pi)$ ハーツノ Hilbert space = ナル⁽⁶⁾

(脚註. 次頁へ)

§ 4. 微分演算ニ附随スル symmetric transformations

$\mathcal{D}^* = \{ f(x) = C + \int_0^x g(\xi) d\xi \text{ ノ形デアラハサレル } f(x) \in L^2(0, 2\pi) \text{ ノ全体 (但シ, } C \text{ ハ任意ノ complex number, } g \text{ ハ } L^2(0, 2\pi) \text{ ノ任意ノ element) } \}$

$\mathcal{D} = \left\{ f(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi \text{ ノ形デアラハサレル } f(x) \in L^2(0, 2\pi) \text{ ノ全体 (但シ } g(\xi) \text{ ハ } L^2(0, 2\pi) \text{ = 属シ, } \int_0^\xi g(\xi) d\xi = 0 \text{ ナルモトス)} \right\}$

$\mathcal{D}(\theta) = \{ 0 \leq \theta < 2\pi \text{ = 対シ } \int_0^\xi e^{i\theta\xi} f(\xi) d\xi = 0 \text{ ヲ満足スル } f(x) \in L^2(0, 2\pi) \text{ ノ全体} \}$

$H, H(\theta), T, \text{ 夫ヲ, } \mathcal{D}, \mathcal{D}(\theta), \mathcal{D}^* \text{ ヲ domain トシ, 各ノ domain = 属スル } f(x) \text{ ヲ } f'(x)/i = \text{transform スルモトスル。}$

然ルトキ次ノコトガ云ヘル。

定理 II 定理 I デ定義シタ Hilbert space = 於テ

- (6) 何故ニ、 $L^2(0, 2\pi)$ カラ、 $L^2(-2\pi, 2\pi)$ マデ函数ヲ prolongate シテ考ヘル必要ガアルカトイヘバ、(4) オミテレルヌウニ、integrand ノウチノ $g(\xi)$ 一関シテハ $-2\pi \leq \xi \leq 2\pi$ = 及バネバナラヌカラデアアル。
- $f(\xi)$ ニ関シテハ、ソノ必要ナク $(0, 2\pi)$ デ define サレテキレバヨイ。 $f(\xi)$ ヲモ $L^2(-2\pi, 2\pi)$ = マデ拡張ルノハ單ニ symmetry ノタメニスギナ。

$H, H(\theta), T$ ハ 次ノ性質ヲ有スル。

(i) H ハ, closed linear symmetric transf.
 $\Rightarrow$ ヲノ adjoint $H^* \equiv T$ ナリ。且 ツ H ノ deficiency-index ハ $(1, 1)$ ナル。各 $H(\theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$ ノ θ 毎 $\theta = 2\pi$ 迄) ハ皆、 H ノ self-adjoint extension.

(ii) $H(\theta)$ ハ simple point spectrum ナル
 ツ、 λ ノ characteristic values ハ $\lambda_n = \theta$
 ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ナリ、characteristic functions ハ $\{e^{i(\lambda_n - \theta)x}\}$ ナル。

コレハ、Stone ノ書、Theorem 10.7、拡張 = ナル。即チ

$$\begin{aligned} g(\xi) &= -\frac{1}{2} \quad [\xi = 0] \\ &= 0 \quad [0 < \xi < 2\pi] \\ &= \frac{1}{2} \quad [\xi = 2\pi] \end{aligned}$$

ニトツタ特別ノ場合 = 相當スル。(但シ Stone ノ θ ハ區間ハ (a, b) トシテアルガ $(0, 2\pi)$ トスルモ本質的ナ相違ハナシ)。

コノ定理ノ証明ハ Stone ノヲソノマ、用ヒラレル。

コノ = 次ノ如キ關係

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \left\{ \int_0^\xi \frac{f'(\eta)}{i} \overline{g(\eta - \xi)} d\eta \right\} &= \frac{\overline{g(0)}}{i} \mathcal{L}_\xi \{ f(\xi) \} \\ &\quad - \frac{f(0)}{i} \mathcal{L}_\xi \{ \overline{g(-\xi)} \} - \mathcal{L}_\xi \left\{ \int_0^\xi f(\eta) \frac{\overline{g'(\eta - \xi)}}{i} d\eta \right\}. \end{aligned}$$

ノ成立スルコトが、コウシタ *Analogy* ヲ述ルコトヲ許
ス原因トナツテキルコトヲ注意セラレタイ。

§ 附言 以上ニヨリ、§ 1 デ述ベタコトハ御報告申上
ゲタ。

Theorem II ヲ應用シテ *translatable opera-*
tion / operational calculus ヲツクルコトハ
別ノ機会ニ譲リ、茲ニニツノ問題ハ未解決ナルコトヲ申述
ベタイ。諸賢ノ御教示ヲオ願ヒスル次第デス。

問題 I. 今一級ニ *integral function* $G(\lambda)$
ガマツタトシテ、ソレガ條件 I, II (前出) ヲ満足レテキ
タトスル。ソウシタナラバ、 $(0, 2\pi)$ デ有界変分ノ適當ナ函
数 $\varphi(\xi)$ ガ存在シテ

$$G(\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{\lambda \xi} d\varphi(\xi)$$

トナルデアロウカ? (多分條件 I, II ダケデハ足リナイ様ニ
モ思フ。然ラバ、如何ナル條件ヲ加ヘケラヨイカ) コノ問題
ハ解決サレルト *Non-harmonic Fourier series*
ト *Cauchy series* トノ関係ガ明朗ニナル。御協力ヲ
得タイト思フ。

問題 II コノ報告ヲ導入シタ *inner product*
ハ考ヘル *operation* ガ微分演算ガカラ特別都合ガヨカ
ツタ、(微分演算ト可換ナル *operator* デモ都合ガヨ
イ) シカシ、*Multiplication* ガ入ツテクルト、モ
ウ極メテ不便ナル。普通ノ *inner product* デアル

ト

$$\int_a^b r(t) f(t) \overline{g(t)} dt = \int_a^b f(t) \overline{r(t) g(t)} dt$$

トナルカラ、multiplication $M f(t) = r(t) f(t)$
ハ inner product = 関シテ簡單ナ性質ヲモツ、
シカレ、新シイ inner product = 関シテハ上ノ如
ク簡明デナイ。ソレデ、吾々ノ考ヘタモノハ微分演算等 = ノ
ミ都合ノヨイモノデシカナイ。

$$L(y) \equiv \sum_{\nu=0}^N p_{\nu}(x) y^{(\nu)}(x) \text{ が與ヘラレ、又境界條件}$$

L が與ヘラレタトキ、コノ operation L ト functional l ト =, 両者 = 關係シテ inner product ヲ
新ニ考ヘル必要ガアルデアロウト思ハレル。コウシタ問題 =
興味ヲモタレル方ノ御教示ヲ希望シマス。