



Title	數學ノ新基礎付ケニツイテ
Author(s)	内田, 良道
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 154, p. 93-108
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74611
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

685. 數學ノ新基礎付ケニツイテ

内 田 良 道 (淡水中學)

第 一 章

「實數ハ非可附添集合ヲ作ル」ト云フ Cantor 証明法
= 對スル 疑義ニツキテ並ニ Cantor 証明法ノ意味ス
ル処ニツキテ。

Cantor 証明法が不都合ナリト云へバ時代錯誤モ甚ク
シトイフ御叱リヲ受ケタコトモアリマスガ。Cantor 証
明法及ヒソレが正シト云ハレル方々ノ御意見ヲ充分考ヘマシ
タカ理解出来兼ネル息ガアリマス。

尚 Cantor の証明法ノ不充分ナコトハ Skolem ナドモ指摘シテ居ルコトデスシ、種々考ヘテ結果次ノヤウニ述ベテラ宜敷カラウト考ヘマシタ、事柄ハ甚カ簡單ナコトデスカラ理論ノ正否ハ直チニ明瞭ニナルト思ハレマスカラ御一読ノ上理論ノ缺陷アレバ御教示ヲ願ヘレバ幸デス。

1. Cantor 証明法ハ次ナリ. (Hobson: 變換函数論第一卷 82 頁)

「今 $(0, 1)$ 間、實數が

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= 0. a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots\dots\dots \\ w_2 &= 0. a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ \dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ w_n &= 0. a_{n1} \ a_{n2} \ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ト可附番集合ヲ作りシトセヨ。

然ラベ $a_{ii} \neq p_{ii}$ ($i=1, 2, 3, 4, \dots$)ヲ満足スル
 $p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots$ ヲ取リ (但シ $p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots$ ハ皆
 $1, 2, 3, 4, \dots, 9$ マデノ中ノ何レカノ数ヲ表ハストス)
 コレヨリ

$$\omega = 0. \quad p_{11} \quad p_{22} \quad p_{33} \quad \dots \quad (2)$$

ヲ作レバ ω ハ 1 ツノ実数ニシテ $(0, 1)$ ノ間ニアリ、且ツ

(1)ノ何レトモ一致セズ、故ニ實數ハ可附番集合ヲ作り得サルモノナリ」

ト主張スルナリ。

問題ノ要點ハ「 ω ハ果シテ數ナリヤ」ニアリ。今之レヲ考究スルニ $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ ハ何ヲ意味スルヤト云フニ「具体的ニハ何ナルヤ不明ナルガ、實數全体ガ兎ニ角 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ ト並べ得タトセヨ」ト云フ意ニシテ「具体的ニ $\omega_1 = \sqrt{2} - 1, \omega_2 = \sqrt{3} - 1, \dots$ 等ト並べ得タ」モノナラズ。故ニ

$$\omega_1 = 0. a_{11} a_{12} a_{13} \dots$$

ト書キシ意味ハ「モシ $\omega_1 = \sqrt{2} - 1$ ナレバ $a_{11} = 4, a_{12} = 1, \dots$ 」又「若シ ω_1 が $\sqrt{3} - 1$ ナレバ $a_{11} = 7, a_{12} = 3, \dots$ 」ニナル」云々トイフ意味ニシテ、 ω_1 が「具体的ニ吾人ニ知ラレシトキハ必ず無限小数ニヨリテ表ハシ得ル」ト云フニ過ヤズ。

$\omega_1, \omega_2, \dots$ 如上ノ如キ意味ニ過ヤサル故、從ツテ各 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$ 等ハ「 $\omega_1, \omega_2, \dots$ が具体的ニ定マレバ夫々確定スル」ト云フ意味ナリ。從ツテ各 $p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots$ モ結局ハ「0, 1, 2, ..., 9」マデノ何レカノ者トナルト云フニ過ヤズ。

論ヨリ證據「 p_{11} ハ何ト確定スルヤ」ト問カレタルトキハ「1, 2, 3, ..., 9」ノ何レカナリト答フルヨリ致シ方ナシ、即チカゝル意味デノ確定ナリ。斯ク考フレバ $p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots$ ハ眞ノ意味ノ確定セルモノナラズ。然ラバ斯カル $p_{11},$

$p_{22}, p_{33}, \dots$ を用いて作れる

$0, p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots$

が級数を作ると考へ得られる。カト云フ = 然らず。 $0, p_{11}, p_{22}, \dots$ が級数を作ると $x = 0$ 各 $p_{11}, p_{22}, \dots$ は *wohl bestimmte Zahl* となるコトが必要ナリ (級数ノ定義)。上ノ場合ハコノ條件ヲ満足セザル故不可ナリ。(尚、カ>ル場合 = $0, p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots$ が数ヲ表ハストスレバ循環論ニナルコトハ容易ニ証明シ得!!)。

又假リ = $0, p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots$ が級数を作ルトシテモ $p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots$ が不明ナレバ $S_n = 0, p_{11}, p_{22}, \dots, p_{nn}$ が不明ニシテ從テ収斂條件

$$|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$$

ハ意味ヲ持タズナリ!!

猶テ $0, p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots$ ハ級数ヲ作ラヌナラ、コレが数ヲ定メルト云フノハ何ヲ根據トスルカ。ムシロ数ヲ定メヌト考ヘル方が正当ナリ (今迄ノ数ノ處デハ)。即チ ω ハ数ナラズ、故ニ ω が実数中ニアリヌハ無シト云フコトハ意味ナシ。

從ツテ Cantor ノ断定ハ不都合ナリ、Cantor 証明ハ排中律ノ濫用ニテ排中律ノ成立スル場合デモ不當ナル結論ナリ。(ト云ヘバ吾人ハ如何ニテ排中律ヲ絶体ニ否定スルヤウデスが然ラズ。吾人が排中律ヲ使用スルト危険ダト云フノハ「現在ノ数組織ヲ以テシテハ排中律ハ使用出来スト云フナリ。」 ユノ意味ニテ Brouwer ノ理論ハ正シト考ヘテ

居ります。

然し、實際ハ排中律ハ必要ト考ヘラレル故、吾人ハ数ノ組織
(超限数ノ)ヲ変ジテ排中律ヲ使用シウルコトヲ示サントス
ルナリ。絶体ノ否定ハセズ、其ノ方法ヲ以テスレバ使用シ得
ルコトヲ主張スルモノナリ、一古附加シテ置キマス)。

(注意1)

上ヨリ考ヘテ実数が $\omega_1, \omega_2, \dots$ ト可附番集合ヲ作ツタ
トシテモ (各 $\omega_i (i=1, 2, \dots)$ が吾人ニヨリ確定セシ
ノラレストキニハ) 何等ノ不都合ナキコトヲ知リウ。

唯吾人、力ニヨリ明確ニ $\sqrt{2}-1, \sqrt{3}-1, \dots$ 等ト並ベエ
ラレザルコトハ確カナリ。(即本質的ニ可番集合ヲ作ルト
モ具体的ニ並ベエテルコトハ実行上ハ不可能ナリ。)

(注意2)

Cantorノ証明法ニハ欠陥アリト考ヘラレマスが然シ
Cantorノ証明法カラハ次ノ重要ノ決論が出マス。

若シ無理数が(実数ト無理数トハ同ジ濃度ナル故実数ノ
可附番性ヲ証スルニハ無理数ノ可附番集合ヲ作ルコトヲ
証セバ可ナリ)可番集合ヲ作ルトシテモ「各無理数 $\beta_1,$
 $\beta_2, \dots$ ニハ明瞭ニ定ツタ有理数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ が夫
々(1.1) 對應スルコトヲ示スコトハ不可能ナリ(之レ
ハ常ニ要求セラルルコトヲ、斯カル証明ヲナサザレバ不
可ナリト要求サレマシタ)。

何トナレバ「モシ各 $\beta_1, \beta_2, \dots$ ニ對シ夫々明瞭ニ定マ
ツタ有理数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ が(1.1) 對應スルコト

ヲ証スル=ハ、無理数ノ全集合中ヨリ指定サレタ有理数 $a_1, a_2, \dots$ = 対シ夫々対応者 $\beta_1, \beta_2, \dots$ カ選出シ得ラルルコトヲ示サザルベカラズ。」

コノコトハ結局「吾人ノ力=ヨリ各 $a_1, a_2, \dots$ = 対スル $\beta_1, \beta_2, \dots$ カ具体的=選出シ得ルコトヲ示スコトナリ」, 結局=於テ吾人ノ力=ヨリテ無理数ヲ例ヘバ $\sqrt{2}-1, \sqrt{3}-1, \dots$ 等ト並ビ得ン事トナリ。(注意1及ビ3)=ヨリ不可能ナル故ナリ。

故=無理数が可附番集合ヲ作ルコトヲ証スル=ハ(実数ノ時モ同シナリ)。

(i) 各 β_i ノ對者 a_i ハ對應ノ各階段=於テ変動スルコトヲ要スルナリ。但シ各對應ノ各階段=於テハ必ズ各 β_i = 対シ夫々一定ノ有理数 a_i が對シ、極限=於テモ必ズ或ル有理数 $\bar{a}_i$ が對スルモノナルコトヲ示サザル可ラズ。

(ii) 又ハ間接ノ証明法ヲ取ラザルベカラズ、即チ各 β_i =ハ夫々一定ノ有理数 a_i が對スルト云フ形式ヲ取ラズ=「或ル可附番集合ト無理数ノ集合トが(1.1)對應ヲナスベキモノ」ナルコトヲ示スヨリ致シ方ナシ。

(i)ハ次章ノ定理2ノ証明形式=テ(ii)ハ次章ノ定理1ノ証明形式ナリ。

ユノ注意ヲ與ヘテ次ノ定理1及定理2ヲ証セン。

(注意3) 尚此處=テ次ノ注意ヲナシ置クハ必要ト思ハレマス。

(1) モシ実数が實際非可附番集合ヲ作ルモノナラ $\omega_1, \omega_2,$

-----ト並べ上げられナイモノナリ故。 $\omega_1, \omega_2, \dots$ ト並べ上げクト考フル、ハーツノ假定ナル故各 $\omega_1, \omega_2, \dots$ ハ全ク不明ノモノナリ。従ツテ各 $p_{11}, p_{22}, \dots$ ハ不定トナリ 其ノ結果 $0, p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots$ ハ数ヲ定メヌコトトナ *Cantor* 証明法ハ成立セヌナリ。

- (4) モシ又、実数が實際可附番集合ヲ作ルモノナラ $\omega_1, \omega_2, \dots$ ト並べ上げられテ宜シキモノ故 $0, p_{11}, p_{22}, p_{33}, \dots$ ハ数トナルコトハ有り得ナルナリ (コレハ数トナレバ ω ハ数トナリ、 $\omega_1, \omega_2, \dots$ 中ニナキ数 ω ガアルコトトナリ、実数が $\omega_1, \omega_2, \dots$ ト並べシルコトが出来ナクナル故ナリ)。

即チコノ時ニ $\omega_1, \omega_2, \dots$ ハ吾人ニハ全然知り得ヌモノナリ!!

コレ (注意2) ノ所論ト一致ス。且ツ *Cantor* 証明ハ成立セヌナリ。

結局、実数が非可附番集合ヲ作ルモノ亦ハ可附番集合ヲ作ルトシテ、何レニシテモ *Cantor* 証明法ハ失敗トナルナリ。

第二章

コノ章ニテハ $(0, 1)$ 間ノ実数ハ可附番集合ヲ作ルモノナルコトヲ証セントス。ニツノ証明法ヲ映フ。(他ニモマダ証明法ハアリ)

(定理1)

$(0, 1)$ 間ノ實数ハ可附番集合ヲ作ル。

(証明)

Dedekind = ヨレバ無理数ハ有理数解ノ切断ニヨリ定義シウルナリ。即チ β フーツノ無理数トスレバ

$$\beta = (A/B) \text{-----} (1)$$

トシテ定メウルナリ。

但シ A, B ハ共ニ有理数ノミヨリナル集合ニシテ A ニハ最大者ナク、 B ニハ最小者ナシ。

逆ニ A (又ハ B) フ映フレバ β ハ確定スル故、無理数ノ集合ハ A ノ作ル集合ト (1.) 對窓ヲナスベシ。故ニ無理数ノ集合 N ガ可附番ナルコトヲ証スルニハ A ノ作ル集合ガ可附番ナルコトヲ示セバ可ナリ。次ニ帰謬法ヲ用ヒテ証セン。

今 N ガ非可附番集合ヲ作レトセヨ。然ラバ A ノ作ル集合 Q モ亦非可附番集合ヲ作ルナリ。

然ルニ A ノ作ル集合ハ (0.1) 間ノ有理数ヲ大サノ順其ノマヽニテ數ヘ上ゲテ作リシ集合 P ト同濃度又ハコレ以下ノ濃度ナリ。

「 $\therefore$ 有理数ヲ大サノ順ニ數ヘ上ゲルコトハ各 A ノ元素フーツーツ數ヘ上ゲヌコトトナリ、明カニ各 A フ一單位ト考ヘテ作リシ集合 Q ヨリ (即チ $Q = (A_1, A_2, A_3, \text{-----})$ ナリ) 小ナル濃度トナルコト能ハズ、故ニ P ハ Q ヨリ大カ又ハ同濃度ノモノナリ。」

故ニ P ハ又非可附番集合ヲ作ルナリ。

然ルニ一方ヨリ考フレバ P ハ有理数ノミヲ元素トスル集合ナル故、明カニ可附番集合ヲ作ル。之レ上述ノコトト矛盾

ス。之レ即チ $\mathbb{N}$ が非可附番集合ヲ作ルコトノ不可ナルコトヲ示スナリ。即チ全無理数ヨリ作ラレシ集合 $\mathbb{N}$ は可附番集合ヲ作ルベシ。

Q. E. D.

(注意 I)

勿論有理数ヲ大サノ順ソノマデニ数へ上ゲルコトハ実行ハ不可能ナルガ、假リニ有理数ヲ大サノ順其ノマデニシテ数へ上ゲタトキニハ可附番集合ト考フベキカ又ハ非可附番集合ト考フベキカト質問サレシトキハ如何ニ答フベキカ。コノトキハ「可附番集合ヲ作ルト考フベキナリ」ト答フルヨリ致シ方ナカルベシ。

何トナレバ有理数ハ可附番集合ヲ作ルモノナリ。然ラバ之レヲ如何ナル順ニ数へ上ゲテモ常ニ可附番集合ヲ作ルベキモノナリ (集合論ノ基本定理!!)。故ニ上ノ如キ結果トナルナリ。

同一ノ集合ガ数へ方ニヨリ可附番集合トナリタリ、非可附番集合トナルトセバ何モ可附番集合ト非可附番集合ハ性質ノ全然異ナルモノナリト云フ必要ハ認メラレザルナリ。

(注意 2)

無理数が可附番集合ヲ作ルト云ハバ「可附番集合ハ自然数ト (1.1) 對應ヲナスモノナル故無理数が可附番集合ヲ作ルトイフナラ、自然数ト (1.1) 對應ヲナスコトヲ示セ」ト云フ要求アルヤモ知レズ。之レノ答ハ次ナリ。

間接証明法ヲ用ヒテ何故不可ナルヤ。何ンデモ皆直接証

明法ヲ取ル必要ハナキ答ナリ。証明ノシ易キ方法ニテ証明シテ充ルヲ為フ。

特ニユノ場合ニハ「無理数ガ「タトイ可附番集合ヲ作ルトモ」吾人ノ力ニテ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ ト並べ上ケルコトハ不可ナルコトハ第一章ノ(注意 2, 3) 中ニ述べオケル答ナリ。』

従ツテ直接ニカ、ルコトヲ証スルハ困難ニテ、カ、ル証明ヲ用フル必要ナキト思惟スルガ、是非必要トノコトナレバ次ノ如クシテ証明セシ。 (第一章注意 2 参照)

(定理 2)

$(0, 1)$ 間ノ無理数ハ、モシ「 $1, 2, 3, 4, \dots \rightarrow \omega$ 又ハ $1, 2, 3, 4, \dots \rightarrow \omega$ 」ヲ假定スレバ「可附番集合ヲ作ル、

(証明) N ヲ全無理数ノ集合、 R ヲ有理数ノ集合トス。

$(0, 1)$ 間ノ任意ノ無理数 β_i ハ常ニ無限小数ニテ表ハシ得、且ツ唯一種ノ方法アルノミナルコトハ吾人同知ノコトナリ。コレヲ基礎トシテ理論ヲ進メシ。

今、 $0, b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, \dots \rightarrow \beta_i$ ナリシトセヨ。
コノトキ便宜上、コレヲ

$$(b_{ik})_{k \rightarrow \omega} \rightarrow \beta_i \text{ ----- (1)}$$

ト表ハスコトトス。

吾人ハ次ノ規則ヲ定メ、有理数ト無理数トヲ對應セシム。

(I) $\beta_i =$ ハ有理数 b_{i1} ヲ對サシム。(即チ $0, b_{i1}$ ヲ $\beta_i =$ 對スルナリ。)

(II) 若シ上ノ方法ニテ b_{i1} が既ニ他ノ無理数 β_1 = 對應セシメラレシ後ナレバ (又ハ b_{i1} β_1 = 對スル必要アリシ時ニハ) 新ニ b_{i2} ヲシテ β_i = 對サシム。(即チ $0 \cdot b_{i1} b_{i2}$ ヲシテ β_i = 對サシムルナリ)。

(III) 若シ上ノ方法ニテ $b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, \dots, b_{ik}$ 迄が既ニ他ノ無理数 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ = 對應セシメラレシ後ナレバ (又ハ新ニカクスル必要アルナレバ) 新ニ $b_{i(k+1)}$ ヲシテ β_i = 對サシム。(即チ $0 \cdot b_{i1} \dots b_{ik} b_{i(k+1)}$ ヲシテ β_i = 對サスナリ)

(IV) モシ $b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, \dots$ ノスベテが他ノ無理数群 ($\beta_1, \beta_2, \dots$) = 對應セシメラレシ後ナレバ (又ハ新ニカク對應セシメル必要アリシトキハ) ^{スラ}ノツヅクツテ β_i = ハ b_{i1} β_1 對セシメ ($\beta_1, \beta_2, \dots$) = ハ夫々 $b_{i2}, b_{i3}, \dots$ ヲ對應セシム。(即チ β_i = ハ $0 \cdot b_{i1}$ β_1 = ハ $0 \cdot b_{i1} b_{i2}$, β_2 = ハ $0 \cdot b_{i1} b_{i2} b_{i3}, \dots$ 以下同様ニ對サシムルナリ)

$$\begin{array}{ccccccc} \text{即チ} & \beta_i & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ & b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & b_{i4} & \dots & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccccccc} \beta_i & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & b_{i4} & \dots \end{array}} \right\} \dots (2)$$

ト對サシム。(但シ b_{il} ハ $0 \cdot b_{i1} b_{i2} \dots b_{il}$, コトナリ、以下同様トス)。

今、上ノ方法ニヨリテ $N_i = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ ナル一群ノ無理数ニ對シ夫々一群ノ有理数群 ($a_1, a_2, \dots$) が對セシトセヨ。

$\kappa = n_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots)$ 且ツ $(\beta_{1k})_{k \rightarrow \omega} \rightarrow \beta$
 + ル他ノ一群ノ無理数群ヲ附加スルモ有理数ノ集合 $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ ヲ適當ニ取ルコトニヨリ、 $N_1 + n_1 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{11}, \beta_{12}, \dots)$ + ル無理数群ノ各元素 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots)$ 及ビ $(\beta_{11}, \beta_{12}, \dots)$ ト $(c_1, c_2, c_3, c_4, \dots)$ トヲシテ (1.1) 對應ヲサシメウルトリ。其ノ証明次ノ如シ。(コレヲ規則 (V) トス)

(証明)

今無理数ノ集合ヲ N トス。 N ノ部分集合 N_1 迄ハ有理数ト (1.1) 對應ヲサセシトセヨ。即チ

$$\left. \begin{array}{cccc} \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_1, & a_2, & a_3, & \dots \end{array} \right\} \dots (3)$$

+ リシトセヨ。 $\kappa = n_1 = (\beta_{11}, \beta_{12}, \dots)$ (ω -type) +
 , 予 $(\beta_{1i}) \rightarrow \beta$ トス) ヲ附加スルト (I), (II), (III), (IV) =ヨリ

$$\left. \begin{array}{ccccccc} \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \dots & \beta_{11}, & \beta_{12}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & a_{11} & a_{21} & \\ & & & & a_{12} & a_{22} & \\ & & & & \vdots & \vdots & \\ & & & & \downarrow & \downarrow & \\ \underline{a}_1, & \underline{a}_2, & \underline{a}_3, & \dots & \underline{a}_1, & \underline{a}_2, & \dots \end{array} \right\} \dots (4)$$

ト對サシメ得。

「 $\therefore \beta_1$ ハ初メ a_1 = 對セシガ n_1 ノ導入ニヨリ (I), (II), (III), (IV) , 規則ニ從ツテ順次 = $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$ = 對セシトセバ sequence (a_{1i}) ハ單調増加数列ナル故ニ

ツノ極限 $\overline{a}_i$ ヲ決定ス。ユノトキ「 n_i ノ導入ニヨリ β_i ハ $\overline{a}_i$ ニ對スルモノ」ト定ム。 $\beta_2, \beta_3, \dots$ 等ニ對シテモ同様ノコトが成立スル故 (4) ヲ得ルナリ」

次ニ (4) ノ $(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots), (\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots)$ ノ中ニハ同ジモノモアリ、又無理數トナルモノモアルベシ。但シ無理數ノトキハ皆同一ノ無理數 β トナルナリ。他ノ無理數ノ起ルコトナシ。ユノトキニツノ場合 (a), (b) = 今チテ考フ。

(a) 無理數 β ノ表ハレシ場合ヲトルトス。

$$\left. \begin{array}{l} \text{コノ時 } \beta = \text{對スル無理數群ヲ } (\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \overline{\beta}_3, \dots) \\ \text{同じ } \overline{a}_1 = \text{對スル } \quad \quad (\overline{\beta}_{11}, \overline{\beta}_{12}, \dots) \\ \text{同じ } \overline{a}_2 = \text{對スル } \quad \quad (\overline{\beta}_{21}, \overline{\beta}_{22}, \dots) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \quad (5)$$

トセヨ。

斯ク β 及ビ $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots$ = 對スルモノガ多數アリシトセヨ。

又 $0, b_1, b_2, b_3, \dots \longrightarrow \beta$ トリシトセヨ。

然ラバ凡テ $(\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \dots), (\overline{\beta}_{11}, \overline{\beta}_{12}, \dots), (\overline{\beta}_{21}, \overline{\beta}_{22}, \dots), \dots$

ヲシテ $(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \dots, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, 0, b_1, b_2, b_3, \dots) = (1, 1)$ 對應ヲナサシメ得。

($\because n_i$ ノ元素ノタメ移動スル數ノ個數ハ最大限可附番集合ヲ作ルノミナル故ナリ)。

斯クシテ N_i 及ビ n_i ノ凡テノ元素及ビ β ヲシテ夫々相異ナルーツノ且ツ唯一ツノ有理數 $(e_1, e_2, e_3, \dots)$

附番集合ヲ作ルモノノミナル故、(1.1) 對應ハ可能ナリ))

(其他ノモノハ皆其ノマデ對應セルナリ)

即チ (b) ノ時モ (a) ト同様ニナルナリ。

斯クシテ (a), (b) ノ何レノ場合ニテモ常ニ $(N_1 + n_1)$ ノ無理数集合ト有理数ノ集合トヲシテ (1.1) 對應ヲナサシメ得ルナリ。 (p.e.d.)

コノ性質ヲ $(\forall)$ ト名ツク。

之等ノ規則 (I), (II), (III), (IV), (V) ニヨリ無理数ノ集合 N ト有理数ノ集合 R トハ (1.1) 對應ヲナサシメウルコトヲ証シ得。

(帰謬法ヲ用フ)

(証)

N が非可附番集合ナリシトセヨ。

今 R ノ元素ハ皆完全排列集合 (*wohl geordnete Menge*) ニ排列シウル故 R ヲ出来得ル限り多クノ「無限部分集合」ニ分割シテ逐次完全排列集合ヲ作り行ケバ極限ハ $\rightarrow \Omega$ トナル (Ω ハ第二 *class* ノ超限数ナリ)

從ツテ R ヲ如何ニ「無限部分集合」ニ分解スルモ N 中ニハ之レト對應セズニ残ル元素ヲ有ス。コノ一ツヲ γ トセヨ、然ラバ γ ハ今迄ノ無理数 (即チ有理数ト對應セル無理数) 中ニハナキ故必ず又 $(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots \rightarrow \gamma), (\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots \rightarrow \gamma), \dots$ ヲ満足スル無数ノ無理数群 $(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots), (\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots), \dots \in N$ ノ残りノ中ニアルベシ。

從ツテ $(\forall)$ ニヨリテ R ハ尚「無限部分集合」ニ分割シ

得ルコトトナル。結局無理數中ニ R ノ元素ト對應セズシテ殘
ルモノノアル間ハ尚 R ハ分割シウルコトトナリ。コレ R ハ已
ニ完全ニ（出來得ル限り）「部分集合」ニ分割シ終リタリト
イフ假定ニ反ス。故ニ無理數ノ集合 N カ非可附着集合ヲ作ル
コトハ不可ナリ。

Q. E. D.

(注意1)

勿論 R ヲ分割スル方法ニハ終リナク從ツテ其ノ実行ハ出來
ヌモノナルカ、 R ヲ出來得ル限り分割シテ近メバ完全排列
集合ヲ逐次得ラレ且ツコノ極限ハ Ω ナル故、 R カ完全ニ分
割シウル迄 R ノ分割ハ続行シ得ラル、モノナリト考ヘテ差
支ナシ、實行上デナク思惟上ノコトナリ。