



Title	Überdeckung ノーツノ Dualitätssatz ニ就テノ注意
Author(s)	山内, 省三
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 156, p. 130-139
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74617
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

691. Überdeckung / ツ /

Dualitätssatz = 就テ / 注意

山内 省三

§1. Komplex / Überdeckung¹⁾ = 於ケル Bettische Gruppe / 定義ハスベテ小松氏 /
²⁾ $\vee L = \text{依ルコト} = \text{スル}$ 。

即チ Komplex K_i / Überdeckung $\vee U_i$ 、 $\vee L = \text{對シテ}$ 定義サレタ $R\text{-dim. } 0\text{-Bettische Gruppe}$ 及ビ $U\text{-Bettische Gruppe}$ $\vee$ 夫々 $iB_0^k(K_i, \mathcal{O})$, $iB_u^k(K_i, \mathcal{O})$ トス。

Lemma. Komplex K_m 及 $K_n = (\text{auf}) \text{ Simplicial abbilden}$ $\vee$ ルトキハ $nB_0^k(K_n, \mathcal{O})$ 、 $mB_0^k(K_m, \mathcal{O}) = \text{homomorph} = (\text{in}) \text{ abbilden}$ $\vee$ ル。

³⁾
証明。

- 1) K. Reidemeister: überdeckungen von Komplexen. Crelle Journal 193
- 2) A. Komatu: über die Dualitätssätze der Überdeckungen Jap. Journal of Math. (1936)
- 3) A. Komatu:
Über die Ringdualität eines Kompaktums Tôhoku. Math. Journal vol. 43 (1937)

証明. Simplicialer Abbildung $\gamma \varphi_n^m(K_m) = K_n$

トス。

$f^k \in {}_m F^k(K_m, \sigma) \rightarrow {}_n f^k \in {}_n F^k(K_n, \sigma) =$ 對應セテ $\hookrightarrow$ Kette

トス。

$${}_m f^k({}_m a_i^k) = {}_n f^k(\varphi_n^m({}_m a_i^k)) \quad (1)$$

但シ Kette ${}_m f^k =$ 對シテ $\wedge \dim \varphi_n^m({}_m a_i^k) < k$, ト

キハ ${}_m f^k = 0$ トス。

今 ${}_n f^k \rightarrow$ oberer Zyklus トス。

$$g_0 {}_n f^k = {}_n f^{k+1}({}_m a_j^{k+1}) = \sum_{{}_m a_j^{k+1} \rightarrow {}_m a_i^k} {}_n \varepsilon_{ji}^k \bar{\gamma}_{ij}^{k+1} {}_n f^k({}_m a_i^k) = 0 \quad \text{-----(2)}$$

$$\rightarrow g_0 {}_n f^k = {}_n f^{k+1}({}_m a_j^{k+1}) = \sum_{{}_m a_j^{k+1} \rightarrow {}_m a_i^k} {}_m \varepsilon_{ji}^k \bar{\gamma}_{ij}^{k+1} {}_m f^k({}_m a_i^k)$$

$$= \sum_{{}_m a_j^{k+1} \rightarrow {}_m a_i^k} {}_m \varepsilon_{ji}^k \bar{\gamma}_{ij}^{k+1} f^k(\varphi_n^m({}_m a_i^k)) \quad \text{-----(3)}$$

所デ U_m, U_n , Incidenzmatrizen, 間ニハ次ノ關係カアル。⁴⁾

$${}_m \varepsilon_{ji}^k \bar{\gamma}_{ij}^{k+1} = {}_n \varepsilon_{ji}^k \bar{\gamma}_{ij}^{k+1} \quad (4)$$

(4) ト (2) $\Rightarrow$ (3) / 右辺 = 0

4) 小松氏, 紙上談話會 10.7.

(4) + 2 關係式 $\wedge \varepsilon_{ij}^{k+1} \bar{\gamma}_{ij}^{k+1} = \varepsilon_{ij}^{k+1} \bar{\gamma}_{ij}^{k+1} =$ 同ジ。

又 ∂f^k は 0 -Rand $\neq \emptyset$ ($k-1$)-dim. Kette かつ
 $\partial \partial f^{k-1} = \partial f^k$

$$\therefore \partial f^k = \partial f^k(\sum a_i^k) = \sum_{a_i^k \rightarrow a_j^{k-1}} \epsilon_{ij} \partial f^{k-1}(a_j^{k-1}) \dots (5)$$

今 $\partial f^k =$ 対応する Kette $\Rightarrow \partial f^k \subset \partial f^{k-1} \dots (5), (4), (1) \Rightarrow$

$\partial f^k =$ 亦 0 -Rand $\neq \emptyset$.

$$\text{即 } \partial f^k = \partial f^k(\partial_n^m(a_i^k))$$

$$= \sum_{a_i^k \rightarrow a_j^{k-1}} \epsilon_{ij} \partial f^{k-1}(\partial_n^m(a_j^{k-1})) = \partial f^{k-1}$$

$\Rightarrow$ 対応の $\partial =$ Homomorphisms

$$\text{故 } \partial_n^k(K_n, \partial) \xrightarrow{\text{homomorph}} \partial_m^k(K_m, \partial)$$

§2. Kompaktum $F^n \subset \mathbb{R}^n$:

F^n , Projektionsspektrum

$$(1) \quad K_1, K_2 \xleftarrow{\quad}, K_m, K_{m+1}, \dots \quad \partial_n^m(K_m) = K_m$$

$\dim. K_m = n$

Abelsche Gruppe $\partial \Rightarrow$ Koordinaten-
 gruppe $= \mathbb{Z}$.

(1), Überdeckungsfolge $\Rightarrow$

$$(2) \quad U_1, U_2, \xleftarrow{\quad} U_m, U_{m+1}, \dots$$

U_1 , Inzidenzmatrizen $\Rightarrow$ 決定した後, U_i

($i > 1$), Inzidenzmatrizen, 決定, 小松氏: 紙
 上談話会 107 参照.

$\gamma = {}_n B_u^{n-k}(K_n^*, \alpha) \rightarrow {}_m B_u^{n-k}(K_m^*, \alpha) \rightarrow$ 對應
 ハ次ノマツテ考ヘル。 ($n < m$)

先ツ $K_n \xleftarrow{g} K_m \quad n < m \quad g_n^m(K_m) = K_n =$

於テ

$${}_n a_j^k \in K_n = \text{abbilden} \text{ 上ルル } K_m \text{ Elementen } \rightarrow \begin{cases} {}_m a_{i_1}^k, \\ {}_m a_{i_2}^k, \\ \vdots \\ {}_m a_{i_s}^k \end{cases}$$

トス。(§1, (1) ヲリワカル様ニ同次元ノモノダケ考ヘテオ
 ケバヨイ)

$$\text{即チ } g_n^m({}_m a_{i_t}^k) = {}_n a_j^k \quad t=1, 2, \dots, s$$

dual Operator 7 2 トス。

ソノ意味ハ

$$\left. \begin{aligned} 2 {}_n a_j^k &= {}_n b_j^{n-k} \\ 2 {}_m a_{i_t}^k &= {}_m b_{i_t}^{n-k} \\ 2 f^k &= f^{*n-k} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &b^{n-k} \in K^*, a^k \in K = \text{一對一ニ對} \\ &\text{應スル Element} \\ &f^{*n-k} \in K^*, \text{Element } b^{n-k} \\ &= \text{同シテ定義サレル Kette.} \end{aligned}$$

Inzidenzrelation = 就イテハ

$$\left. \begin{array}{l} K: \varepsilon_{ij}^k(a_i^k, a_j^{k-1}) \\ K^*: \varepsilon_{ji}^{*n-k+1}(x a_i^k, x a_j^{k-1}) = \varepsilon_{ji}^{*n-k+1}(b_i^{n-k}, b_j^{n-k+1}) \end{array} \right\} \varepsilon_{ij}^k = \varepsilon_{ji}^{*n-k+1}$$

überdeckung $U \rightleftharpoons \wedge$

U : a_i^k と a_j^{k-1} が überlagern する $x a_i^k =$ 對して a_j^{k-1} が überlagern する $x' a_j^{k-1}$ が存在して

$x a_i^k$ と $\varepsilon_{ij}^k \cdot x \gamma_{ij}^k a_j^{k-1}$ とが inzidenz ;

$$\begin{cases} x' = x \gamma_{ij}^k \\ \gamma_{ij}^k \text{ は } \mathcal{A} \text{ Automorphismus} \end{cases}$$

$\exists ! \exists ! \exists x a_i^k \rightarrow x' a_j^{k-1} \nexists \nexists$ する

$$U^*: x(x a_i^k) = x(x) \cdot x(a_i^k) \quad x(x' a_j^{k-1}) = x' b_j^{n-k+1} \\ = x b_i^{n-k}$$

$$x b_i^{n-k} \longleftarrow x' b_j^{n-k+1}$$

$$\exists ! = x = x' \gamma_{ji}^{*n-k+1}$$

$$\therefore x x = x x' \gamma_{ji}^{*n-k+1}$$

$$= x x \gamma_{ij}^k \gamma_{ji}^{*n-k+1}$$

故 = überdeckung ; Inzidenzmatrizen U, U^*

= 於ける關係ハ

$$\left(\gamma_{ij}^k \right) = \left(\gamma_{ji}^{*n-k+1} \right)^{-1}$$

dual Operator x として、如上に考へる。

サテ § 1, (1) = ヨリ K_n = 開スル Kette f_n = 對應セル K_m , kette f_m トスレバ Gruppe α , Element トシテ

$${}_m f({}_m a_{i_t}^k) = {}_n f\left(\varphi_n^m({}_m a_{i_t}^k)\right)$$

ナル對應ガツケテアツタ。

Operator $\mathcal{L}$ = ヨリ

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{c} n-k \\ {}_m b_{i_t}^{n-k} = \mathcal{L}({}_m a_{i_t}^k) \end{array} \\ & \nearrow & \vdots \\ {}_n a_j^k & \leftarrow & \begin{array}{c} {}_m a_{i_1}^k \\ \vdots \\ {}_m a_{i_s}^k \end{array} \\ & \nwarrow & \vdots \\ & & \begin{array}{c} n-k \\ {}_m b_{i_s}^{n-k} = \mathcal{L}({}_m a_{i_s}^k) \end{array} \end{array}$$

$$\mathcal{L}\left({}_m f^k({}_m a_{i_t}^k)\right) = \mathcal{L}\left({}_n f^k\left(\varphi_n^m({}_m a_{i_t}^k)\right)\right) = \mathcal{L}\left({}_n f^k({}_n a_j^k)\right)$$

$$t = 1, 2, \dots, S$$

$$i.e. \mathcal{L}({}_n f^k(\mathcal{L}({}_m a_{i_t}^k))) = \mathcal{L}\left({}_n f^k\left(\mathcal{L}\left(\varphi_n^m({}_m a_{i_t}^k)\right)\right)\right) = \mathcal{L}({}_n f^k({}_n a_j^k))$$

$$\therefore {}_m f^{*n-k}({}_m b_{i_t}^{n-k}) = {}_n f^{*n-k}\left(\left(\varphi_n^m({}_m a_{i_t}^k)\right)^*\right) = {}_n f^{*n-k}({}_n b_j^{n-k})$$

$$t = 1, \dots, S$$

即チ

$$(6) \quad {}_m f^{*n-k}({}_m b_{i_t}^{n-k}) = {}_n f^{*n-k}\left(\left(\varphi_n^m({}_m a_{i_t}^k)\right)^*\right)$$

$$t = 1, 2, \dots, S$$

故 $= \bar{K}_n^* =$ 開スル Kette $f^{n-k} =$ 對應ナル $\bar{K}_m^* =$ 開
 シテ, Kette $\rightarrow f^{n-k}$ トスルトキ Gruppe α ,

Element シテ (6) ナル 對應ガツイテキル。

THEOREM

(6) ナル 對應ノ 許ニ於テ Folge (5) ノ Limesgruppe
 $\rightarrow B_u^{n-k}(F, \alpha)$ トスレバ

$$B_o^k(F, \alpha) \cong B_u^{n-k}(F, \alpha)$$

附記

念ノタメニ Lemma 2 ヲ 証明シテオク。

即チ $B_o^k(K, \alpha) \cong B_u^{n-k}(K^*, \alpha)$ ナルコト

証明

Überdeckung, Inzidenzmatrizen,
 Element $\rightarrow \gamma = \gamma_i \rightarrow u$ -Überdeckung
 , Element $\gamma_{ij}^k (a_i^k \rightarrow a_j^{k+1})$ ト σ -Überdeckung
 , $\bar{\gamma}_{ji}^k (a_j^{k+1} \rightarrow a_i^k)$ ト $\wedge$ identisch ナリト 假定シ

ヲオク。

f^k ヲ σ -Zyklus トス。

$$g_o f^k = f^{k+1}(a_j^{k+1}) = \sum_{a_j^{k+1} \rightarrow a_i^k} \varepsilon_{ji}^k \gamma_{ij}^{k+1} f^k(a_i^k) = 0$$

dual operator χ ヲ ホドコス。

$$\mathcal{L} g_0 f^k = \mathcal{L} f^{k+1}(\mathcal{L} a_j^{k+1}) = \sum \mathcal{L} \varepsilon_{ji}^k \mathcal{L} \gamma_{ij}^{k+1} \mathcal{L} f^k(\mathcal{L} a_i^k) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore f^{*n-k-1}(b_j^{n-k-1}) &= \sum_{b_i^{n-k} \rightarrow b_j^{n-k-1}} \varepsilon_{ij}^{*n-k} \gamma_{ij}^{*n-k} f^{*n-k}(b_i^{n-k}) \\ &= g_u f^{*n-k}(b_i^{n-k}) = 0 \end{aligned}$$

故 = 0-zyklus $f^k = \wedge$ u-zyklus f^{*n-k} が對應.

$\mathcal{K} = f^k \rightarrow$ 0-Rand トス. 即チ f^{k-1} が存在シテ

$$g_0 f^{k-1} = f^k$$

$$g_0 f^{k-1} = f^k(a_i^k) = \sum_{a_i^k \rightarrow a_j^{k-1}} \varepsilon_{ij}^{k-1} \gamma_{ji}^k f^{k-1}(a_j^{k-1})$$

$$\therefore \mathcal{L} g_0 f^{k-1} = \mathcal{L} f^k(\mathcal{L} a_i^k)$$

$$= \sum \mathcal{L} \varepsilon_{ij}^{k-1} \mathcal{L} \gamma_{ji}^k \mathcal{L} f^{k-1}(\mathcal{L} a_j^{k-1})$$

$$\therefore f^{*n-k}(b_i^{n-k}) = \sum_{b_j^{n-k+1} \rightarrow b_i^{n-k}} \varepsilon_{ji}^{*n-k+1} \gamma_{ij}^{*n-k+1} f^{*n-k+1}(b_j^{n-k+1})$$

$$\therefore f^{*n-k}(b_i^{n-k}) = g_u f^{*n-k+1}$$

即チ f^{*n-k+1} 存在カ云ヘタ. 故 = 0-Rand $f^k = \wedge$ u-Rand f^{*n-k} が對應.

以上ノ對應ガ Isomorphismus ナルコトハ明.

又 k, k^* ハ dual ナルコトカラ $B_0^k(k, \alpha) \wedge B_u^{n-k}(k^*, \alpha)$

1 全体 $\downarrow$ isomorph.