



Title	Jordanノ曲線定理ニ就イテ
Author(s)	入江, 盛一
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 157, p. 145-152
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74620
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

694. Jordan / 曲線定理ニ就イテ

入江 盛一 (北大)

Jordan / 曲線定理『Jordan 曲線 (単一閉曲線) j ハ平面 R ヲニツノ領域ニ分テ且ツ各領域ノ境界ハ j ト一致スル』コトヲ次ノ順序ヲ証明スル。

端点ヲ共有スルニツノ半直線ハ平面 R ヲニツノ角領域ニ分ツコトト角領域ハ辺上ニアル一端ヲ除イテハソノ内部ニ含マレル半直線ニヨツテニツノ領域ニ分タレルコトヲ知ツテキルモノトスル。

§1. $R-j$ / 各 component ハ j ノ内部又ハ外部デアイル。

§2. j カ線分ヲ含ムトラバ内部ノ component 及ビ外部ノ component が存在スル。

§3. $R-j$ / component ノ境界ハ j ト一致スル。

§4. j カ線分ヲ含ムトラバ $R-j$ / component ハ高々ニツデアイル。

§5. $R-j$ = ハ内部ノ component 及ビ外部ノ component が存在スル。

§6. $R-j$ = ハ高々ニツノ component ヨリナリ。

以上ノ中3及ビ6ハ K. Venkatchalingar, A simple proof of the Jordan-curve theorem. (The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. 8 (1937)) ノ方法ニヨル。(Venkatchalingar

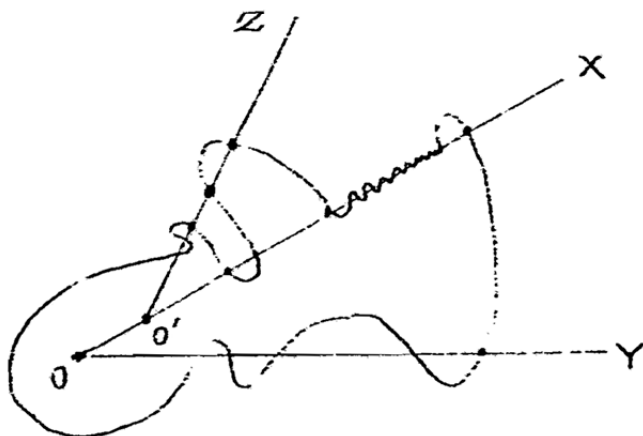
ハ多辺形が平面ヲニツニ分ケルコトヲ假定シテキル)

§1. **補助定理1** 『 O ヲ $R-j$ ノ点トスルトキ, j ノ部分弧デ夫々ニ辺 OX, OY 上ニアル兩端ヲ除イテハ角領域 $XOY =$ 挟マレル^{*}モノハ有限個デアール』

証明: $j: Z = Z(t), 0 \leq t \leq 1$ デ連続。角領域 $XOY =$ 挟マレル弧ノ兩端ヲ $Z(t_1), Z(t_2)$ トスレバ
 $|Z(t_1) - Z(t_2)| > \delta$. δ ガ点 O ノ位置及ビ角ノ開キノミ
 ニヨツテ定マル常数デアール。コノコトヨリ $XOY =$ 挟マレル弧ガ無限
 限ニアルトスレバ $Z(t)$ ガ $[0, 1]$ デ一様連続アマルコトハ
 矛盾デアール。

補助定理2 『 O ヲ共通ノ頂点トスルニツノ角領域ニ挟マレル弧ノ数ハ共ニ偶数(O ヲ含ム)ヌハ共ニ奇数デアール』

証明: 一辺 OX ヲ共有シ互ニ外部ニアルニツノ角領域 XOY 及ビ XOZ (OY 及ビ OZ ハ一致シテモヨイ)ニ挟マレルキル j ノ弧ノ数ヲ m 及ビ n トスル。之レ等ノ弧ノ端点



第一圖

ノ中 OX 上ニアルモノノ数ヲ p , コノ p 個ノ点ノニツテ端点トシ OY 及ビ OZ ト共通点ヲ持タス j ノ弧ノ数ヲ l トスル。 m, n, l, p

*) コノ X ヲナ弧ハ角領域ニ挟マレテキルト云フコトニスル。

1 間 $= m + n + 2l = 2p + l$ 関係がアル。故 $= m, n$ ハ
共 $=$ 偶数 又ハ 奇数 デアル。コレヨリ 頂点ヲ 共有スルニツノ 角
領域ノ 位置が種々ナル場合 $=$ 挟ム 弧ノ 数ハ 同種 (共 $=$ 偶数
又ハ 奇数) デアルコトハ 容易ニ 分ル。

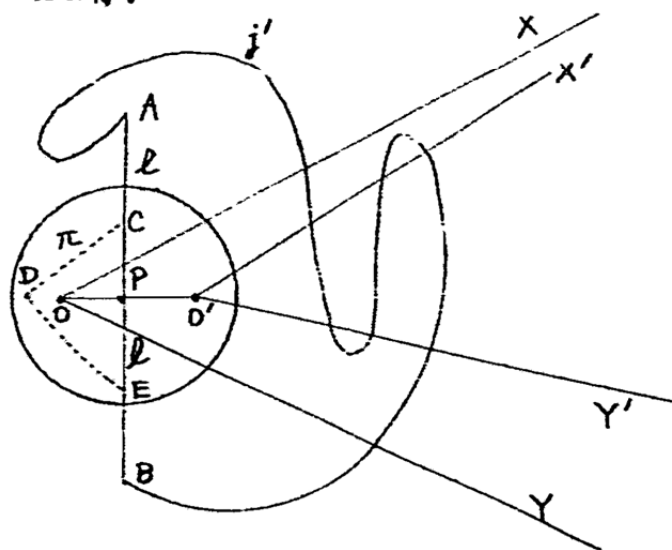
補助定理 3 『線分 OO' が j' ト 共通点ヲ 持タナケレバ
 O 及ビ O' ノ 頂点トスルニツノ 角領域が挟ム j ノ 弧ノ 数ハ 同種
デアル』

証明: OO' ノ 延長ヲ 共通辺トシ 互ニ 外部 $=$ アル 角領域
 $=$ 對シテ 補助定理 2 ト 全ク 同シニ 証明出來ル。(第一圖參
照)

定義. $R-j'$ ノ component ハ π ノ 内点ヲ 頂点トス
ル 角が挟ム j ノ 弧ノ 数ハ 奇数 デアルカ 偶数 デアルカ $=$ 從ツテ
 j' ノ 内部 デアル 又ハ 外部 デアルト云フ。

§ 2. **補助定理 4** 『 j が 線分ヲ 含ムナラバ j ノ 内部ノ
component 及ビ j ノ 外部ノ component が 存在スル』

証明:



第一圖

$\overline{AB} = l$ ヲ $j =$ 含
マレル 線分, P ヲ
 l ノ 一点トシ

$j' - j - l$ ト 共通
点ヲ 持タス 近傍

$U(P)$ ヲ 作ル。

又 直線 $AB =$ ヨツ
テ 分タレタ 半平面
ヨリ 夫々 O, O' ヲ

$U(P)$ 内 = トル。角 $X'O'Y'$ を O' を含む半平面内 = , 角 XOY を $U(P)$ 内 ℓ の一部を挟む α を作る。

角 XOY , 角 $X'O'Y'$ 及び $OP O'$ の共通点を持つ j' と共 = Jordan 曲線を作る屈折線 π を作るコトが出来ル (第 = 圖、 $\pi = ACDEB$)

角 XOY 及び角 $X'O'Y'$ が挟む $\ell + j'$ 及び $\pi + j'$ の弧ノ数 = π 次ノ関係があるコトハ容易 = 分ル (補助定理 3)

	$\angle XOY$	$\angle X'O'Y'$
$\ell + j'$	a	d
	≡	≡
$\pi + j'$	b	c

($\equiv$ ハ同種ヲ 丰 ハ異種 (一方が偶数, 他方が奇数) ヲ示ス)。

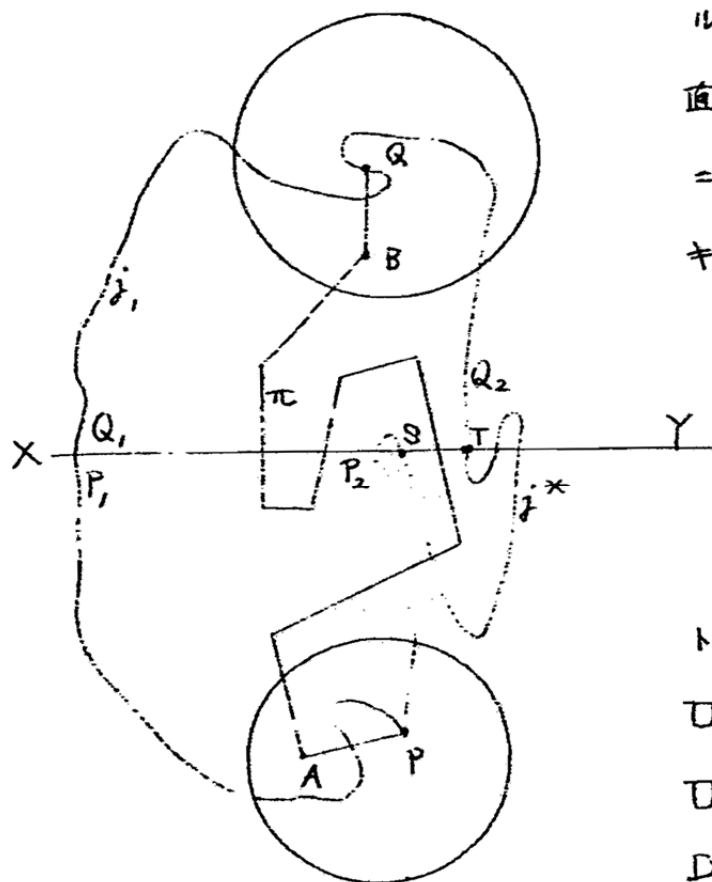
故 = O を含む component 及び O' を含む component ハ一方ハ j の内部が他方ハ j の外部デアル。

(注意) O を含む component 及び O' を含む component ハ何レモ ℓ を境界ノ一部 = 持つ、又 $R-j$ component が ℓ を境界 = 持つモ、ハ此、ニツヨリ + イコトハ容易 = 分ル。

§ 3. 補助定理 5 『 $R-j$ component ノ境界ハ j ト一致スル』

証明: レツノ component D ノ境界ガ j ト一致シヲカッタトスレバ、両端 P, Q ノミガ D ノ境界点ガアルヤ

うな j の部分弧 j_i がアル。(第三圖) = 点 P, Q は異ナル。



第三圖

ヲ結ブ。

π は直線 XY と共通点ヲ持ツ。必要ナラバ π ヲ少シ変更シテ共通点ガハ π の線分ト XY トが交叉シテキルヌウ = 出来ル。サウスレバ交点ノ数ハ奇数個ガアル。故ニ XY ト D トノ共通部分 = ハ π ト奇数回交ハル線分 $l = \overline{ST}$ ガアル。 S 及ビ T ハ D ノ境界点ヲ從ッテ $j_2 = j - j_1$ ノ点デアイル。 S, T ヲ両端トスル j_2 ノ弧ヲ j^* トスレバ j^* ハ $\widehat{P_1 P_2}, \widehat{Q_1 Q_2}$ ト共通点ヲ持タナイ。 Jordan 曲線 $\bar{j} = l + j^*$ ノ補集合ノ中ノ l ヲ境界 = 持ツ component ハニツアル。(52 注意)。

ル。 XY ヲ P, Q ヲカッ直線トシ、 P, Q ヨリ j = 沿ウテ両方ヘ進ンカトキ XY ト初メテ交ハル点ヲ夫々 $P_1, P_2; Q_1, Q_2$ トスル。

XY 及ビ夫々 $j - \widehat{P_1 P_2}, j - \widehat{Q_1 Q_2}$ ト共通点ヲ持タス近傍 $U(P), U(Q)$ ヲ作ル。

$U(P), U(Q)$ = 含マレル D ノ点ヲ A 及ビ B トシ、 A, B ヲ D 内ノ屈折線 π

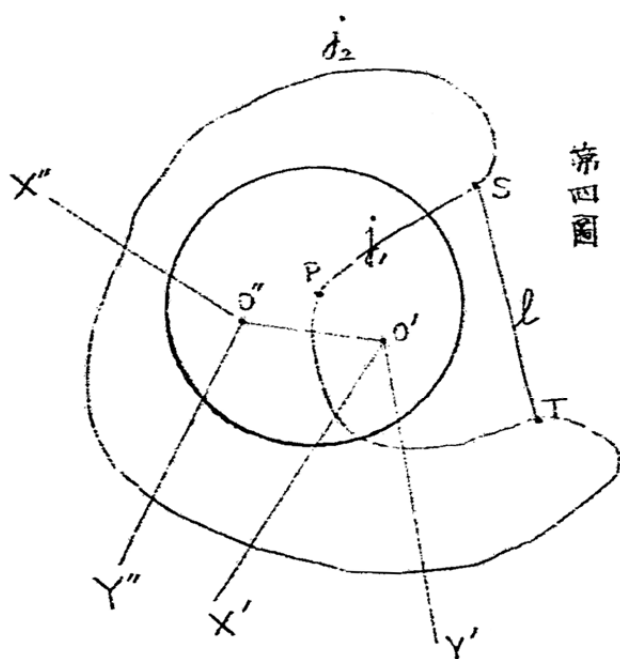
π は $\bar{j}$ と ℓ のミト奇数回交叉スルカラ 端点 A 及び B は一方は $\bar{j}$ の内部 = , 他方は $\bar{j}$ の外部 = ナル。コノコトハ $\overline{AP} + j_1 + \overline{QB}$ が $\bar{j}$ と交ハラズ = A, B を結ンデキレコトハ矛盾スル。

§ 4. 補助定理 6 『 j が線分ヲ含ムナラバ $R-j$ の component ハ丁度ニツアル』

§ 2 注意及び補助定理 5 ヨリ明カテアル。

§ 5. 補助定理 7 『 $R-j = \text{ハ } j \text{ の内部, component 及び外部, component カ } \bar{j}$ 』

証明: j 上 = 適当 = 二点 S, T をトレバ線分 $\ell = \overline{ST}$ は両端以外 = ハ j と共通点ノナイヤウニ出来ル。 j は二点 S, T = ヨリニツノ弧 j_1, j_2 = 分タレル。 P を j_1 ノ一点トシ近傍 $U(P)$ を



第四圖

$j^{**} = \ell + j_2$ と共通点ノナイヤウニトル。

$U(P) = \text{含マレル}$

$j^* = \ell + j_1$ ノ内部及び外部ノ点ヲ夫々 O', O'' トスレバ (補助定理 4 及 5)

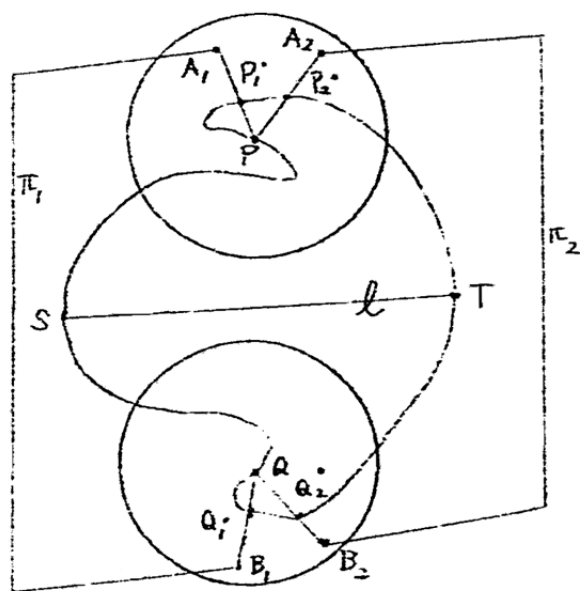
$\overline{O'O''}$ は j^{**} と共通点ヲ持タナイ。 ℓ と共通点ヲ持タナイヌウニ角 $X'O'Y'$, 角 $X''O''Y''$ を作ル、コノニツノ角ニ挟マレル j_1 ノ弧ノ数ハ異種 (假定ニヨル)、 j_2 ノ弧ノ数ハ同種 (補助定理 3) ガアル。従ッテ $j = j_1 + j_2$ が挟マレル弧ノ数ハ

果種デ O', O'' ハーツハ j ノ内部 = , 他ハ外部 = 7ル。

§6. 補助定理8 『 $R-j$ = ハ高々ニツノ component ヨリナイ』

証明: j ノ上 = 道首 = ニ点 S, T ヲトレハ線分 $\ell = \overline{ST}$ ハ両端以外 = ハ j ト共通点ヲ持タナイ。ニ点 S, T = ヨリ分
タレタ j ノニツノ弧 j_1, j_2 ノ上 = 夫々 P, Q ヲトリ近傍 $U(P)$
ハ ℓ 及ビ j_2 ト, 近傍 $U(Q)$ ハ ℓ 及ビ j_1 ト共通点ヲ持タヌ
ウ = トル。

$R-j$ ノ component カ ℓ ヲ含ムモ, 以外 = ニツア
ツタトシ、ソレヲ D_1, D_2 トスル。 $U(P), U(Q) = D_1$ 及ビ D_2 ノ
点ヲ一気ガツトリ、ソレヲ夫々 A_1, B_1 及ビ A_2, B_2 トスル(補
助定理5)(第五圖) A_1, B_1 ヲ D_1 内デ、 A_2, B_2 ヲ D_2 内



第五圖

デ屈折線 π_1, π_2 デ結ガ。

A_1P, A_2P が j ト初メテ
出合フ点ヲ P_1, P_2 トスレ
ハ P_1, P_2 ハ j_1 ノ点デアル。
 $\widehat{P_1P_2}$ ヲ j_1 = 含マレル弧
トスル。 Q_1, Q_2 ヲ j_2 ノ
同様ノ弧トスル。

線分 A_1P_1, B_1Q_1 及ビ
 A_2P_2, B_2Q_2 ハ夫々端
点以外 = ハ π_1 又ハ π_2 ト

共通点ヲ持タヌト假定シテ一般性ヲ失ハナイ。

$j^* = \pi_1 \overline{A_1P_1} \cdot \widehat{P_1P_2} \overline{P_2A_2} \pi_2 \cdot \overline{B_2Q_2}, \widehat{Q_2Q_1}, \overline{Q_1B_1}$ ノ補果

合、*component* ハ丁度ニツアル。(補助定理6)

L ヲ含ム方ヲ Δ_1 、他ヲ Δ_2 トスル、 j ハ Δ_1 ノ内部及ビ境界上ニ含マレル故ニ Δ_2 ノ内部デ、從ツテ j トハ共通点ナシニ π_1, π_2 ヲ屈折線ヲ結ベルコトニナル、コレハ π_1, π_2 ガ $R-j$ ノ異ナル *component* = アルコトハ示肩スル。

後書：— $R-j$ ヲ *component* = 分ケズニ内部及ビ外部ニ分ケルトキ、ソノ存在ト境界ガ j ト一致スルコトハ比較的尙早ニ分リマスガ連結デアルコトヲ未ダ証明出来ズニ居リマス。(補助定理5ヲ用キズニ)、又近藤基吉氏ノ御教示ニヨレバ j ノ各点ガ $R-j$ ノ各 *component*ノ内部ヨリ到達可能デアルコトヲ53ノ次ニ簡單ニ証明出来マス。