



Title	二次微分方程式ト積分方程式トノ関係（IV）
Author(s)	亀田，豊次郎
Citation	全国紙上数学談話会．1938，157，p. 152-167
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74621
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

695. 二次微分方程式と積分方程式との 關係 (IV)

龜田 豊治朗 (保險院)

第四節 對稱核の方程式

1. 積分方程式

$$u(x) = f(x) + \int_{a(c)}^x K(x, t) G(t) u(t) dt \\ + \int_{a(c)}^b \left\{ y_1^0(x) \alpha(t) + y_2^0(x) \beta(t) \right\} u(t) dt \dots (B')$$

ハ之レヲ変形シ、且ツ α, β トシテ適當ナ 函数ヲ取ルコトニヨ
リ對稱核ヲ有スル方程式トスルコトが出来ル。

$$(B) \text{ノ兩辺} = \frac{\sqrt{G(x)}}{b(x)} \text{ヲ乗シ且ツ}$$

$$K(x, t) = \left\{ \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_2(t) - \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_1(t) \right\} \frac{b(x)}{b(t)}$$

ヲ代入スレバ

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{G(x)} u(x)}{b(x)} &= \frac{\sqrt{G(x)} f(x)}{b(x)} \\ &+ \int_a^x \left\{ \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_2(t) - \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_1(t) \right\} \sqrt{G(x) G(t)} \frac{\sqrt{G(t)} u(t)}{b(t)} dt \\ &+ \int_a^b \left\{ \dot{\eta}_1(x) \sqrt{G(x)} \alpha(t) + \dot{\eta}_2(x) \sqrt{G(x)} \beta(t) \right\} u(t) dt \dots\dots (1) \end{aligned}$$

ヲ得ル。今 (1) = 於テ

$$v(x) = \frac{\sqrt{G(x)} u(x)}{b(x)}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{G(x)} f(x)}{b(x)}$$

ト置ケバ、(1) ハ次ノ如クナル。

$$\begin{aligned} v(x) &= g(x) + \int_a^x \left\{ \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_2(t) - \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_1(t) \right\} \sqrt{G(x) G(t)} v(t) dt \\ &+ \int_a^b \left\{ \dot{\eta}_1(x) \sqrt{G(x)} \frac{\alpha(t) b(t)}{\sqrt{G(t)}} + \dot{\eta}_2(x) \sqrt{G(x)} \frac{\beta(t) b(t)}{\sqrt{G(t)}} \right\} v(t) dt \\ &\dots\dots (2) \end{aligned}$$

サテ A_1, A_2, A_3 ヲ常数トスレバ、次ノ積分方程式ノ核ハ對
稱デアレ。

$$\begin{aligned}
v(x) = & g(x) + \int_a^x \{ \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_2(t) - \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_1(t) \} \sqrt{G(x)G(t)} v(t) dt \\
& - \frac{1}{2} \int_a^b \{ \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_2(t) - \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_1(t) \} \sqrt{G(x)G(t)} v(t) dt \\
& + \int_a^b \left[A_1 \{ \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_2(t) + \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_1(t) \} + A_2 \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_1(t) \right. \\
& \quad \left. + A_3 \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_2(t) \right] \sqrt{G(x)G(t)} v(t) dt \dots (3)
\end{aligned}$$

之ヲ証明スルニハ

$$\begin{aligned}
& \int_a^x \{ \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_2(t) - \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_1(t) \} \sqrt{G(x)G(t)} \cdot v(t) dt \\
& - \frac{1}{2} \int_a^b \{ \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_2(t) - \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_1(t) \} \sqrt{G(x)G(t)} v(t) dt
\end{aligned}$$

ノ核ガ對稱デアルトヲ証明スルベシナル。今簡單ノタメ此ノ核ヲ $k(x, t)$ ナ表ハセバ此ノ核ハ次ノ性質ヲ有スル。

1) t が a ト x トノ間ニアルトキ、換言スレバ x が t ト b トノ間ニアルトキ

$$k(x, t) = \frac{1}{2} \{ \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_2(t) - \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_1(t) \} \sqrt{G(x)G(t)}$$

2) t が x ト b トノ間ニアルトキ

$$k(x, t) = -\frac{1}{2} \{ \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_2(t) - \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_1(t) \} \sqrt{G(x)G(t)}$$

サテコノ核ニ於テ x ト t トヲ交換スレバ、1) ト 2) トガ交換サレルノミチ $k(x, t)$ ハ不変デアル。故ニ核 $k(x, t)$ ハ對稱デアル。

茲ニ注意ヲ要スルコトハ積分ハ曲線 C 上ヲ行ハレル、デアレカテ、 t が a ト x トノ間ニアルトハ、曲線 C 上ニ於イテ

三点 a, t, x が此順序 = アルコトヲ意味スル。

サテ (2) ト (3) トヲ比較スレバ, (2) ノ核が對稱ナルタメ = 充分ナル條件ハ

$$\alpha(t) = \left\{ \left(A_1 - \frac{1}{2} \right) \dot{\gamma}_2(t) + A_2 \dot{\gamma}_1(t) \right\} \frac{G(t)}{b(t)} \quad (4)$$

$$\beta(t) = \left\{ \left(A_1 + \frac{1}{2} \right) \dot{\gamma}_1(t) + A_3 \dot{\gamma}_2(t) \right\} \frac{G(t)}{b(t)} \quad (5)$$

ヲアル。之ヲ定理ヲ表ハセバ

定理 8. 積分方程式

$$\begin{aligned} u(x) = & f(x) + \int_a^x K(x, t) G(t) u(t) dt \\ & + \int_a^b \left\{ \dot{\gamma}_1(x) \left\{ \left(A_1 - \frac{1}{2} \right) \dot{\gamma}_2(t) + A_2 \dot{\gamma}_1(t) \right\} \right. \\ & \left. + \dot{\gamma}_2(x) \left\{ \left(A_1 + \frac{1}{2} \right) \dot{\gamma}_1(t) + A_3 \dot{\gamma}_2(t) \right\} \right\} \frac{G(t)}{b(t)} u(t) dt \end{aligned} \quad (6)$$

ハ両辺 = $\frac{\sqrt{G(x)}}{b(x)}$ ヲ乘シ且ツ

$$u(x) = \frac{b(x)}{\sqrt{G(x)}} v(x)$$

ト置クコト = ヨリ對稱核ノ積分方程式 (3) トナル。

2. 定理 8 = 述べタ通り方程式

$$\begin{aligned} u(x) = & f(x) + \int_a^x K(x, t) G(t) u(t) dt \\ & + \int_a^b \left\{ \dot{\gamma}_1(x) \alpha(t) + \dot{\gamma}_2(x) \beta(t) \right\} u(t) dt \end{aligned}$$

α , $\alpha(t)$ 及び $\beta(t)$ が (4), (5) で表ハサレルトキ,
 $u = \frac{b}{\sqrt{G}}$ ト置ケトニ依リ、對稱核ノ積分方程式 =
 $reduce$ 出来ルノデアルガ、コノ場合ニ定理 7 = 述べ
 タ

$$D = \begin{vmatrix} (\alpha \dot{z}_1) - 1 & (\beta \dot{z}_1) \\ (\alpha \dot{z}_2) & (\beta \dot{z}_2) - 1 \end{vmatrix}$$

ハ如何ナル函数デアアルカ、以下之ヲ論ズル、

(4) = 依レバ

$$(\alpha \dot{z}_1) = (A_1 - \frac{1}{2}) \int_a^b \dot{\eta}_2(t) \dot{\zeta}_1(t) G(t) dt + A_2 \int_a^b \dot{\eta}_1(t) \dot{\zeta}_1(t) G(t) dt$$

$$(\alpha \dot{z}_2) = (A_1 - \frac{1}{2}) \int_a^b \dot{\eta}_2(t) \dot{\zeta}_2(t) G(t) dt + A_2 \int_a^b \dot{\eta}_1(t) \dot{\zeta}_2(t) G(t) dt$$

等デアアルカラ、先ヅ次ノ四式ヲ計算スル、

$$\int_a^b \dot{\eta}_i(t) \dot{\zeta}_j(t) G(t) dt = a_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2 \\ j = 1, 2 \end{matrix}$$

定理 6 = ヨレバ

$$\Gamma(\dot{y}_i) = \dot{z}_i \quad i = 1, 2$$

之ヲ詳シク書キ、両辺ヲ $b(x)$ = τ 除スルバ

$$\dot{\eta}_i(b) + \int_a^x \{ \dot{\zeta}_1(x) \dot{\zeta}_2(t) - \dot{\zeta}_2(x) \dot{\zeta}_1(t) \} \dot{\eta}_i(t) G(t) dt = \dot{\zeta}_i(x) \dots (7)$$

$x = b$ ト置ケバ

$$\dot{\eta}_i(b) + \dot{\zeta}_1(b) a_{i2} - \dot{\zeta}_2(b) a_{i1} = \dot{\zeta}_i(b) \dots (8)$$

(7)ヲ微分セテ $x = b$ ト置ケバ

$$\overset{\circ}{\eta}'_i(b) + \overset{\circ}{\zeta}'_i(b) a_{i2} - \overset{\circ}{\zeta}'_2(b) a_{i1} = \overset{\circ}{\zeta}'_i(b) \text{-----}(9)$$

(8), (9)ヲ解イテ a_{ij} ヲ求ムレバ

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta'_1 & \zeta'_1 \end{vmatrix} & a_{12} &= 1 + \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_2 \\ \eta'_1 & \zeta'_2 \end{vmatrix} \\ a_{21} &= -1 + \begin{vmatrix} \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta'_2 & \zeta'_1 \end{vmatrix} & a_{22} &= \begin{vmatrix} \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta'_2 & \zeta'_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \text{-----}(10)$$

デアル、但シ尙單ノ爲メ

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\eta}_i(b) &= \eta_i & \overset{\circ}{\eta}'_i(b) &= \eta'_i \\ \overset{\circ}{\zeta}_i(b) &= \zeta_i & \overset{\circ}{\zeta}'_i(b) &= \zeta'_i \end{aligned} \quad i=1, 2$$

ト書クコトシタ。

a_{ij} ハ 上述ノ如ク行列式ヲ表ハサレルガ、之レヲ用フレバ $(\Delta \overset{\circ}{Z}_1) - 1$, $(\Delta \overset{\circ}{Z}_2)$ 等モ亦行列式ヲ表ハスコトが出来ル。

$$(\Delta \overset{\circ}{Z}_1) - 1 = (A_1 - \frac{1}{2}) a_{21} + A_2 a_{11} - 1$$

$$= (A_1 - \frac{1}{2}) \begin{vmatrix} \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta'_2 & \zeta'_1 \end{vmatrix} + A_2 \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta'_1 & \zeta'_1 \end{vmatrix} + (A_1 + \frac{1}{2}) \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta'_1 & \eta'_2 \end{vmatrix}$$

$$(\Delta \overset{\circ}{Z}_1) - 1 = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & A_1 + \frac{1}{2} \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \zeta'_1 \end{vmatrix} \text{-----}(11)$$

同様二

$$(\alpha \hat{z}_2) = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & -A_2 \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \zeta'_2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

$$(\beta \hat{z}_1) = \begin{vmatrix} A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & A_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \zeta'_1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

$$(\beta \hat{z}_2) - 1 = \begin{vmatrix} A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & -(A_1 - \frac{1}{2}) \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \zeta'_2 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

(11), (12), (13), (14) 1 四式ヲ觀察スレバ, 此等ハ行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & A_1 + \frac{1}{2} & -A_2 \\ A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & A_3 & -(A_1 - \frac{1}{2}) \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \zeta'_1 & \zeta'_2 \end{vmatrix}$$

ノ minors = + ヲテ居ル。

即チ Δ ノ 第 i 行 第 j 列, 余因子ヲ A_{ij} ト書ケバ, (11), (12), (13), (14) ヲリ

$$(\alpha \hat{z}_1) - 1 = A_{42} \qquad (11')$$

$$(\alpha \hat{z}_2) = -A_{32} \qquad (12')$$

$$(\beta \dot{z}_1) = -A_{41} \quad (13')$$

$$(\beta \dot{z}_2) - 1 = A_{31} \quad (14')$$

ヲ得ル。

故ニ

$$D = \begin{vmatrix} (\alpha z_1) - 1 & (\alpha z_2) \\ (\beta z_1) & (\beta z_2) - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{42} & -A_{32} \\ -A_{41} & A_{31} \end{vmatrix} = \Delta : \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta'_1 & \eta'_2 \end{vmatrix} \\ = -\Delta$$

以上ヨリ定理7ニ依リ次ノ定理ヲ得ル。

定理9. 積分方程式

$$v(x) = \int_a^x \left\{ \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_2(t) - \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_1(t) \right\} \sqrt{G(x)G(t)} v(t) dt \\ - \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_2(t) - \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_1(t) \right\} \sqrt{G(x)G(t)} v(t) dt \\ + \int_a^b \left[A_1 \left\{ \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_2(t) + \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_1(t) \right\} + A_2 \dot{\eta}_1(x) \dot{\eta}_1(t) \right. \\ \left. + A_3 \dot{\eta}_2(x) \dot{\eta}_2(t) \right] \sqrt{G(x)G(t)} v(t) dt \quad (3')$$

ガ $v=0$ 以外ノ解ヲ有スルキメノ完全ナル條件ハ

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & A_1 + \frac{1}{2} & -A_2 \\ A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & A_3 & -(A_1 - \frac{1}{2}) \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \zeta'_1 & \zeta'_2 \end{vmatrix} = 0$$

デアツテ、之ガ満足サレル場合ノ解ハ

$$v(x) = C_1 \sqrt{G(x)} \left[\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & A_1 + \frac{1}{2} \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \zeta'_1 \end{array} \right| \zeta_2^{\circ}(x) - \left| \begin{array}{ccc} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & -A_2 \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \zeta'_2 \end{array} \right| \zeta_1^{\circ}(x) \end{array} \right]$$

及び

$$v(x) = C_2 \sqrt{G(x)} \left[\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & A_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \zeta'_1 \end{array} \right| \zeta_2^{\circ}(x) - \left| \begin{array}{ccc} A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & -(A_1 - \frac{1}{2}) \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \zeta'_2 \end{array} \right| \zeta_1^{\circ}(x) \end{array} \right]$$

、内恒等的 = 零デ + イ モ ノ が ア レ バ、之ヲ表ハサレル。而シ

テ兩式が恒等的 = 零デアル場合 = ハ

$$v(x) = C_1 \sqrt{G(x)} \zeta_1(x) + C_2 \sqrt{G(x)} \zeta_2(x)$$

が解デアル。但シ C_1 及 C_2 ハ任意常数デアツテ

$$\eta_i = \eta_i^{\circ}(b), \quad \zeta_i = \zeta_i^{\circ}(b), \quad \eta'_i = \eta'_i{}^{\circ}(b), \quad \zeta'_i = \zeta'_i{}^{\circ}(b)$$

デアル。

3. 簡單十例 = ヲイテ定理 9ヲ説明スル。

例。 $y'' = 0$ 十ル微分方程式ノ二解カラ $a=0$, $b=1$ トシテ $\eta_1^{\circ}(x)$ 及 $\eta_2^{\circ}(x)$ ヲ計算スレバ

$$\eta_1^{\circ}(x) = x \quad \eta_2^{\circ}(x) = 1$$

デアル。而シテ $G(x) = -\lambda$ トスレバ定理 9ノ積分方程式ハ

$$v(x) = -\lambda \int_0^x (x-t) v(t) dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 (x-t) v(t) dt$$

$$-\lambda \int_0^1 \{A_1(x+t) + A_2 x t + A_3\} v(t) dt$$

ト+ル、之が固有解ヲ有スル條件ハ $\zeta_1(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$,

$\zeta_2(x) = \cos \sqrt{\lambda} x$ ナルカテ)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & A_1 + \frac{1}{2} & -A_2 \\ A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & A_3 & -(A_1 - \frac{1}{2}) \\ 1 & 1 & \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} & \cos \sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & \cos \sqrt{\lambda} & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= 2(A_1^2 - A_2 A_3 - \frac{1}{4}) - A_2 \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$$

$$- (A_1^2 - A_2 A_3 + \frac{1}{4} + A_1 + A_3) \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}$$

$$- (2A_1^2 - 2A_2 A_3 + \frac{1}{2} - A_2) \cos \sqrt{\lambda} = 0$$

デアル。固有値入ハ此方程式ノ根デアール。

而シテ解ハ一般ニ

$$v(x) = C_1 \left\{ \Delta_1 \cos \sqrt{\lambda} x - \Delta_2 \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \right\} \quad (i)$$

$$v(x) = C_2 \left\{ \Delta_3 \cos \sqrt{\lambda} x - \Delta_4 \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \right\} \quad (ii)$$

ヲ表ハサレル。但シ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & A_1 + \frac{1}{2} \\ / & / & \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ / & 0 & \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= (\cos \sqrt{\lambda} - 1) A_1 + \left(\cos \sqrt{\lambda} - \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right) A_2 - \frac{1}{2} (1 + \cos \sqrt{\lambda}) \dots (iii)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & -A_2 \\ / & / & \cos \sqrt{\lambda} \\ / & 0 & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} A_1 + (1 - \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}) A_2 + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \dots (iv)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & A_3 \\ / & / & \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ / & 0 & \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\cos \sqrt{\lambda} - \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right) A_1 + (\cos \sqrt{\lambda} - 1) A_3 + \frac{1}{2} \left(\cos \sqrt{\lambda} - \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right) \dots (v)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & -(A_1 - \frac{1}{2}) \\ / & / & \cos \sqrt{\lambda} \\ / & 0 & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}) A_1 - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} A_3 - \frac{1}{2} (1 + \cos \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}) \dots (vi)$$

११११०.

次= (i) (ii) , 両式が恒等的=零トナル場合ヲ考ヘル。

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = 0, \quad \Delta_4 = 0$$

ノ四式カラ A_1, A_2, A_3 ヲ消去シテ行列式ヲ實際=計算スルト,
入ノ如何=拘ラズ零トナル。故=此等四方程式ノ適當ノ三者
カラ A_1, A_2, A_3 ヲ入ノ項ヲ算出ガ出來ル。即チ

$$A_1 = \frac{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}{2(2 - 2 \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda})}$$

$$A_2 = -\frac{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}{2 - 2 \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}$$

$$A_3 = \frac{\cos \sqrt{\lambda} - \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}}{2 - 2 \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}}$$

デアル。而シテ A_1, A_2, A_3 ガ $\lambda =$ 拘ラズ一定デアルヲメ
ハ

$$\sin \sqrt{\lambda} = 0 \quad \cos \sqrt{\lambda} = -1$$

ナルコトヲ要スル。故ニ

$$A_1 = 0 \quad A_2 = 0 \quad A_3 = -\frac{1}{4}$$

$$\lambda = (2n+1)^2 \pi^2 \quad (n \text{ 整数})$$

ヲ得ル。

故=積分方程式ハ

$$v(x) = -\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \left\{ |x-t| - \frac{1}{2} \right\} v(t) dt$$

トナリ、其ノ固有解ハ $\lambda = (2n+1)^2 \pi^2 =$ 對シ

$$C_1 \sin(2n+1)\pi x + C_2 \cos(2n+1)\pi x$$

トナル、但シ n ハ任意ノ整数デアル。

最後 = $A_1, A_2, A_3 =$ 特別値ヲ與ヘタ場合ヲ計算スル。

$$(i) \quad A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_2 = A_3 = 0$$

トスレバ、族ハ

$$u(x, t) = x \quad x < t < 1$$

$$u(x, t) = t \quad 0 < t < x$$

トナリ、固有値ノ方程式ハ

$$\cos \sqrt{\lambda} = 0, \quad \lambda = \left(\frac{2n+1}{2} \pi \right)^2$$

固有函数ハ $\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi x$ トナル。

$$(ii) \quad A_1 = A_2 = A_3 = 0$$

トスレバ、積分方程式ハ

$$v(x) = -\frac{\lambda}{2} \int_0^1 |x-t| v(t) dt$$

トナリ、固有値ノ方程式ハ

$$1 + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} + \cos \sqrt{\lambda} = 0$$

$$\text{即チ} \quad \left(\cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \right)^2 \left(1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \tan \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \right) = 0$$

トナル。而シテ固有解ハ

$$v = C_1 \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ 1 & 0 & \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} x - C_1 \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cos \sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$$

$$= C_1 \left\{ -\frac{1+\cos \sqrt{\lambda}}{2} \cos \sqrt{\lambda} x - \frac{1}{2} \sin \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x \right\}$$

$$v = C_2 \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ 1 & 0 & \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} x - C_2 \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \cos \sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$$

$$= C_2 \left\{ \frac{1}{2} \left(\cos \sqrt{\lambda} - \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \right) \cos \sqrt{\lambda} x \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} (1 + \cos \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}) \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \right\}$$

1 何レデモ表ハサレルが、前者ハ $\cos \frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0$ ノトキ恒等的=零トナルカラ、後者ノ方一般的形式、之ヲ書キ改メルト

$$v = C \left\{ \left(\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \sin \sqrt{\lambda} + 1 \right) \cos \sqrt{\lambda} x - \frac{1}{2} \sin \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x \right\}$$

トナル。

4. 前款デハ、對稱核ノ積分方程式 (3') ノ解ヲ述べたが、次節ノ應用デハ (3') ニ於テ

$$v(x) = \frac{\sqrt{G(x)}}{b(x)} u(x)$$

ト置イテ得ベキ方程式が重要ナル。故ニ定理 9. = 1 ノ置換ヲ施シ且ツ結果ヲ $\dot{y}_i(x)$, $\dot{z}_i(x)$ デ表ハセバ次ノ定理ヲ得ル。

定理 10. 積分方程式

$$u(x) = \int_{a(x)}^x K(x,t) G(t) u(t) dt$$

$$\begin{aligned}
& + \int_a^b \left\{ \dot{y}_1(x) \left\{ \left(A_1 - \frac{1}{2} \right) \dot{y}_2(t) + A_2 \dot{y}_1(t) \right\} \right. \\
& \left. + \dot{y}_2(x) \left\{ \left(A_1 + \frac{1}{2} \right) \dot{y}_1(t) + A_3 \dot{y}_2(t) \right\} \right\} \frac{G(t)}{(b(t))^2} u(t) dt \dots\dots\dots (6')
\end{aligned}$$

が固有解ヲ有スル完全ナル條件ハ

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & A_1 + \frac{1}{2} & -A_2 \\ A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & A_3 & -(A_1 - \frac{1}{2}) \\ \dot{y}_1(b) & \dot{y}_2(b) & \dot{z}_1(b) & \dot{z}_2(b) \\ \dot{y}_1'(b) & \dot{y}_2'(b) & \dot{z}_1'(b) & \dot{z}_2'(b) \end{vmatrix} = 0$$

ヲアツテ，解ハ

$$u(x) = C_1 \left[\begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & A_1 + \frac{1}{2} \\ \dot{y}_1(b) & \dot{y}_2(b) & \dot{z}_1(b) \\ \dot{y}_1'(b) & \dot{y}_2'(b) & \dot{z}_1'(b) \end{vmatrix} \dot{z}_2(x) - \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & -A_2 \\ \dot{y}_1(b) & \dot{y}_2(b) & \dot{z}_2(b) \\ \dot{y}_1'(b) & \dot{y}_2'(b) & \dot{z}_2'(b) \end{vmatrix} \dot{z}_1(x) \right]$$

$$u(x) = C_2 \left[\begin{vmatrix} A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & A_3 \\ \dot{y}_1(b) & \dot{y}_2(b) & \dot{z}_1(b) \\ \dot{y}_1'(b) & \dot{y}_2'(b) & \dot{z}_1'(b) \end{vmatrix} \dot{z}_2(x) - \begin{vmatrix} A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & -(A_1 - \frac{1}{2}) \\ \dot{y}_1(b) & \dot{y}_2(b) & \dot{z}_2(b) \\ \dot{y}_1'(b) & \dot{y}_2'(b) & \dot{z}_2'(b) \end{vmatrix} \dot{z}_1(x) \right]$$

ノ内恒等的ニ零デタイモノヲ表ハサレル。而シテ此等兩式ガ
恒等的ニ零デアル場合ニハ

$$u(x) = C_1 \dot{z}_1(x) + C_2 \dot{z}_2(x)$$

ガ解デアイル。

(注意) 此ノ定理ハ次ノ性質ヲ用フレバ定理9カラ容易ニ

証明シ得ラル。

$$\dot{y}_i(x) = b(x) \dot{\eta}_i(x)$$

$$\dot{y}'_i(x) = b'(x) \dot{\eta}_i(x) + b(x) \dot{\eta}'_i(x)$$