OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	二次微分方程式ト積分方程式トノ関係（Ⅳ）
Author(s)	亀田, 豊次朗
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 157, p. 152-167
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74621
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

695. 二次微分方程式ト積分方程式トノ関係(IV)

亀田　豊治郎(保険院)

第四節　對稱核ノ方程式

1. 積分方程式

$$u(x)=f(x)+\int_{a(c)}^{x}K(x,t)G(t)u(t)\,dt$$

$$+\int_{a(c)}^{b}\left\{y_1^{\circ}(x)\alpha(t)+y_2^{\circ}(x)\beta(t)\right\}u(t)\,dt\cdots\cdots(\beta')$$

ハ之レヲ変形シ、且ツ α, β トシテ適當ナ函数ヲ取ルコトニヨリ對稱核ヲ有スル方程式トスルコトが出來ル。

(B)ノ両辺ニ $\frac{\sqrt{G(x)}}{b(x)}$ ヲ乗ジ且ツ

$$K(x,t)=\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\frac{b(x)}{b(t)}$$

ヲ代入スレバ

$$\frac{\sqrt{G(x)}\,u(x)}{b(x)}=\frac{\sqrt{G(x)}\,f(x)}{b(x)}$$

$$+\int_a^x\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)\,G(t)}\,\frac{\sqrt{G(t)}\,u(t)}{b(t)}\,dt$$

$$+\int_a^b\left\{\mathring{\eta}_1(x)\sqrt{G(x)}\,\alpha(t)+\mathring{\eta}_2(x)\sqrt{G(x)}\,\beta(t)\right\}u(t)\,dt\quad\cdots\cdots(1)$$

ヲ得ル。今 (1) ニ於テ

$$v(x)=\frac{\sqrt{G(x)}\,u(x)}{b(x)},\qquad g(x)=\frac{\sqrt{G(x)}\,f(x)}{b(x)}$$

ト置ケバ、(1) ハ次ノ如クナル。

$$v(x)=g(x)+\int_a^x\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}\,v(t)\,dt$$

$$+\int_a^b\left\{\mathring{\eta}_1(x)\sqrt{G(x)}\,\frac{\alpha(t)\,b(t)}{\sqrt{G(t)}}+\mathring{\eta}_2(x)\sqrt{G(x)}\,\frac{\beta(t)\,b(t)}{\sqrt{G(t)}}\right\}v(t)\,dt$$

$\cdots\cdots(2)$

サテ A_1, A_2, A_3 ヲ常数トスレバ、次ノ積分方程式ノ核ハ對稱デアル。

$$v(x)=g(x)+\int_a^x\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}\;v(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}\;v(t)\,dt$$

$$+\int_a^b\Big[A_1\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)+\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}+A_2\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_1(t)$$

$$+A_3\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_2(t)\Big]\sqrt{G(x)G(t)}\;v(t)\,dt\cdots\cdots(3)$$

之ヲ証スルニハ

$$\int_a^x\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}\cdot v(t)dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}\;v(t)\,dt$$

ノ核ガ對稱デアルコトヲ証スレバ充分デアル。今簡單ノタメ此ノ核ヲ $k(x,t)$ デ表ハセバ此ノ核ハ次ノ性質ヲ有スル。

1) t ガ a トx トノ間ニアルトキ，換言スレバx ガ t ト b トノ間ニアルトキ

$$k(x,t)=\frac{1}{2}\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}$$

2) t ガx ト b トノ間ニアルトキ

$$k(x,t)=-\frac{1}{2}\left\{\mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t)-\mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t)\right\}\sqrt{G(x)G(t)}$$

サテコノ核ニ於テx ト t トヲ交換スレバ，1) ト 2) トガ交換サレルノミデ $k(x,t)$ ハ不変デアル。故ニ核 $k(x,t)$ ハ對稱デアル。

茲ニ注意ヲ要スルコトハ積分ハ曲線C上ガ終サレルノデアルカラ、t ガ a トx トノ間ニアルトハ，曲線C上ニ於イテ

三点 a, t, x が此順序ニアルコトヲ意味スル。

サテ (2) ト (3) トヲ比較スレバ，(2) ノ核が對稱ナルタメニ充分ナル條件ハ

$$\alpha(t)=\left\{\left(A_1-\frac{1}{2}\right)\mathring{\eta}_2(t)+A_2\mathring{\eta}_1(t)\right\}\frac{G(t)}{b(t)} \tag{4}$$

$$\beta(t)=\left\{\left(A_1+\frac{1}{2}\right)\mathring{\eta}_1(t)+A_3\mathring{\eta}_2(t)\right\}\frac{G(t)}{b(t)} \tag{5}$$

デアル。之ヲ定理デ表ハセバ

定理 8. 積分方程式

$$u(x)=f(x)+\int_{a(c)}^{x}K(x,t)G(t)u(t)\,dt$$

$$+\int_a^b\Big[\mathring{\eta}_1(x)\left\{\left(A_1-\frac{1}{2}\right)\mathring{\eta}_2(t)+A_2\mathring{\eta}_1(t)\right\}$$

$$+\mathring{\eta}_2(x)\left\{\left(A_1+\frac{1}{2}\right)\mathring{\eta}_1(t)+A_3\mathring{\eta}_2(t)\right\}\Big]\frac{G(t)}{b(t)}u(t)\,dt \tag{6}$$

ハ両辺ニ $\dfrac{\sqrt{G(x)}}{b(x)}$ ヲ乗ジ且ツ

$$u(x)-\frac{b(x)}{\sqrt{G(x)}}\quad v(x)$$

ト置クコトニヨリ對稱核ノ積分方程式 (3) トナル。

2. 定理 8 ニ述ベタ通リ方程式

$$u(x)=f(x)+\int_a^x K(x,t)G(t)u(t)\,dt$$

$$+\int_a^b\left\{\mathring{\eta}_1(x)\alpha(t)+\mathring{\eta}_2(x)\beta(t)\right\}u(t)\,dt$$

ハ，$\alpha(t)$ 及ビ $\beta(t)$ ガ (4), (5) ヂ表ハサレルトキ，

$u=\frac{b}{\sqrt{G}}$ ヒ ト置クコトニ依リ、對稱核ノ積分方程式＝reduce 出來ルノデアルガ、コノ場合ニ定理 7 ニ述ベタ

$$D=\begin{vmatrix} (\alpha\mathring{z}_1)-1 & (\beta\mathring{z}_1) \\ (\alpha\mathring{z}_2) & (\beta\mathring{z}_2)-1 \end{vmatrix}$$

ハ如何ナル函数デアルカ、以下之ヲ論ズル。

(4) ニ依レバ

$$(\alpha\mathring{z}_1)=\left(A_1-\frac{1}{2}\right)\int_a^b \mathring{\eta}_2(t)\mathring{\zeta}_1(t)G(t)\,dt+A_2\int_a^b \mathring{\eta}_1(t)\mathring{\zeta}_1(t)G(t)\,dt$$

$$(\alpha\mathring{z}_2)=\left(A_1-\frac{1}{2}\right)\int_a^b \mathring{\eta}_2(t)\mathring{\zeta}_2(t)G(t)\,dt+A_2\int_a^b \mathring{\eta}_1(t)\mathring{\zeta}_2(t)G(t)\,dt$$

等デアルカラ、先ヅ次ノ四式ヲ計算スル。

$$\int_a^b \eta_i(t)\zeta_j(t)G(t)\,dt=a_{ij} \qquad \begin{matrix} i=1,2 \\ j=1,2 \end{matrix}$$

定理 6 ニヨレバ

$$\Gamma(\mathring{y}_i)-\mathring{z}_i \qquad i=1,2$$

之ヲ詳シク書キ、両辺ヲ $b(x)$ ニテ除スレバ

$$\mathring{\eta}_i(x)+\int_a^x\left\{\mathring{\zeta}_1(x)\mathring{\zeta}_2(t)-\mathring{\zeta}_2(x)\mathring{\zeta}_1(t)\right\}\mathring{\eta}_i(t)G(t)\,dt=\mathring{\zeta}_i(x) \quad \cdots\cdots(7)$$

$x=b$ ト置ケバ

$$\mathring{\eta}_i(b)+\mathring{\zeta}_1(b)a_{i2}-\mathring{\zeta}_2(b)a_{i1}=\mathring{\zeta}_i(b) \quad \cdots\cdots(8)$$

(7) ヲ微分シテ $x=b$ ト置ケバ

$$\mathring{\eta}_i'(b)+\mathring{\zeta}_1'(b)\,a_{i2}-\mathring{\zeta}_2'(b)\,a_{i1}=\mathring{\zeta}_i'(b) \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

(8), (9)ヲ解イテ a_{ij} ヲ求ムレバ

$$\left.\begin{aligned} a_{11}&=\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_1\\ \eta_1' & \zeta_1'\end{vmatrix} \qquad a_{12}=1+\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_2\\ \eta_1' & \zeta_2'\end{vmatrix}\\ a_{21}&=-1+\begin{vmatrix}\eta_2 & \zeta_1\\ \eta_2' & \zeta_1'\end{vmatrix} \qquad a_{22}=\begin{vmatrix}\eta_2 & \zeta_2\\ \eta_2' & \zeta_2'\end{vmatrix}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (10)$$

デアル、但シ簡単ノ為メ

$$\left.\begin{aligned} &\mathring{\eta}_i(b)=\eta_i \qquad \mathring{\eta}_i'(b)=\eta_i'\\ &\mathring{\zeta}_i(b)=\zeta_i \qquad \mathring{\zeta}_i'(b)=\zeta_i'\end{aligned}\right\} \quad i=1,2$$

ト書クコトトシタ。

a_{ij} ハ上述ノ如ク行列式デ表ハサレルガ、之レヲ用フレバ $(\alpha\mathring{z}_1)-1$, $(\alpha,\mathring{z}_2)$ 等モ亦行列式デ表ハスコトガ出来ル。

$$(\alpha\mathring{z}_1)-1=\left(A_1-\frac{1}{2}\right)a_{21}+A_2\,a_{11}-1$$

$$=\left(A_1-\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix}\eta_2 & \zeta_1\\ \eta_2' & \zeta_1'\end{vmatrix}+A_2\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_1\\ \eta_1' & \zeta_1'\end{vmatrix}+\left(A_1+\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix}\eta_1 & \eta_2\\ \eta_1' & \eta_2'\end{vmatrix}$$

$$(\alpha\mathring{z}_1)-1=\begin{vmatrix}A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & A_1+\frac{1}{2}\\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1\\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_1'\end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

同様ニ

$$(\alpha\mathring{z}_2) = \begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & -A_2 \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_2' \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots (12)$$

$$(\beta\mathring{z}_1) = \begin{vmatrix} A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & A_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_1' \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots (13)$$

$$(\beta\mathring{z}_2)-1 = \begin{vmatrix} A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & -(A_1-\frac{1}{2}) \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_2' \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots (14)$$

(11), (12), (13), (14) ノ四式ヲ観察スレバ，此等ハ行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & A_1+\frac{1}{2} & -A_2 \\ A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & A_3 & -(A_1-\frac{1}{2}) \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_1' & \zeta_2' \end{vmatrix}$$

ノ minors ニ＋ソテ居ル。

即チ Δ ノ第 i 行第 j 列ノ余因子ヲ A_{ij} ト書ケバ，(11), (12), (13), (14) ヨリ

$$(\alpha\mathring{z}_1)-1 = A_{42} \qquad (11')$$

$$(\alpha\mathring{z}_2) = -A_{32} \qquad (12')$$

$$(\beta \mathring{z}_1) \quad = -A_{41} \tag{13'}$$

$$(\beta \mathring{z}_2) - 1 = A_{31} \tag{14'}$$

ヲ得ル。

故ニ

$$D = \begin{vmatrix} (\alpha z_1) - 1 & (\alpha z_2) \\ (\beta z_1) & (\beta z_2) - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{42} & -A_{32} \\ -A_{41} & A_{31} \end{vmatrix} = \Delta : \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' \end{vmatrix}$$

$$= -\Delta$$

以上ヨリ定理7ニ依リ次ノ定理ヲ得ル。

定理9. 積分方程式

$$v(x) = \int_{a(c)}^{x} \left\{ \mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t) - \mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t) \right\} \sqrt{G(x)G(t)}\, v(t)\, dt$$

$$- \frac{1}{2} \int_{a(c)}^{b} \left\{ \mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t) - \mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t) \right\} \sqrt{G(x)G(t)}\, v(t)\, dt$$

$$+ \int_{a(c)}^{b} \Big[A_1 \left\{ \mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_2(t) + \mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_1(t) \right\} + A_2 \mathring{\eta}_1(x)\mathring{\eta}_1(t)$$

$$+ A_3 \mathring{\eta}_2(x)\mathring{\eta}_2(t) \Big] \sqrt{G(x)G(t)}\, v(t)\, dt \tag{3'}$$

ガ $v \equiv 0$ 以外ノ解ヲ有スルタメノ完全ナル條件ハ

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & A_1 + \frac{1}{2} & -A_2 \\ A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & A_3 & -(A_1 - \frac{1}{2}) \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 & \zeta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_1' & \zeta_2' \end{vmatrix} = 0$$

デアッテ、之ガ満足サレル場合ノ解ハ

$$v(x)=C_1\sqrt{G(x)}\left[\begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & A_1+\frac{1}{2} \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_1' \end{vmatrix}\mathring{\zeta}_2(x)-\begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & -A_2 \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_2' \end{vmatrix}\mathring{\zeta}_1(x)\right]$$

及ビ

$$v(x)=C_2\sqrt{G(x)}\left[\begin{vmatrix} A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & A_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_1 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_1' \end{vmatrix}\mathring{\zeta}_2(x)-\begin{vmatrix} A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & -(A_1-\frac{1}{2}) \\ \eta_1 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' & \zeta_2' \end{vmatrix}\mathring{\zeta}_1(x)\right]$$

ノ内恒等的ニ零デナイモノガアレバ、之デ表ハサレルノ而シテ両式ガ恒等的ニ零デアル場合ニハ

$$v(x)=C_1\sqrt{G(x)}\,\zeta_1(x)+C_2\sqrt{G(x)}\,\zeta_2(x)$$

ガ解デアル。但シ C_1 及 C_2 ハ任意常数ガアッテ

$$\eta_i=\mathring{\eta}_i(b),\quad \zeta_i=\mathring{\zeta}_i(b),\quad \eta_i'=\mathring{\eta}_i'(b),\quad \zeta_i'=\mathring{\zeta}_i'(b)$$

デアル。

3. 簡単ナ例ニツイテ定理ヲ説明スル。

例. $y''=0$ ナル微分方程式ノ二解カラ $a=0$, $b=1$ トシテ $\mathring{\eta}_1(x)$ 及 $\mathring{\eta}_2(x)$ ヲ計算スレバ

$$\mathring{\eta}_1(x)=x \qquad \mathring{\eta}_2(x)=1$$

デアル、而シテ $G(x)=-\lambda$ トスレバ定理9ノ積分方程式ハ

$$v(x)=-\lambda\int_0^x(x-t)\,v(t)\,dt+\frac{\lambda}{2}\int_0^1(x-t)\,v(t)\,dt$$

$$-\lambda\int_0^1 \{A_1(x+t)+A_2xt+A_3\}v(t)\,dt$$

トナル、之が固有解ヲ有スル條件ハ（$\overset{\circ}{\zeta}_1(x)=\dfrac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}}$,

$\overset{\circ}{\zeta}_2(x)=\cos\sqrt{\lambda}x$ デアルカラ）

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & A_1+\frac{1}{2} & -A_2 \\ A_3 & -(A_1+\frac{1}{2}) & A_3 & -(A_1-\frac{1}{2}) \\ 1 & 1 & \dfrac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} & \cos\sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & \cos\sqrt{\lambda} & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$=2\left(A_1^2-A_2A_3-\frac{1}{4}\right)-A_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$$

$$-\left(A_1^2-A_2A_3+\frac{1}{4}+A_1+A_3\right)\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}$$

$$-\left(2A_1^2-2A_2A_3+\frac{1}{2}-A_2\right)\cos\sqrt{\lambda}=0$$

デアル。固有値入ハ此方程式ノ根デアル。

而シテ解ハ一般ニ

$$v(x)=C_1\left\{\Delta_1\cos\sqrt{\lambda}x-\Delta_2\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\right\} \qquad (i)$$

$$v(x)=C_2\left\{\Delta_3\cos\sqrt{\lambda}x-\Delta_4\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\right\} \qquad (ii)$$

デ表ハサレル・但シ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & A_1 + \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ 1 & 0 & \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= (\cos\sqrt{\lambda} - 1)A_1 + \left(\cos\sqrt{\lambda} - \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)A_2 - \frac{1}{2}(1 + \cos\sqrt{\lambda}) \cdots \text{(iii)}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1 - \frac{1}{2} & -A_2 & -A_2 \\ 1 & 1 & \cos\sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\, A_1 + (1 - \cos\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}) \cdot A_2$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{(iv)}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & A_3 \\ 1 & 1 & \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ 1 & 0 & \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\cos\sqrt{\lambda} - \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)A_1 + (\cos\sqrt{\lambda} - 1)A_3$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\cos\sqrt{\lambda} - \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right) \cdots\cdots\cdots \text{(v)}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} A_3 & -(A_1 + \frac{1}{2}) & -(A_1 - \frac{1}{2}) \\ 1 & 1 & \cos\sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \cos\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda})A_1 - \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\, A_3$$

$$- \frac{1}{2}(1 + \cos\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}) \cdots\cdots \text{(vi)}$$

デアル。

次ニ (i)(ii) ノ両式ガ恒等的ニ零トナル場合ヲ考ヘル。

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = 0, \quad \Delta_4 = 0$$

ノ四式カラ A_1, A_2, A_3 ヲ消去シタ行列式ヲ実際ニ計算スルト, 入ノ如何ニ拘ラズ零トナル。故ニ此等四方程式ノ適當ノ三者カラ A_1, A_2, A_3 ヲ入ノ項デ算出ガ出來ル。即チ

$$A_1 = \frac{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}{2(2-2\cos\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}$$

$$A_2 = -\frac{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}{2-2\cos\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}$$

$$A_3 = \frac{\cos\sqrt{\lambda}-\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}}{2-2\cos\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}$$

デアル。而シテ A_1 A_2 A_3 ガ入ニ拘ラズ一定デアルタメニハ

$$\sin\sqrt{\lambda} = 0 \qquad \cos\sqrt{\lambda} = -1$$

ナルコトヲ要スル。故ニ

$$A_1 = 0 \qquad A_2 = 0 \qquad A_3 = -\frac{1}{4}$$

$$\lambda = (2n+1)^2\pi^2 \qquad (n\text{ハ整数})$$

ヲ得ル。

故ニ積分方程式ハ

$$v(x) = -\frac{\lambda}{2}\int_0^1 \left\{|x-t| - \frac{1}{2}\right\} v(t)\,dt$$

トナリ、其ノ固有解ハ $\lambda = (2n+1)^2\pi^2$ ニ對シ

$$C_1\sin(\overline{2n+1}\,\pi x) + C_2\cos(\overline{2n+1}\,\pi x)$$

トナル、但シ n ハ任意ノ整数デアル。

最後ニ $A_1\ A_2\ A_3$ ニ特別ナ値ヲ與ヘタ場合ヲ計算スル。

(i) $A_1 = -\frac{1}{2},\quad A_2 = A_3 = 0$

トスレバ,核ハ

$$k(x,t) = x \qquad x < t < 1$$

$$k(x,t) = t \qquad 0 < t < x$$

トナリ、固有値ノ方程式ハ

$$\cos\sqrt{\lambda} = 0, \qquad \lambda = \left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2$$

固有函数ハ $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x$ トナル。

(ii) $A_1 = A_2 = A_3 = 0$

トスレバ, 積分方程式ハ

$$v(x) = -\frac{\lambda}{2}\int_0^1 |x-t|\, v(t)\,dt$$

トナリ、固有値ノ方程式ハ

$$1 + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + \cos\sqrt{\lambda} = 0$$

即チ $$\left(\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^2\left(1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\,tg\,\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) = 0$$

トナル。而シテ固有解ハ

$$v = c_1\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ 1 & 0 & \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}\cos\sqrt{\lambda}x - c_1\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cos\sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$$

$$= c_1\left\{-\frac{1+\cos\sqrt{\lambda}}{2}\cos\sqrt{\lambda}x - \frac{1}{2}\sin\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x\right\}$$

$$v=C_2\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ p & 0 & \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}\cos\sqrt{\lambda}x-C_2\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \cos\sqrt{\lambda} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$$

$$=C_2\left\{\frac{1}{2}\left(\cos\sqrt{\lambda}-\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)\cos\sqrt{\lambda}x\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(1+\cos\sqrt{\lambda}+\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}\right.$$

ノ何レデモ表ハサレルガ，前者ハ $\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2}=0$ ノトキ恒等的ニ零トナルカラ、後者ノ方ガ一般的デアル、之レヲ書キ改メルト

$$v=c\left\{\left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}+\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\sin\sqrt{\lambda}+1\right)\cos\sqrt{\lambda}x\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sin\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x\right\}$$

トナル。

4. 前款デハ對稱核ノ積分方程式 (3′) ノ解ヲ述ベタガ、次節ノ應用デハ (3′) ニ於テ

$$v(x)=\frac{\sqrt{G(x)}}{b(x)}u(x)$$

ト置イテ得ベキ方程式ガ重要デアル。故ニ定理9.ニ 1ノ置換ヲ施シ且ツ結果ヲ $\mathring{y}_i(x)$, $\mathring{e}_i(x)$ デ表ハセバ次ノ定理ヲ得ル。

<u>定理10</u>. 積分方程式

$$u(x)=\int_{a(c)}^{x}K(x,t)\,G(t)\,u(t)\,dt$$

$$+\int_a^b \left[\mathring{y}_1(x)\left\{\left(A_1-\frac{1}{2}\right)\mathring{y}_2(t)+A_2\mathring{y}_1(t)\right\} \right.$$

$$\left. +\mathring{y}_2(x)\left\{\left(A_1+\frac{1}{2}\right)\mathring{y}_1(t)+A_3\mathring{y}_2(t)\right\}\right]\frac{G(t)}{(b(t))^2}u(t)\,dt \cdots\cdots\cdots (6')$$

が固有解ヲ有スル完全ナル條件ハ

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & A_1+\frac{1}{2} & -A_2 \\ A_3 & -\left(A_1+\frac{1}{2}\right) & A_3 & -\left(A_1-\frac{1}{2}\right) \\ \mathring{y}_1(b) & \mathring{y}_2(b) & \mathring{z}_1(b) & \mathring{z}_2(b) \\ \mathring{y}_1'(b) & \mathring{y}_2'(b) & \mathring{z}_1'(b) & \mathring{z}_2'(b) \end{vmatrix}=0$$

デアッテ，解ハ

$$u(x)=C_1\left[\begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & A_1+\frac{1}{2} \\ \mathring{y}_1(b) & \mathring{y}_2(b) & \mathring{z}_1(b) \\ \mathring{y}_1'(b) & \mathring{y}_2'(b) & \mathring{z}_1'(b) \end{vmatrix}\mathring{z}_2(x)-\begin{vmatrix} A_1-\frac{1}{2} & -A_2 & -A_2 \\ \mathring{y}_1(b) & \mathring{y}_2(b) & \mathring{z}_2(b) \\ \mathring{y}_1'(b) & \mathring{y}_2'(b) & \mathring{z}_2'(b) \end{vmatrix}\mathring{z}_1(x)\right]$$

$$u(x)=C_2\left[\begin{vmatrix} A_3 & -\left(A_1+\frac{1}{2}\right) & A_3 \\ \mathring{y}_1(b) & \mathring{y}_2(b) & \mathring{z}_1(b) \\ \mathring{y}_1'(b) & \mathring{y}_2'(b) & \mathring{z}_1'(b) \end{vmatrix}\mathring{z}_2(x)-\begin{vmatrix} A_3 & -\left(A_1+\frac{1}{2}\right) & -\left(A_1-\frac{1}{2}\right) \\ \mathring{y}_1(b) & \mathring{y}_2(b) & \mathring{z}_2(b) \\ \mathring{y}_1'(b) & \mathring{y}_2'(b) & \mathring{z}_2'(b) \end{vmatrix}\mathring{z}_1(x)\right]$$

ノ内恒等的ニ零デナイモノデ表ハサレル。而シテ此等両式ガ恒等的ニ零デアル場合ニハ

$$u(x)=C_1\mathring{z}_1(x)+C_2\mathring{z}_2(x)$$

ガ解デアル。

（注意）此ノ定理ハ次ノ性質ヲ用フレバ定理9カラ容易ニ

証明シ得ラレル。

$$\mathring{y}_i(x) = b(x)\,\mathring{\eta}_i(x)$$

$$\mathring{y}_i'(x) = b'(x)\,\mathring{\eta}_i(x) + b(x)\,\mathring{\eta}_i'(x)$$