



Title	Lie 環ノ derivation II
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 157, p. 167-170
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74622
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

696. Lie 環 / derivation II

吉田 耕作 (阪大)

finite rank, Lie 環 R が単純 ideal, 直和 + リトスル: $R = R_1 + R_2 + \dots + R_k$. R_i 中, 幾ツカハ可換 (rank 1) アアリ, 残りハ準単純ナル (rank > 1 ナル単純 Lie 環ハ準単純). 故ニ R ハ準単純 + ideal h_y ト核心子トノ直和ニナル: $R = h_y + \mathfrak{z}$.

Lemma 3. $R = h_y + \mathfrak{z}$ が Lie 環 S ノ部分環 + リトスル。 $x \in S$ が $[x, R] \subseteq R$ ヲ満足スルトスルト, 此ノ x = 對シテ.

$$[x - x_1, h_y] = 0$$

ヲ満足スル如キ $x_1 \in h_y$ が unique ト定ル。

証明: 先ヅ $h_y = R^2$ ナル。即チ h_y ノ任意ノ要素 + $[y, z]$ ($y, z \in R$) ノ如キニ / 一次結果トシテ得ラレル。何者、 $R^2 = h_y^2$ ナカラ $h_y = h_y^2$ ヲ示ストヨイガ; h_y ノ ideal h_y^2 中 $h_y =$ 一致シ + イトスルト h_y / h_y^2 可換ナ

事カラ準單純ナ $\mathfrak{h}_y$ ガ可換 ideal $\neq 0$ ナ含ムコト = ナツテ不合理デカラ。

諸 $x \in \mathcal{R}$ トハ S ノ部分環 $\mathcal{R}'$ ト generate $\mathcal{R}$ ハ $\mathcal{R}'$ ノ ideal = ナル。従ツテ $T_x \cdot y = [x, y]$, $y \in \mathcal{R}$ ナル T_x ハ $\mathcal{R}$ ノ derivation。然ラバ
 $T_x \cdot [y, z] = [T_x \cdot y, z] + [y, T_x \cdot z] = \text{ヨツテ}$
 $T_x \cdot \mathfrak{h}_y^2 \subseteq \mathfrak{h}_y$ 。即チ T_x ハ $\mathcal{R}^2 = \mathfrak{h}_y^2 = \mathfrak{h}_y$ ノ derivation = ナル。 $\mathfrak{h}_y$ ガ準單純デカラ

$$T_x \cdot y = [x, y], \quad y \in \mathfrak{h}_y$$

ナル如キ $x_i \in \mathfrak{h}_y$ ガ存在スル (定理 1 = ヨル)。 x_i ガ unique = 定ルコトハ $\mathfrak{h}_y$ ノ核心 $= 0$ ナルコトカラワカル。 — 了リ —

定理 4. 準單純ナ $\mathcal{R}$ ガ Lie 環 S ノ部分環ナルトキ $\mathcal{R}$ ナ ideal = スル如キ maximal subring of S ナ $\mathcal{R}'$ トスル

$$\begin{cases} \mathcal{R}' = \mathcal{R} + \mathcal{R}_1 & (\text{直和}) \\ \mathcal{R}_1 \text{ ハ } S \text{ ノ要素デ } \mathcal{R} \text{ ノ各要素ト可換ナニ、全体。} \end{cases}$$

次 = S ト行列ノ Lie 環トスル、 S ノ部分環 $\mathcal{R}$ ガ 完全可約 ナリトスル: $\mathcal{R}$ ナ reduce シタト考ヘテ

$$\mathcal{R} = \left\| \begin{array}{ccc} \mathcal{R}_1 & & \\ & \mathcal{R}_2 & 0 \\ & 0 & \ddots \\ & & & \mathcal{R}_k \end{array} \right\|,$$

$$R_1 = R_2 = \dots = R_{k_1}, R_{k_1+1} = R_{k_1+2} = \dots = R_{k_2}, \dots,$$

$$R_{k_{m-1}+1} = R_{k_{m-1}+2} = \dots = R_{k_m} = R_k \text{ トシ且ツ } R_{k_i} \text{ ハ}$$

$R_{k_i} (i \neq j) = \text{inequivalent}$ トス。 R_i ハ 既約 + Lie 環ヲカテ (Cartan 1 定理)

$$\begin{cases} R_i = R_i^2 + \beta_i, & R_i^2 \text{ 準單純} \\ \beta_i = \text{単位行列 } E_i, \text{ 常数倍ノ形ノ } \epsilon_i, \epsilon_i \neq 0 \end{cases}$$

∴

故ニ⁽¹⁾ $R = R^2 + \beta$, R^2 ハ 準單純且ツ 核心子ハ

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha_1 E_1 & & \\ & \alpha_2 E_2 & 0 \\ & 0 & \ddots \\ & & & \alpha_{k_1} E_{k_1} \end{array} \right\|$$

$$, \text{ 形ヲ } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k_1}, \alpha_{k_1+1} = \alpha_{k_1+2} = \dots$$

$$= \alpha_{k_2}, \alpha_{k_{m-1}+1} = \alpha_{k_{m-1}+2} = \dots = \alpha_{k_m} = \alpha_k.$$

格 $X \in S$ ガ $[X, R] \subseteq R$ ヲ満足スルトセバ上ノ

Lemma カラ $X = X_1 + Z$, $X_1 \in R^2$, $Z \in S$ 非 $[Z, Q^2] = 0$ 。所ガ R_i ハ何レモ *irreducible* ナカラ *matrix algebra*, 一般論カラ斯ルズハ又明ニ $[Z, \beta] = 0$ ヲ満足シ従ッテ $[Z, R] = 0$ 。

故ニ

(1) R_i^2 ノ 行列ハ全ク Spur 0 ナコトニ注意。

定理 5. 完全可約な *matrix Lie 環* $\mathcal{R}$ が与えられ
 $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}$ の *ideal* $\mathcal{R}_1$ を含むような *maximal matrix*
Lie 環 $\mathcal{R}'$ は

$$\begin{cases} \mathcal{R}' = \mathcal{R}^2 + \mathcal{R}_1 \text{ (直和)} \\ \mathcal{R}_1 \text{ は } \mathcal{R}_1 \text{ 全体、要素は可換な行列の全体。} \end{cases}$$

注意. H. Zassenhaus / *Gruppentheorie* / 7
 見て居りマシタラ、P. 42

其の核心が単位要素のみヨリナリ、且ツ其の *automor-*
phism group が *inner automorphism*
group と一致スル如キ群ヲ *abgeschlossen* デア
 ルト呼ビ且

可換デアイ單純な群の *automorphism group* は
abgeschlossen ナコトヲ示シテアリマシタ。

定理ヨト密接な関係カアル訳デアリマス。