OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Metric space ノ local property ニ就イテ
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 159, p. 218-234
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74630
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

674. Metric space ノ local property ニ就イテ

角谷 靜夫 (阪大)

Locally compact metric space R が與ヘラレタトキ、R ノ metric ヲ ツケカヘテ R ヲ uniformly locally compact ニスルコトハ出來ナイデアロウカ？

即チ R が metric space デソノ metric が $d(x, y)$ デ與ヘラレテヰルトセヨ。R が locally compact デアルト云フノハ任意ノ R ノ点 a ニ對シテ $\delta = \delta(a) > 0$ が定マッテ $\overline{S(a, \delta)}$ が compact ニナルト云フコトデアル。但シ $S(a, \delta)$ ハ $d(a, x) < \delta$ ナル

Rノ点ノ全体ノ集合デ$\overline{S(a,\delta)}$ハソノclosureヲ表ハス。コンニ$\delta=\delta(a)$ハ一般ニハaト共ニ変化スル量デaがRヲ動クトキノ$\delta(a)$ノ下限ハ0デアルカモ知レナイ。

コンデ問題ニシヨウトスルノハRノmetric $d(x,y)$ヲソレトequivalentナ$d^*(x,y)$デオキカヘテ、コノ新シイmetric $d^*(x,y)$ニ対シテ$\delta^*>0$ヲ定メテ、$\overline{S^*(a,\delta^*)}$が$R$ノスベテノ点$a$ニ対シテ（同ジ$\delta^*$デ！）compactニナル様ニスルコトガ出来ルカト云フコトデアル。δ^*がaニ無関係ト云フ所ガ問題ニナルノデアルカラδ^*ニノトシテモヨイ。

同様ナ問題ハ他ノlocal propertyニ対シテモオコル。例ヘバlocal separabilityニ関シテハ如何？local connectednessニ関シテハ如何？local separabilityニ関シテハ既ニAlexandroff, Sierpinskiノ研究ニヨリRがmetric, locally separableデアレバRがopen且ツclosed+separable+部分R_αノ和ニ分レルコトガワカッテヰルカラx,yが同ジR_αニ属スルトキ$d^*(x,y)=\min(1,d(x,y))$, x,yが異ルR_αニ属スルトキ$d^*(x,y)=1$トオケバヨイ。(1)

---

(1) P. Alexandroff:
Math. Ann., 92(19)
W. Sierpinski: Sur les espaces métriques localement séparables,
Fund. Math., 21(1933)
角谷：
コノ結果ハ私がSierpinskiノ論文ヲ知ラズニ出シタモノデアリマスガ、後デSierpinskiが同ジ結果ヲ雑誌ニ出シテヰルノヲ知リマシタ。

次= R が locally connected デアルトキハ任意ノ $x, y \in R$ = 對シテ $x, y \in E \subset R$ ナル connected set E ヲ考ヘテカゝルアラユレ E ニ對スル $\delta(E)$ ノ下限ト / トノ小サイ方ヲ $d^*(x, y)$ トオケバヨイ。

但シ $\delta(E)$ ハ E ノ diameter デ $x, y \in E$ ナルトキノ $d(x, y)$ ノ上限トシテ定義サレル。又特= $x, y \in E \subset R$ ナル connected set E が+イトキハ $d^*(x, y) = /$ トオケバヨイ。先ヅ $d^*(x, y)$ が metric ノ三ツノ Axiom ヲ満足スルコトハ殆ンド明カデアリ、コレが $d(x, y)$ ト equivalent デアルコトハ R が locally compact デアルコトカラ容易=得ラレル。コノ $d^*(x, y)$ =對シテハ任意ノ $a \in R$ 及ビ $\delta^* \leqq /$ =對シテ $S^*(a, \delta^*)$ シタガッテ $\overline{S^*(a, \delta^*)}$ が connected =ナル。實際 $x \in S^*(a, \delta^*)$ +ラバ $a, x \in E_x \subset R$, $\delta(E_x) < \delta^*$ ナル如キ connected set E_x が存在シ且ツ任意ノ $y \in E_x$ ハ $d^*(a, y) \leqq \delta(E_x) < \delta^*$ ナル故 $E_x \subset S^*(a, \delta^*)$. ヨッテ $S^*(a, \delta^*)$ ハカゝル E_x ノ和デアルカラ connected.

次= locally compact ノ場合=コノ問題が可能デアルコトヲ証明スルノデアルが同様ノ方法デモウ少シ一般ナコトが証明出來ルノデコノタメニ定理ヲ一般ノ形デ述ベテオク。

<u>定理1</u>　P ヲ hereditary +性質トスルトキ、若シ metric space R が locally =性質 P ヲ満足シテオレバ(即チ任意ノ $a \in R$ =對シテ $\delta = \delta(a) > 0$ が定マリ

$S(a,\delta)$ガ性質Pヲモツナラベ) Rノ metric $d(x,y)$ ヲコレト equivalent ナ $d^*(x,y)$ デオキカヘテ、此ク シテ得ラレタ $d^*(x,y)$ ニ對シテ $S^*(a,1)$ ガ任意ノ $a\in R$ ニ對シテ性質Pヲモツテホルヤウニスルコトガ出 來ル。

コンニーツノ性質 P ガ hereditary デアルト云フノハ一ツノ集合Eガ性質Pヲモツトキ E ノ任意ノ部分集合 E_1 ガ又性質Pヲモツコトヲ云フ。例ヘバ E ノ closure $\overline{E}$ (R ニ於ケル closure!) ガ compact デアルト云フ性質ハ hereditary デアル。又E ノ濃度ガアル cardinal number ヨリ小サイト云フコト。E ガ metric separable デアルト云フコト。等モ同様ニ hereditary デアル。(2)

---

(2) Hausdorff ノ第二可附番公理ヲ滿足スルト云フ性質ハ hereditary デアルガ dense ナ可附番無限部分集合ヲ持ツト云フ性質ハ hereditary デハナイ!

実際 $|z|\leqq 1$ ナル complex number ノ集合Eヲ考ヘ、$|z_0|<1$ ナル点ノ近傍ハ普通ノ如ク $|z-z_0|<\varepsilon$ ニテ定義シ、$|z_0|=1$ ナル点ノ近傍ハ $E_2(|z-z_0|<\varepsilon, |z|<1)+(z_0)$ ニヨッテ定義スレバ Eハ dense ナ可附番無限集合ヲモツガ、$|z|=1$ ナル点全体ヨリナルE ノ部分集合 E_1 ハモハヤカヽル性質ヲモタナイ。

$E\subset H\subset R$ ナル connected set H ガ存在スルト云フ E ノ性質ハ hereditary デアルガコレニヨッテ local connectedness ヲ定義スルコトハ出来ナイ!

定理1ヲ証明スルタメニ先ヅRノ各点aニ對シテ$S(a,\delta)$ガ性質Pヲ持ツ如キ$\delta=\delta(a)$ノ上限$r(a)$ヲ考ヘル。$r(a)$ガ少クトモ一ツノ点aニテ∞トナレバ他ノ点ニテモ∞トナルノデアルカラ、コノトキハ$d^*(x,y)=d(x,y)$, $\delta^*=1$トオケバ$S^*(a,\delta^*)$ハ任意ノ$a\in R$ニ對シテ性質Pヲモツ。ヨッテRノ各点ニテ$r(a)<\infty$ト假定シテモ差支ナイ。

コノ$r(a)$ガaノ連続函数デシカモ

$$|r(a)-r(b)|\leqq d(a,b) \qquad (1)$$

ヲ満足シテヰルコトハ殆ンド明カデアロウ。

此ノ如ク考ヘレバ定理1ヲ証明スルニハ次ノ定理2ヲ証明スレバ十分ナコトガワカル。

<u>定理2</u> Metric space R(ソノmetric $d(x,y)$)ノ各点aニ對シテ$0<r(a)<\infty$ナル$r(a)$ガ定マリコレガ條件(1)ヲ満足シテ居レバ$d(x,y)$トequivalentナmetric $d^*(x,y)$ヲ適當ニトッテ任意ノ$a\in R$ニ對シテ

$$S^*(a,1)\subset S\left(a,\frac{r(a)}{2}\right)$$

トナル様ニスルコトガ出來ル。(2)

証明ハ二通リアル。何レモ方法トシテ興味ガアルカラニツトモ記スコトニスル。

---

(3) $S(a,r(a))$ヲ考ヘズニ$S\left(a,\frac{r(a)}{2}\right)$ヲ考ヘタノハ$S(a,r(a))$ガ必ズシモ性質Pヲモタヌカラデアル。($d<r(a)$ナラベ$S(a,d)$ハ性質Pヲモツ!)

第一法：　R ノ二点 a, b が $d(a,b) < r(a)$, $d(a,b) < r(b)$ ヲ満足スルトキ a, b ハ〝十分近イ〟ト呼ビ $a * b$ ニテコノ関係ヲ表ハス。(4)　$a * a$ ナルコトハ明カ。

又 $a * b$ ナラバ $b * a$ デアル。シカシ $a * b$, $b * c$ デモ必ズシモ $a * c$ トハナラナイ。a ヲ定メタトキ $a * b$ ナル b 全体ノ集合 $U^*(a)$ ハ a ヲ内点トシテ含ム集合デアル。(5)　実際 $S\left(a, \frac{1}{2} r(a)\right) \subset U^*(a)$ ガ成立スル。何トナレバ $x \in S\left(a, \frac{1}{2} r(a)\right)$ ナラバ $d(a,x) < \frac{1}{2} r(a) < r(a)$, 又(1)ヨリ $r(x) \geqq r(a) - d(a,x) > 2d(a,x) - d(a,x) = d(a,x)$ ヨッテ $a * x$, $x \in U^*(a)$.

次ニ R ノ二点 a, b ニ対シテ $a * a_1$, $a_1 * a_2$, ……, $a_n * b$ ナル如キ有限個ノ R ノ点 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ガ存在スルトキ a, b ハ〝相繋ガル〟ト呼ビ $a * * b$ ニテコノ関係ヲ表ハス。$a * b$ ナラバ $a * * b$ デアル。又 $a * * b$ ナラバ $b * * a$ デアリ、$a * * b$, $b * * c$ ナラバ $a * * c$ デアル。a ヲ定メタトキ $a * * b$ トナル b 全体ノ集合 $U^{**}(a)$ ハ a ヲ含ム open 且ツ closed ナ集合デアル。先ガ $U^{**}(a)$ ガ open ナルコトハ $b \in U^{**}(a)$ ナラバ $S\left(b, \frac{1}{2} r(b)\right) \subset U^*(b) \subset U^{**}(a)$

---

(4)　コレハ W. Sierpinski ノ考ヘヲ用ヒタ。

W. Sierpinski: Sur les espaces métriques localement séparables, Fund. Math., 21 (1933)

(5)　実際ハ $U^*(a)$ 自身ガ開集合ニナルコトモ容易ニ証明出来ルノデアルガコレハ直接必要デハナイ。

ナルコトヨリ容易ニワカル。($U^*(b) \subset U^{**}(a)$ ナルコトハ $a \ast\ast b$, $b \ast\ast c$ ナラバ $a \ast\ast c$ トナルコトヨリ明カ)。次ニ $U^{**}(a)$ が closed ナルコトヲ云フタメニハ R が互ニ共通点ノナイ open set $U^{**}(a)$ ノ和トナルコトヲ示セバヨイ。コノタトニハ任意ノ a, b ニ対シテ $U^{**}(a) = U^{**}(b)$ トナルカ又ハ $U^{**}(a) \cdot U^{**}(b) = 0$ トナルコトヲ示セバヨイ。然ルニ実際 $c \in U^{**}(a) \cdot U^{**}(b)$ ナラバ $a \ast\ast c$, $c \ast\ast b$ トナリコレヨリ $a \ast\ast b$, $U^{**}(a) = U^{**}(b)$ ヲ得ルカラコレハ明カデアル。

此ノ如クRハ互ニ共通点ノナイ open 且ツ closed ナ集合 U^{**} ノ和トナッタノデアルカラコノ各ノ U^{**} ニ対シテ所要ノ条件ヲ満足スル metric $d^*(x, y)$ ガ定義サレレバヨイ。$d^*(x, y)$ ハ ≤ 1 ナル如ク取ルコトガ出来ルカラ[6] x, y ガ異ル U^{**} ニ属スルトキ $d^*(x, y) = 1$ トオケバヨイノデアル。

次ニ一ツノ U^{**} 内ニテ所要ノ条件ヲ満足スル $d^*(x, y)$ ヲ定義シヨウ。

任意ノ $x, y \in U^{**}$ ニ対シテ $x \ast a_1$, $a_1 \ast a_2$, ……, $a_n \ast y$ ナル如キ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ガアルカラコノ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ニ対シテ

$$d^*(x, y) = 3 \cdot \text{untere Grenze} \sum_{i=0}^{n} \frac{d(a_i, a_{i+1})}{\min(r(a_i), r(a_{i+1}))} \qquad (2)$$

---

(6) $d^*(x, y) > 1$ ナラバ $d^*(x, y) = 1$ トオキカヘル!

トオク。但シ $a_0 = x$, $a_{n+1} = y$ トオイタ。又 Untere Grenze ハカンルアラユル $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ $(n=1,2,\cdots)$ ニ對スル下限ヲ取ルモノトスル。

此ノ如ク定義サレタ $d^*(x,y)$ が

$$d^*(x,y) = d^*(y,x) \geqq 0$$

$$d^*(x,y) + d^*(y,z) \geqq d^*(x,z)$$

ヲ満足スルコトハ明カデアルカラ

$$x \neq y \longrightarrow d^*(x,y) > 0 \qquad (3)$$

$$d^*(x,y) < 1 \longrightarrow d(x,y) < \frac{1}{2} r(x) \qquad (4)$$

$$\lim_{n\to\infty} d^*(x,y_n) = 0 \longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x,y_n) = 0 \qquad (5)$$

ヲ満足シテヰルコトヲ証明スレバヨイ。コノタメニハ

$$d(x,y) < \frac{1}{2} r(x) \longrightarrow d^*(x,y) \leqq \frac{3\,d(x,y)}{r(x) - d(x,y)} \qquad (6)$$

$$d^*(x,y) \geqq \min\left(1, \frac{2}{r(x)} d(x,y)\right) \qquad (7)$$

ヲ証明スレバ十分デアルノ何トナレバ

(3): $x \neq y \longrightarrow d(x,y) > 0$, (7) ヨリ $d^*(x,y) > 0$

(4): $d^*(x,y) < 1$ ナラバ (7) ヨリ $\frac{2}{r(x)} d(x,y) < 1$,

$$d(x,y) < \frac{1}{2} r(x)$$

(5): $\lim_{n\to\infty} d^*(x,y_n) = 0$ ナラバ十分大キイ n ニ對シテ

$d^*(x,y_n) < 1$

ヨッテカンルn=對シテ (7) ヨリ $\frac{2}{r(x)} d(x,y_n) < d^*(x,y_n)$,

$$d(x,y_n) < \frac{r(x)}{2} \cdot d(x,y_n) \to 0$$

逆ニ $\lim_{n\to\infty} d(x, y_n) = 0$ ナラバ十分大キイ n ニ対シテ

$$d(x, y_n) < \frac{1}{2} r(x)$$

ヨッテカクルnニ対シテ (6) ヨリ

$$d^*(x, y_n) \leqq \frac{3\, d(x, y_n)}{r(x) - d(x, y_n)} \longrightarrow 0$$

(6) ノ証明: $d(x, y) < \frac{1}{2} r(x)$ トル故 $x * y$、ヨッテ (2) ニ於テ $n=1$, $a_1 = y$ トオケバ

$$d^*(x, y) \leqq \frac{3d(x, y)}{\min(r(x), r(y))} \leqq \frac{3d(x, y)}{r(x) - d(x, y)}$$

(7) ノ証明: $d(x, a_i) < \frac{1}{2} r(x)$, $i = 1, 2, \cdots\cdots, n$ ナラバ

$$r(a_i) \leqq r(x) + d(x, a_i) < \frac{3}{2} r(x)$$

$(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$

ヨッテ

$$3 \sum_{i=0}^{n} \frac{d(a_i, a_{i+1})}{\min(r(a_i), r(a_{i+1}))} \geqq 3 \cdot \frac{2}{3r(x)} \sum_{i=0}^{n} d(a_i, a_{i+1})$$

$$\geqq \frac{2}{r(x)} d(x, y)$$

又 $d(x, a_i) \geqq \frac{1}{2} r(x)$ トル a_i ガアレバソノ最初ノモノヲ a_{p+1} トオク。

$(0 \leqq p \leqq n)$ $\quad r(a_i) \leqq r(x) + d(x, a_i) < \frac{3}{2} r(x)$

$(i = 1, 2, \cdots\cdots, p)$

故ニ

$$3 \sum_{i=0}^{n} \frac{d(a_i, a_{i+1})}{\min(r(a_i), r(a_{i+1}))} \geqq 3 \sum_{i=0}^{p} \frac{d(a_i, a_{i+1})}{\min(r(a_i), r(a_{i+1}))}$$

$$\geqq 3 \cdot \frac{2}{3r(x)} \sum_{i=0}^{p} d(a_i, a_{i+1}) \geqq \frac{2}{r(x)} d(x, a_{p+1})$$

$$\geqq \frac{2}{r(x)} \cdot \frac{r(x)}{2} = 1$$

第二法：　コレハ直接ニ $d^*(a,b)$ ヲ定義スル方法デアル。先ヅ $d(a,b) \leqq 1$, $r(a) \leqq 1$ ガ任意ノ $a, b \in R$ ニ対シテ成立スルト仮定シテモ一般性ヲ失ハナイ。(17) コノ $d(a,b)$, $r(a)$ ヲ用ヒテ

$$d^*(a,b) = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{r(a)^2} + \frac{1}{r(b)^2} - \frac{2\cos d(a,b)}{r(a)\,r(b)}} \qquad (8)$$

トオク。コノ $d^*(a,b)$ ガ求ムル metric デアルコトヲ証明シヨウ。先ヅ $d^*(a,b)$ ガ距離ノ三ツノ axioms ヲ満足スルコトヲ示スニハ三角形ノ関係ガ成立スルコトガケヲ示セバヨイ。コレハ直接計算ニヨツテモ容易ニタシカメラレルガ次ノ様ニ考ヘルノモ面白イデアロウ。

a, b, c ヲ R ノ任意ノ三点トセヨ。Euclid ノ三次元空間 R^3 内ニ原点 O ヲ中心トスル半径 1 ノ球面 S ヲ考ヘル。球面 S 上ニ三点 A, B, C ヲ $\overset{\frown}{AB} = d(a,b)$, $\overset{\frown}{BC} = d(b,c)$, $\overset{\frown}{AC} = d(a,c)$ ガ成立スル様ニトル。コヽニ $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}$ ハ夫々 A, B; B, C; A, C ヲ通ル大円ノ劣弧ノ長サデアル。此ノ如キ三点ヲ取ルコトガ出来ルコトハ $d(a,b) + d(b,c) \geqq d(a,c)$ ニテ且ツ $d(a,b), d(b,c), d(a,c) \leqq 1$ トナツテヰルコトヨリ明カデアル。

---

(17)　$d(a,b) > 1$, $r(a) > 1$ トナルトキニハ $d(a,b) = 1$, $r(a) = 1$ トオキカヘレバヨイ。

次= OA, OB, OC ヲ延長シテ、ソノ延長上= A^*, B^*, C^* ヲ夫々 $\overline{OA^*}=\frac{4}{r(a)}$, $\overline{OB^*}=\frac{4}{r(b)}$, $\overline{OC^*}=\frac{4}{r(c)}$ トナル様=トル。$r(a), r(b), r(c)$ ≦/ デアルカラ A^*, B^*, C^* ハ球外ノ点デアル。コノ A^*, B^*, C^* =對シテ

$$d^*(a,b)=\overline{A^*B^*},\quad d^*(b,c)=\overline{B^*C^*},\quad d^*(a,c)=\overline{A^*C^*}$$

トナルコトハ d^* ノ定義ヨリ明カデアル。ヨッテ三角形ノ関係

$$d^*(a,b)+d^*(b,c)\geqq d^*(a,c)$$

ガ成立スルコトハ明カデアル。

次= $d^*(a,b)$ ガ $d(a,b)$ ト equivalent ナ metric デアルコトハ $d^*(a,b)$ ノ定義(8)カラ容易ニ計算=ヨッテ示スコトガ出来ルガ次ノ如ク考ヘルコトモ出来ル。上記ノ如ク O, A, B, A^*, B^* ヲトレバ

$$d^*(a,b)=\overline{A^*B^*}\geqq \overline{OA^*}\cdot \sin AOB$$

$$=\frac{4}{r(a)}\cdot\sin d(a,b)\geqq \frac{4}{r(a)}\cdot\frac{d(a,b)}{2}=\frac{2}{r(a)}\cdot d(a,b)\cdots(9)$$

又. OB^* 上又ハソノ延長上= A' ヲ $\overline{OA'}=\overline{OA^*}$ トル如クトレバ

$$d^*(a,b)=\overline{A^*B^*}\leqq \overline{A^*A'}+\overline{A'A^*}=4\cdot\frac{1}{r(a)}\cdot 2\sin\frac{d(a,b)}{2}$$

$$+4\left|\frac{1}{r(a)}-\frac{1}{r(b)}\right|\leqq \frac{4}{r(a)}d(a,b)+\frac{4d(a,b)}{r(a)\cdot r(b)}$$

$$\leqq \frac{4d(a,b)}{r(a)}\left\{1+\frac{1}{r(a)-d(a,b)}\right\}\cdots\cdots\cdots(10)$$

(9), (10) ヨリ $d^*(a,b)$ ト $d(a,b)$ トガ equivalent ナコトガワカル。又 (9) ヨリ $d^*(a,b)<1$ ナラバ $d(a,b)<\frac{1}{2}r(a)$ ナルコトヲ得ルカラ定理ノ証明ハ完結スル。（証明終）

コレデ我々ノ問題ハ一先ヅ解決ガツイタノデアルガ次ニ local completeness ヲ問題トシヨウ。上記ノ定理ニヨレバ metric space R ガ locally complete デアレバ適當ニ metric ヲカヘレバ uniformly locally complete ニナルマウニ思ハレルガ、completeness ヲ定義スル fundamental sequence ソノモノガ metric ニヨッテ定義サレテヰルノデアレカラ d^* ニ関スル fundamental sequence ハ d ニ関スル fundamental sequence ニナッテヰナイカモ知レナイト云フオソレガアル。ヨッテ問題ハ困難トナル。シカシ實際 d^* ニ関スル fundamental sequence ガ d ニ関スル fundamental sequence ニナッテヰルコトガ証明出來ルカラ R ハ d^* ニ関シテ uniformly complete ニナル。

次ニコレヲ証明シヨウ。$\{x_n\}$ ガ d^* ニ関スル fundamental sequence デアレバ適當ニ n_0 ヲトレバ $d^*(x_{n_0},x_n)<1$ ガ $n\geq n_0$ ニ對シテ成立スル。ヨッテ(7) 又ハ (9) ヨリ

$$d(x_{n_0},x_n)\leqq\frac{r(x_{n_0})}{2}d^*(x_{n_0},x_n)<\frac{1}{2}r(x_{n_0})$$

トナル。故ニ再ビ(7) 又ハ (a) ニヨリ $m,n\geq n_0$ ニ對シテ

$$d(x_m, x_n) \leqq \frac{r(x_n)}{2} d^*(x_m, x_n)$$

$$\leqq \frac{r(x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_n)}{2} d^*(x_m, x_n)$$

$$< \frac{3}{4} \cdot r(x_{n_0}) \cdot d^*(x_m, x_n)$$

が成立スル。ヨッテ $\{x_n\}$ ハ d ニ関シテ fundamental sequence トナリ R ガ d ニ関シテ locally complete（ソノ半径ノ上限 $r(x)!$）ナルコトニヨリ、アル $x_0 \in R$ ガ存在シテ $d(x_n, x_0) \to 0$. ヨッテ又 $d^*(x_n, x_0) \to 0$. 故ニ R ハ d^* ニ関シテ Uniformly locally complete デアル。

コゝデ注意シタイコトハ R ガアル metric d^* ニ関シテ uniformly locally complete デアレバ R ガ d^* ニ関シテ complete ニナルコトデアル。（コノコトハ殆ンド説明スルマデモナイ）。ヨッテ結局、metric space R ガ locally complete デアレバ R ノ metric ヲ適當ニツケカヘレバ R ガ complete ニナルコトガワカッタ。

最後ニ locally compact metric space R ガ與ヘラレタトキ、R ノ metric d ヲソレト equivalent ナ d^* デオキカヘテ R ノ任意ノ点 a 及ビ任意ノ正数 M ニ對シテ $\overline{S^*(a, M)}$ が compact ニナル様ニスルコトが出來ナイカ、ト云フコトヲ考ヘル。

コレが可能デアルタメニハ R ハ separable デナケレバ

ナラナイ。シカモ逆ニ R が separable ナラバコレハ常ニ可能デアル。コレヲ証明スルニハ次ノ Alexandroff-Urysohn ノ定理[8]ヲ用フレバヨイ。

定理: locally compact, separable ナル Hausdorff 空間ハコレニ一点ヲツケ足シテ compact ニスルコトガ出来ル。

R ニ一点 ∞ ヲツケ足シテ compact, separable ナ空間 R^* ヲ作ッタトセヨ。R^* ハ metrisable デアル。コノ metric ヲ d トスレバ R ノ任意ノ二点 a, b ニ対シテ $d^*(a, b)$ ハ

$$d^*(a, b) = d(a, b) + \left| \frac{1}{d(a,\infty)} - \frac{1}{d(b,\infty)} \right|$$

ニヨッテ定義サレル。コレガ所要ノ性質ヲモツコトハ容易ニタシカメルコトガ出来ル。

同様ナコトハ hereditary デ且ツ finite additive ナ性質 P ニ対シテモ成立スル。但シ性質 P ガ finite additive デアルト云フノハ $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ ガ各々性質 P ヲモテバ $E_1 + E_2 + \cdots\cdots + E_n$ モ亦ノ性質 P ヲモツコトヲ云フ。

定理3 P ヲ hereditary 且ツ finite additive ナ性質トスルトキ若シ metric space R が separable

---

[8] P. Alexandroff et P. Urysohn: Memoire sur les espaces compactes, Verh. Vet. Amsterdam (1929)

テ且ツ locally = 性質Pヲ満足シテ居レバ R ノ metric d ヲコレト equivalent ナ d^* デオキカヘテ、此クシテ得テレタ d^* = 對シテ $S^*(a, M)$ が任意ノ $a \in R$ 及ビ任意ノ正數 M = 對シテ性質Pヲモッテキルヤウニスルコトが出來ル。

証明: R ノ各点 a = 對シテ $r(a)$ ヲ定理1ノ場合ト同様ニ定義スル。$r(a)$ が少クトモ一ツノ点 a = テ ∞ トナルトキハ定理ハ明カデアルカラ R ノ各点ニテ $r(a) < \infty$ ト假定スル。定理3ヲ証明スルニハ次ノ定理4ヲ証明スレバ十分デアル。

<u>定理4</u> separable metric space R (ソノ metric $d(x, y)$) ノ各点 a = 對シテ $r(a) > 0$ が定義サレタトキハ R ノ metric $d(x, y)$ ヲソレト equivalent ナ $d^*(x, y)$ デオキカヘテ、任意ノ $a \in R$ 及ビ任意ノ正數 M = 對シテ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n \in R$ が定マッテ

$$S^*(a, M) \subset \sum_{i=1}^{n} S(a_i, \alpha_i r(a_i)), \quad 0 < \alpha_i < 1 \qquad (11)$$

トナル様ニスルコトが出來ル。但シ S, S^* ハ夫々 metric d, d^* = 関スル sphere ヲ表ハス。

証明: R ノ各点 a = 對シテ $S(a, \frac{1}{2} r(a))$ ヲ考ヘル。R ハ separable デアルカラ a_n $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ適當ニトレバ

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} S(a_n \frac{1}{2} r(a_n))$$

トナル。今

$$D_n=\sum_{i=1}^{n} S\left(a_i,\left(1-\frac{1}{2^i}\right)r(a_i)\right) \qquad n=1,2,\cdots\cdots$$

ヲ考ヘレバ $\overline{D_n}\subset D_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ =テ且ツ $R=\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ デアル。

ヨッテ $x\in D$, ナルトキ $f(x)=1$, $x\in D_n-\overline{D_{n-1}}$ ナルトキ $n-1\leqq f(x)\leqq n$ ナル如キ R デ定義サレタ連続函数 $f(x)$ が存在スル。今 $f_n(x)=\max(n, f(x))$ トオキ

$$d^*(x,y)=d(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\left|f_n(x)-f_n(y)\right| \qquad \cdots\cdots\cdots (12)$$

トオケバコレガ求ムル d^* デアル。

先ヅ (12) ノ右辺ノ無限級数ガ x, y ヲ定メレバ有限デ切レルコトヲ注意シヨウ。ソレハ x, y ヲ定メルト十分大キイ n =対シテ $x, y\in D_n$ トナリ、$f_n(x)\equiv n$, $x\in D_n$ デアルカラ $f_n(x)=f_n(y)$ トナルカラデアル。$d^*(x,y)$ が metric ノ三ツノ axiom ヲ満足スルコト及ビ $d(x,y)$ ト equivalent ナ metric デアルコトハ殆ンド明カデアル。

次ニ (11) ガ成立スルコトヲ証明シヨウ。a ヲ R ノ任意ノ点トスレバ $R=\sum_{n=1}^{\infty} D_n$ ナルコトヨリ $a\in D_{n_0}$ ナル n_0 ガ定マル。ヨッテ $x\in S^*(a, M)$ トスレバ $d^*(a,x)<M$ デアルカラ (12) ヨリ

$$\left|f_{n_0}(a)-f_{n_0}(x)\right|\leqq d^*(a,x)<M$$

$a \in D_{n_0}$ デアルカラ $f_{n_0}(a) = n_0$.

ヨッテ

$$f_{n_0}(x) < n_0 + M$$

故ニ

$$x \in D_{n_0+M} = \sum_{i=1}^{n_0+M} S_i\left(a_i, \left(1-\frac{1}{2^i}\right) r(a_i)\right)$$

ヨッテ $\alpha_i = 1 - \frac{1}{2^i}$ トオケバ (11) ガ成立スル. (証明終)