OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Projektionsspekturm ノ一性質ト Hopf ノ Erweiterungssatz
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 159, p. 234-244
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74631
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

675. Projektionsspektrum ノ一性質ト Hopf ノ Erweiterungssatz.

小平 邦彦 (東大)

§1. Projektionsspektrum ト Kuratowski ノ Abbildung.

Kompaktum F ノ abg. Überdeckung ヲ $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}$ ノ Nerv ヲ K トシ, K ノ Eckpunkt a ニ對應スル $\mathfrak{U}$ ノ Element ヲ F^a デ現ハス. 開集合 $G^a \supset F^a$ ヲ充分小サクトレバ, offene Überdeckung $\{G^a\}$ ノ Nerv ハ K ト一致スル. $\{G^a\}$ ニ關スル Kuratowski ノ Abbildung ヲ φ トスレバ, φ ハ F ヲ Polyeder $\overline{K}$ ニ abbilden スル連続ナ Abbildung デアッテ, $p \in F$ ガ F^a ニ含マレルナラバ, a ハ $K(p)$ ノ K ニ於ケル Träger

simplex ノ Eckpunkt デアル.[1] ソコデ一般ニ

定義. $K(F) \subset \overline{K}$ ナル連続ナ Abbildung K ガ，"$p \in F^a$ ナラバ a ハ $K(p)$ ノ Träger ノ Eckpunkt デアル" ナル條件ヲ滿足スルトキ，K ヲ廣義ノ Kuratowski ノ Abbildung トイフ。

Kompraktum F ノ Projektionsspektrum ヲ

$$(K_1, K_2, \cdots\cdots K_m, \cdots\cdots) \qquad K_m = \pi_m^{m+1}(K_{m+1})$$

トスル。K_m ニハ K_m ヲ Nerv トスル F ノ abg. Überdeckung $\mathfrak{U}_m$ ガ對應スル。K_m ノ Eckpunkt a ニ對應スル $\mathfrak{U}_m$ ノ Element ヲ添數 m ノ附ケテ F_m^a デ現ハス。然ルトキ次ノ定理ガ成立ツ：

定理 I. K_m ヲ $\mathfrak{U}_m$ ニ關スル廣義ノ Kuratowski ノ Abbildung トスル。

$$Z = (z_1, z_2, \cdots\cdots z_m \cdots\cdots), \qquad z_m \in K_m$$

ヲ F ノ Projektionszyklus トスレバ，

$$K_m(Z) \text{ co } z_m \quad \text{in } \overline{K}_m$$

証明：

1) K_m ノ Eckpunkt a ニ對シテ，F_m^a ノ任意ノ点ヲ一ツ定メテ，ソレヲ $\gamma(a)$ デ現ハス。K_m ノ各 Eckpunkt a ヲ夫々 $\gamma(a)$ デ置換ヘレバ "$\mathfrak{U}_m$ 内ニ実現サレタ Nerv" $\gamma(K_m)$ ガ得ラレル。$\gamma(K_m)$ ト K_m ハ必ズシモ isomorph デハナイガ γ ハ K_m ヲ $\gamma(K_m)$ = simplizial = abbilden スル。

$Z = (z_m)$ ガ Rrojektionszyklus ナルトキ，$\gamma(Z) = (\gamma(z_m))$ ハ F ノ konvergenter Zyk-

---

1) Alexandroff und Hopf: Topologie, S 366.

lus デアッテ，$Z \to r(Z)$ ナル abbildung ニヨッテ，Projektionszyklus デ定義サレタ Betti 群ト，konvergenter Zyklus デ定義サレタ Betti 群ガ isomorph ナル。

2) $Z=(z_m)$ ヲ Polyeder $\overline{K}$ ニ於ケル konvergenter Zyklus トスレトキ，K ニ関スル kanonische Verschiebung ヲ φ トスレバ，$\varphi(z_m)\in K$ ハ，或 m カラ先スベテ homolog トナル。コノ $\varphi(z_m)$ ノ Homologie klass ヲ $\varphi(Z)$ デ表ハスコトニスレバ，$Z \to \varphi(Z)$ ナル對應ニヨッテ，$\overline{K}$ ノ konvergenter Zyklus ニヨッテ定義サレタ Betti 群ト Komplex K ノ Betti 群ガ isomorph ナル。

3) $f(F)\subset F'$ ナル連続ナ Abbildung f ガ與ヘラレタトキ，$Z=(z_m)$ ヲ F ノ konvergenter Zyklus トスレバ，$f(Z)=(f(z_m))$ ハ F' ノ konvergenter Zyklus デアッテ，$Z \to f(Z)$ ナル Abbildung ニヨッテ F ノ Betti 群ガ F' ノ Betti 群ニ homomorph ニ abbilden サレル。

コノ f ニヨッテ生ズル Homomorphismus ヲ h_f，或ハ單ニ f デ現ハス。定理 1 ニ於ケル k_m ハ，h_{k_m} ノ意味デアッタノスナハチ

$$h_{k_m}(Z) \sim z_m \quad \text{in} \quad \overline{K}_m$$

コレヲ，1)，2) ニヨッテ詳シク書ケバ

$$g_m k_m r(Z) \sim z_m \quad \text{in} \quad K_m$$

スナハチ，mニヨッテ定マル。$l_0 = l_0(m)$ガアッテ，

(A) $g_m k_m r(z_l)$ ∞ z_m ニ K_m，$l \geqq l_0$

(A)ノ証明：K_m =對シテ，$\sigma > 0$ ヲ充分小サクトッテ，K_mノ各 Simplex x ニツイテ，xニ含マレナイ Eckpunkt a ヲ中心トスル Baryzentrische Stern Ba ト $\overline{x}$ ノ距離ガ σ ヨリ大キイ様ニスルコトガ出来ル：$a \neq \overline{x}$ ナラバ $\rho(\overline{x}, Ba) > \sigma$. (A. u. H. Topologie S 351)

次ニ $l_0 = l_0(m)$ ヲ充分大キクトッテ，$l \geqq l_0$ ナルスベテノ l ニツイテ，$\delta(k_m(F_l^a)) < \delta$ ナル如クスル。

然ルトキハ，$p \in F_l^a$ ナラバ，$g_m k_m r(a)$ ハ $k_m(p)$ノ Träger-simplex ノ Eckpunkt デアル．何トナレバ，p, $r(a)$ ハ共ニ F_l^a ニ含マレルカラ，$\rho(k_m(p), k_m r(a)) < \sigma$. 故ニ，$k_m(p)$ノ Träger-simplex ヲ $x(p)$ デ表ハスコトニスレバ，$\rho(\overline{x(p)}, k_m r(a)) < \sigma$. 故ニ σ ノ定義ニヨッテ，$g_m k_m r(a) \subset x(p)$. 又 $p \in F_l^a$ ナルトキハ，勿論 $F_m^{\pi_m(a)}$ ヲ p デアルカラ，定義ニヨッテ，$\pi_m(a) \subset x(p)$ デアル。

K_lノ上デ π_m^l ニ関シテ作ッタ Prism $\pi(K_l)$ ヲ考ヘル．(A. u. H. Topologie, S 198). $\pi(K_l)$ノ Simplex ハスベテ K_lノ Simplex $(a_0\ a_1 \cdots\cdots a_n)$ カラ作ラレタモノデ，$(\pi_m(a_0) \cdots\cdots \pi_m(a_k), a_k \cdots\cdots$

a_n) ナル形ヲモツ．コノトキ，$F_l^{a_j}$ ハ一点 p ヲ共有スルカラ，上ニ述ベタ如ク，$\pi_m(a_j)$，$\vartheta_m k_m r(a_j)$ ハスベテ．K_m ニ於ケル $k_m(p)$ ノ Träger $x(p)$，Echpunkt デアル．故ニ ψ ナル abbildung ヲ

$$\psi(\pi_m(a_0)\cdots\cdots,\ \pi_m(a_k),\ a_k\cdots\cdots a_n)$$
$$=(\pi_m(a_0)\cdots\cdots\pi_m(a_k),\ \vartheta_m k_m r(a_k)\cdots\cdots\vartheta_m k_m r(a_n))$$

デ定義スレバ，ψ ハ $\Pi(K_l)$ ヲ K_m ニ abbilden スル simpliziale Abbildung デアッテ，K_l デハ $\vartheta_m k_m r$ ト一致シ，K_m デハ identische Abbildung デアル。

然ルニ

$$z_l \sim \pi_m^l(z_l) \quad \text{in } \Pi(K_l)$$

故ニ

$$\psi(z_l) \sim \psi\pi_m^l(z_l) \quad \text{in } K_m$$

$\psi(z_l)=\vartheta_m k_m r(z_l)$，$\psi\pi_m^l(z_l)=\pi_m^l(z_l)$ デアルカラ

$$\vartheta_m k_m r(z_l) \sim \pi_m^l(z_l) \sim z_m \quad \text{in } K_m$$

コレデ (A) ガ証明サレタ。　　（定理1，証明終ヶ）

§2. Hopf ノ Erweiterungssatz.

定理2.（Erweiterungssatz）．F ヲ $n+1$ dim. Kompaktum，$F'\subset F$ ヲ n ノ任意ノ Teilkompaktum トシ，Λ ヲ mod. 1 デ reduzieren サレタ実数ノ加法群トスル，F' ヲ n-dim. Sphäre S^n ニ

abbilden スル連続ナ Abbildung f ガ唯ヘテレタトキ，Koeffizientenbereich E ＝関シテ，條件：

(B) $Z^n \subset F'$，$Z^n \sim 0$ in F ナラバ $f(Z^n) \sim 0$ in S^n. ガ成立スルナラバ，f ハ F ヲ S^n ＝ abbilden スル連続ナ Abbildung ＝拡張サレル。

K' ガ K^{n+1} ノ Teilkomplex，$F=\overline{K}$，$F'=\overline{K'}$ ナルトキ，Erweiterungssatz ガ成立スルコトハヨク知ラレテヰル．（A. u. H.: Topologie, S. 500；或ハ H. Freudenthal: Hopfsche Gruppe. Compositio Math. 4. 等）．コレヲ Satz 1 ヲ應用シテ Kompaktum ノ場合＝擴張スル。

F^{n+1} ノ Projektionsspektrum ヲ (K_m^{n+1})，K_m^{n+1} ＝對應スル überdeckung ヲ $\mathfrak{U}_m=\{F_m^a\}$ トスレバ，$F_m^a \cdot F' \neq 0$ ナル $F_m^a \cdot F'$ ノ，全体ハ F' ノ，abg. überdeckung ヲナシ，ソノ Nerv K_m' ハ K_m^{n+1} ノ Teilkomplex デアッテ，(K_m') ハ F' ノ Projektionsspektrum ヲナス．今 F_{m+1}^a ヲ含ム開集合 $G_m^a \supset F_m^a$ ヲ充分小サクトッテ，$\{G_m^a\}$ ナル überdeckung ＝関シテ Kuratowski ノ Abbildung k_m ヲ作レバ，$k_m(F') \subset \overline{K_m'}$ デアッテ，k_m ハ F' ノ überdeckung $\{F_m^a \cdot F'\}$ ＝関シテ，前義ノ Kuratowski ノ Abbildung デアル。

K_m^{n+1} ノ Realisation．ヲ $r(K_m') \subset F'$ トル如ク定メル。然ルトキハ fr ハ K_m' ノ Eckpunkt ヲ S^n ニ

abbilden スル。S^n ヲ $n+1$ 次元 Euklid 空間 R^{n+1} ノ Einheitssphäre ト考ヘレバ，fr ハ．Euklidisch + Komplex $\overline{K}'_m$，R^{n+1} ヘノ affin Abbildung ヲ定メル。

コノ affin Abbildung ヲ再ビ fr デ表ハスコトニスレバ，fr ニヨル K'_m ノ Eckpunkt ノ Bild ハ S^n ノ上ニアルノデアルカラ，m ヲ充分大キクトレバ，$fr(\overline{K}'_m)$ ハ S^n，中心 0 ヲ含マナイ：$fr(\overline{K}'_m) \subset R^{n+1}-0$．ソコデ，$0$ カラ S^n ヘノ Projektion ヲ P デ現ハシ，Pfr ナル stetige Abbildung ヲ考ヘル。

Lemma 1　$\varepsilon>0$ ニ対シテ，m ヲ充分大キクトレバ

$$\rho(Pfr\,k_m(p),\ f(p))<\varepsilon,\quad p\in F'$$

従ッテ又，$Pfr\,k_m$ ト f ハ homotop ガアル。

証明ハ明白ガアル。

Lemma 2.　m ヲ充分大キクトレバ，$\overline{K}'_m$ デ定義サレタ stetige Abbildung Pfr，$Pfr(\overline{K}'_m)\subset S^n$ ハ，$\overline{K}^{n+1}_m$ ノ S^n ヘノ Abbildung ニ拡張サレル．但シ f ニツイテ (B) ガ成立シテヰルト仮定スル。

証明．Komplex ニツイテハ Erweiterungssatz ガ既ニ証明サレテヰルカラ，今 Lemma 2 ガ成立シナイト仮定スレバ，無限ニ多クノ m ニ対シテ (B) ガ成立シナイ：スナハチ

$$\mathfrak{Z}^n_m\in K'_m,\quad \mathfrak{Z}^n_m\sim 0 \text{ in } K^{n+1}_m.$$

$$Pfr(\mathfrak{Z}^n_m)\not\sim 0 \text{ in } S^n.$$

ナル Koeffizientenbereich K ノ Zyklus Z^n_m ガ存在スル。K^{n+1}_m デ ~ 0 ナル K'_m ノ Zyklus ハ群ヲナスカラ，Z^n_m ヲ適當ニ選ンデ

$$Pfr(Z^n_m) \sim \lambda_m S^n \text{ in } S^n, \quad \frac{1}{4} \leqq \lambda_m \leqq \frac{3}{4}$$

ナル様ニスルコトガ出來ル。但シ $\lambda_m S^n$ ニ於ケル S^n ハ S^n ノ Grundzyklus，スナハチ $S^n = \overline{\dot{x}}^{n+1}$ ニ於ケル $\dot{x}^{n+1}$ ヲ現ハスモノト考ヘル。

カクノ如キ Z^n_m カラ適當ナ部分列 $Z^n_{m_j}$ ($j=1,2,3,\cdots\cdots$) ヲトッテ，スベテノ m ニ對シテ $\pi_m(Z^n_{m_j})$ ($j=1,2,3,\cdots\cdots$) ガ收斂スル様ニスルコトガ出來ル。部分列 $Z^n_{m_j}$ ヲ一ツ定メテ

$$\hat{Z}^n_m = \lim_{j\to\infty} \pi_m(Z^n_{m_j})$$

然ルトキハ

$$\hat{Z}^n_m \in K'_m, \quad \hat{Z}^n_m \sim 0 \text{ in } K^{n+1}_m, \quad \pi^{m+1}_m(\hat{Z}^n_{m+1}) = \hat{Z}^n_m.$$

故ニ

$$Z^n = (\hat{Z}^n_m)$$

ハ F' ノ Projektionszyklus デアッテ，

$$Z^n \sim 0 \quad \text{in } F$$

故ニ，(B) ナル假定ニヨッテ

$$f(Z^n) \sim 0 \quad \text{in } S^n$$

然ルニ，f ト Pfr K_m ハ homotop デアルカラ

$$Pfr\, K_m(Z^n) \sim 0 \quad \text{in } S^n$$

定理 1 ニヨッテ，$K_m(Z^n) \sim \hat{Z}^n_m$ デアルカラ

$$Pfr(\hat{\mathfrak{Z}}^n_m) \sim 0 \quad in \quad S^n$$

然ルニ又，$\varepsilon > 0$ ニ対シテカルヲ充分大キクトッテオケバ，$m_j \geqq m$ ノトキ

$$r(\mathfrak{Z}^n_{m_j}) \underset{\varepsilon}{\sim} r\pi^{m_j}_m(\mathfrak{Z}^n_{m_j}) \quad in \quad F'$$

トナルカラ，ε ヲ充分小サクトッテオケバ

$$fr(\mathfrak{Z}^n_{m_j}) \sim fr\pi^{m_j}_m(\mathfrak{Z}^n_{m_j}) \quad in \quad R^{n+1}-0$$

故ニ

$$Pfr(\mathfrak{Z}^n_{m_j}) \sim Pfr\pi^{m_j}_m(\mathfrak{Z}^n_{m_j}) \quad in \quad S^n$$

或ハ

$$Pfr\pi^{m_j}_m(\mathfrak{Z}^n_{m_j}) \sim \lambda_{m_j} S^n \quad in \quad S^n$$

コヽニ於テ $j \to \infty$ ノ limit ヲトレバ，

$$Pfr(\hat{\mathfrak{Z}}^n_m) \sim \lim_{j\to\infty} \lambda_{m_j} S^n \quad in \quad S^n$$

$Pfr(\hat{\mathfrak{Z}}^n_m) \sim 0$ in S^n デアルカラ，$\lim_{j\to\infty} \lambda_{m_j} \equiv 0 \pmod 1$ デナケレバナラナイ．コレハ $\frac{1}{4} \leqq \lambda_{m_j} \leqq \frac{3}{4}$ ニ反スル．コレデ Lemma 2 ガ証明サレタ。

Lemma 3. F ヲ Kompaktum，F' ヲソノ Teilkompaktum，g ヲ F ヲ S^n ヘ abbilden スル連続ナ Abbildung トスル。

F' ノ S^n ヘノ stetige Abbildung f, $f(F') \subset S^n$，ガ

$$\rho(g(p), f(p)) < 1 \quad (=S^n \text{ノ半径}), \quad p \in F'$$

ナル條件ヲ満足スルトキハ，f ハ F ノ S^n ヘノ stetige

Abbildung = 擴張サレル。

証明: S^n ヲ Rand トスル $R^{n+1} \supset S^n$ ノ Einheitskugel ヲ E^{n+1} トスレバ, f ハ $f'(F) \subset E^{n+1}$ ナル stetige Abbildung f^{I} = 擴張サレル。$p \in F'$ ナルトキ $\rho(g(p), f'(p)) < 1$ デアルカラ, $\eta > 0$ ヲ充分小サクトレバ,

$$\rho(p, F') \leqq \eta \quad \text{ナラバ} \quad \rho(g(p), f^{\mathrm{I}}(p)) < 1$$

トナル。カノ如キ η ヲ一ツ定メテ,

$$\rho(p) = \begin{cases} \rho(p, F') & \rho(p, F') \leqq \eta \text{ ノトキ}, \\ \eta & \rho(p, F') > \eta \text{ ノトキ}. \end{cases}$$

デ $\rho(p)$ ナル連続函数ヲ定義スル。線分 $\overline{g(p)\, f'(p)}$ ヲ $\eta - \rho(p) : \rho(p)$ ノ比ニ内分スル点ヲ $f^{\mathrm{II}}(p)$ トスレバ $f^{\mathrm{II}}(p)$ ハ明ラカニ p ニツイテ連続デアッテ, $g(p) \in S^n$ ナルコトニ注意スレバ, $f^{\mathrm{II}}(F) \subset E^{n+1} - 0$ ナルコトガ分ル。ソコデ

$$\hat{f}(p) = \mathrm{P} f^{\mathrm{II}}(p) \qquad p \in F$$

デ連続ナ Abbildung $\hat{f}(F) \subset S^n$ ヲ定義スル。然ルトキハ, f^{II} ノ定義カラ直チニ分ル如ク, $\hat{f}$ ハ f ノ Erweiterung デアル。

定理2ノ証明。Lemma 2 ニヨッテ存在ヲ証明サレタ Pfr ノ $\overline{K_m^{n+1}}$ ヘノ Erweiterung ヲ, $\widehat{\mathrm{Pfr}}$ トスレバ, Lemma 1 ニヨッテ

$$\rho(\widehat{\mathrm{Pfr}}\, k_m(p), f(p)) < 1 \qquad p \in F'$$

トナル。故ニ Lemma 3 ニヨッテ f ハ F ヲ S^n ヘ abbilden

スル stetige Abbildung ニ擴張サレル。（証明終リ）