



Title	確率論への積分方程式ノ應用 (M. Fréchetノ論文紹介)
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 160, p. 245-254
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74632
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

646 確率論へ、積分方程式の應用

(M. Fréchet / 論文紹介)

吉 田 耕 作 (阪大)

空間 R の点 x が単位時間、後 $= y$ 点 $=$ 移ル遷移確率密度が $K(x, y)$ である、一般に n 単位時間後 $= x$ 点 $= y$ 点 $=$ 移ル遷移確率密度が

$$\begin{aligned} K^{(n)}(x, y) &= \int_R K(x, z) K^{(n-1)}(z, y) dz \\ &= \int_R K^{(n-1)}(x, z) K(z, y) dz \end{aligned}$$

$$(K^{(1)}(x, y) \equiv K(x, y) \text{ トスル})$$

である、如き *discrete + homogeneous stochastic process* = 於て、 $n \rightarrow \infty$ したとき、 $K^{(n)}(x, y)$ の状態を積分方程式論の方法で調べたい云々のである。

確率論 = 関スル *Fréchet* の論文ハ澤山アルケレドモ、上ノ問題ニツイテハ次ノ二ツが重要ト思ハレル。 *Quarterly J. of Math.* 5 (1934), p. 106—144. *Balt. Soc. Math. France* 62 (1934), p. 68—83.

定義カラ明ラカニ、全テ $n =$ 對シテ

$$(1) \quad K^{(n)}(x, y) \geq 0,$$

$$(2) \quad \int_R K^{(n)}(x, y) dy \equiv 1.$$

Fréchet ハ次ノ假定ノモトニ議論シテアル。即チ

i) R , total measure $\text{mes}(R) = \text{有限}^{1)}$.

ii) $M = u. b. \left| K(x, y) \right|_{x, y \in R} = \text{有限}.$

1) ニツデアル。之等ノ假定ヲ緩クスルコトハ望マシイケレド
ニ証明ノ方法上必要ヲシイ。

§1. 準備

Fréchetノ議論ノ根據ハ次ノ三ツノ Lemmas =
要約サレル。

$$\begin{aligned} \text{先ヅ } |K^{(n)}(x, y)| &\leq \int_R |K(x, z)| |K^{(n-1)}(z, y)| dz \\ &\leq \int_R |K(x, z)| u. b. |K^{(n-1)}(z, y)| dz = u. b. |K^{(n-1)}(x, y)| \end{aligned}$$

故カラ induction = ヲツテ、全テ、 $n = \text{正レテ}$

$$(3) \quad u. b. |K^{(n)}(x, y)| \leq M.$$

$$\text{核 } K(x, y) \text{ノ resolvent } \bar{R}(x, y, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K^{(n)}$$

(x, y) ハ λ ノ有理型函数ニナルコトハ良ク知ラレテ居ル。

實際⁽²⁾

$$4) \quad \begin{cases} \bar{R}(x, y, \lambda) = \frac{A_0(x, y) + A_1(x, y)\lambda + \dots + A_n(x, y)\lambda^n + \dots}{1 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n + \dots} \\ A_p(x, y) = \frac{1}{1!} \int K \left(\begin{matrix} x, & \delta_1, & \delta_2, & \dots, & \delta_p \\ y, & \delta_1, & \delta_2, & \dots, & \delta_p \end{matrix} \right) d\delta_1 d\delta_2 \dots d\delta_p \\ a_p = \frac{1}{1!} \int K \left(\begin{matrix} \delta_1, & \delta_2, & \dots, & \delta_p \\ \delta_1, & \delta_2, & \dots, & \delta_p \end{matrix} \right) d\delta_1 d\delta_2 \dots d\delta_p \end{cases}$$

(1) 1 トレテモ一般性失ハヌカラ以下1 トスル。

(2) E. Goursat: Cours d'analyse III, p. 371.

コトヲ

$$K \begin{pmatrix} x, \lambda_1, \dots, \lambda_p \\ y, \lambda_1, \dots, \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x, y), K(x, \lambda_1), \dots, K(x, \lambda_p) \\ K(\lambda_1, y), K(\lambda_1, \lambda_1), \dots, K(\lambda_1, \lambda_p) \\ \vdots \\ K(\lambda_p, y), \dots, K(\lambda_p, \lambda_p) \end{vmatrix}$$

テ與ヘラレ且ツ $\sum \lambda^p A_p(x, y), \sum \lambda^p a_p$ 共ニ λ ノ整函数
デアール。(1)

Lemma 1. $\bar{K}(x, y, \lambda)$ ノ pole λ ハ全テ其ノ
絶対値 1 ヨリ 小ナラズ、且ツ 絶対値 1 ノ pole ハ全テ simple
pole デアール。

証明: $\left| \bar{K}(x, y, \lambda) \right| \leq \frac{M}{1-|\lambda|}$ for $|\lambda| < 1$ by

(3) ヨリ 明カ。

Lemma 2. $\bar{K}(x, y, \lambda)$ ノ 絶対値 1 ノ pole λ ハ
 $\lambda^N = 1$ (N 正整数) ヲ 満足スル。

証明. 第一段. λ が resolvent, pole ト云フ
コトカラ 同次積分方程式

$$g(x) = \lambda \int_{\mathcal{R}} K(x, y) g(y) dy$$

ハ恒等的ニハ 零デナシ積分可能ナ解 $g(x)$ ヲ 有スル。所カ(3)

(1) $K(x, y)$ が (1), (2) ノ 条件ヲ 満足スルト 合トニ 関ラズ。

$mes(\mathcal{R})$ = 有限, u. b. $|K(x, y)|$ = 有限トノニツキ 假定ス
カラ云ヘルコトデアール。

ト $|\lambda| = 1$ 成ヨリ

$$|\varphi(x)| \leq \int_R K(x, y) |\varphi(y)| dy \leq M \int_R |\varphi(y)| dy$$

従ツテ u. b. $|\varphi(x)| = Q =$ 有限トナル。 $|\varphi(x)|$ ハ實際 = 上限 Q ヲ attain スルコトガ示セル。 モット precise = $|\varphi(x)| = Q$ トナル如キ点集合ヲ $V_\omega = E(x, |\varphi(x)| = Q)$ トシタトキ = $mes(V_\omega) \geq \frac{1}{M}$ ガ云ヘル。 ソレ = ハ任意ノ $0 < \varepsilon < Q$ ナル ε ヲ喚ヘクトキ $V_\varepsilon = E(x, |\varphi(x)| \geq Q - \varepsilon)$ ノ測度 $mes(V_\varepsilon) \geq \frac{1}{Q}$ ガ云ヘルトヨイ。 $V_\omega = \bigcap_\varepsilon V_\varepsilon$ ガカラ。

故テ (1), (2), (3) = ヨリ

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq \int_{V_\varepsilon} Q K(x, y) dy + \int_{R-V_\varepsilon} (Q - \varepsilon) K(x, y) dy \\ &= Q - \varepsilon \int_{R-V_\varepsilon} K(x, y) dy \end{aligned}$$

ヲ得ル。 所ガ Q ガ上限ガカラ任意ノ $\eta > 0$ = 對シテ

$Q - |\varphi(x')| < \varepsilon \eta$ ナル如キ x' ガ存在スル。 従ツテ

$$\int_{R-V_\varepsilon} K(x', y) dy < \eta. \text{ 之レト (2) ト } M = \text{u. b. } |K(x, y)| \text{ ト}$$

$$\text{ヲ組合セテ } 1 - \eta \leq \int_{V_\varepsilon} M dy. \quad \eta \text{ 任意ガツクカラ}$$

$$mes(V_\varepsilon) \geq \frac{1}{M}.$$

第二段。 x_0 ヲ V_ω ノ任意ノ点トスレバ、之 x_0 = 對シテ R ノ部分集合 $R_0(x_0)$ ガ定ツテ

$$\begin{cases} g(x) \equiv \frac{g(x_0)}{\lambda} & \text{for } x \in R_0(x_0) \\ \text{mes}(R_0(x_0)) \equiv \frac{1}{M}. \end{cases}$$

$$g(x_0) = \lambda \int_R K(x_0, y) g(y) dy \quad \text{及} \quad \int_R K(x_0, y) dy = 1 \quad \text{カ}$$

ラ

$$\int_R K(x_0, y) \left\{ 1 - \frac{\lambda g(y)}{g(x_0)} \right\} dy = 0$$

ヲ得ル。 $\lambda g(y)/g(x_0) = \alpha(y) + i\beta(y)$ ト置テト

$|g(x_0)| = Q$ カラ $\alpha^2(y) + \beta^2(y) \leq 1$ 、故ニ $K(x_0, y) \geq 0$ 、

$1 - \alpha(y) \geq 0$ カラ $K(x_0, y) > 0$ ナル如キ y ノ始ニ到

ル所ニ $1 - \alpha(y) = 0$ 、從ツテ $\beta(y) = 0$ 。故ニ $g(x) = \frac{g(x_0)}{\lambda}$

ナル如キ x ノ点集合 $R_0(x_0)$ ハ確ニ $K(x_0, y) > 0$ ナル
如キ y ノ集合ヲ含ム。(1)

$$1 = \int_R K(x_0, y) dy = \int_{K(x_0, y) > 0} K(x_0, y) dy \leq M \int_{K(x_0, y) > 0} dy$$

カカラ

$$\text{mes}(R_0(x_0)) \geq \frac{1}{M}.$$

第三段、 $x_1 \in R_0(x_0)$ ノ任意ノ点ナルト $|\lambda| = 1 = \exists$

勿論 $|g(x_1)| = Q$ 。從ツテ上ト同ジク $R_1(x_1)$ 定リ

$$\begin{cases} g(x) = \frac{g(x_1)}{\lambda} = \frac{g(x_0)}{\lambda^2} & \text{for } x \in R_1(x_1) \\ \text{mes}(R_1(x_1)) \geq \frac{1}{M}. \end{cases}$$

(1) $\text{mes } 0$ ノ集合ヲ無視スレバ

以下同様 = シテ $R_2(x_2), R_3(x_3), \dots$ が定り

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{\varphi(x_0)}{\lambda^{R+1}} & \text{for } x \in R_R(x_R) \\ \text{mes}(R_R(x_R)) \geq \frac{1}{M}. \end{cases}$$

所ガ $\text{mes}(R) = 1$ カラ、 $R_l(x_l)$ ト $R_m(x_m)$ トガ
($l \neq m$) 共通点ヲモツ如キ l, m が存在シ+ケレバ+ラ+
イ。之共通点デハ $\varphi(x_0)/\lambda^{l+1} = \varphi(x_0)/\lambda^{m+1}$ ト+ルカ
テ $\varphi(x_0) \neq 0 = \text{ヨリ } \lambda^{|l-m|} = 1$. — 以上 —

$\lambda = 1$ テ、有理型函数 $\bar{r}(x, y, \lambda)$ 、絶対値 1、
pole ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\delta^{(1)}$ 且ツ $\lambda_i =$ 於ケル principal part ヲ夫々

$$\frac{l_i(x, y)}{\lambda_i - \lambda} \quad (\text{simple pole} + \text{コトハ Lemma 1} = \text{示シタ})$$

トスレバ、resolvent = 関スル一般論カラ⁽²⁾

$$(5) \quad K(x, y) = \sum_{i=1}^{\delta} \frac{l_i(x, y)}{\lambda_i} + \varepsilon(x, y)$$

ト置クトキ

(1) 但シ $\lambda_1 = 1$ トスル。 $\lambda = 1$ が pole = +ルコトハ

$$\varphi(x) \equiv 1 \text{ が } \varphi(x) = \int_R K(x, y) \varphi(y) dy \text{ ノ解} = +ルコト$$

(2) 式) カラワカル。

(2) Goursat: loc. cit. p. 402

$$(6) \begin{cases} \int_{\mathcal{R}} l_i(x, z) l_i(z, y) dz = l_i(x, y) \\ \int_{\mathcal{R}} l_i(x, z) l_j(z, y) dz = 0, \quad i \neq j \\ \int_{\mathcal{R}} l_i(x, z) \varepsilon(z, y) dz = \int_{\mathcal{R}} \varepsilon(x, z) l_i(z, y) dz \end{cases}$$

が成立スル。且ツ $\varepsilon(x, y)$ ナル核, resolvent, poles
ハ $R(x, y, \lambda)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 以外, poles ト
principal part ヲ含メテ一致スル。

$$\text{Lemma 3. } u.b. \left| \varepsilon^{(n)}(x, y) \right| \leq \frac{C}{(1+\delta)^{n-1}}; \quad n=1, 2, \dots$$

$x, y \in \mathcal{R}$

ナル如キ常数 $C, \delta > 0$ カ存在スル。

証明. $K(x, y)$ ト共 $= |l_i(x, y)|$ ハ $\mathcal{R}$ デ有界カ
カラ $u.b. |\varepsilon(x, y)| = \varepsilon =$ 有限デアル。ヨツテ $\varepsilon(x, y)$
, resolvent = (4) 式ヲ應用デキル。コノ resolvent
, pole 全テ絶対値ノヨリ大カカラ分母ノ絶対値ハ>常
数 > 0 for $|\lambda| \leq 1 + 2\delta$ ナル如キ $\delta > 0$ 存在ス。分子
ノ一般項 $\lambda^p A_p(x, y)$ ノ絶対値ハ此 場合, Hadamard
ノ行列式=閉スル定理ヲ用ヒ, 全テ, $x, y \in \mathcal{R}$
ニ對シ

$$\frac{\varepsilon^{p+1} (p+1)^{\frac{p+1}{2}} |\lambda|^p}{|p|}$$

ヨリ小サシ. $\frac{1}{|p|} < \frac{e^{p+1}}{(p+1)^{p+1}}$ ヲ用ヒテ ≥ 1 ノ p 乗根ハ

$\rho \rightarrow \infty$ のとき $0 =$ 収斂スルコトがワカル。故に結局

$$\text{u. b. } \left| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n-1} \varepsilon^{(n)}(x, y) \right| < C \\ N \leq 1+2\delta \\ x, y \in R$$

ナリ如キ 常数 C が存在スルコトがワカル。ヨツテ Taylor 級数ノ良ク知ラレタ定理カラ求ムル結果ヲ得ル。

§ 2. 結 論

I. (5), (6) 及び Lemma 3 = ヨリ

$$(7) \begin{cases} K^{(n)}(x, y) = \sum_{i=1}^{\Delta} \frac{l_i(x, y)}{\lambda_i^n} + \varepsilon^{(n)}(x, y) \\ |\varepsilon^{(n)}(x, y)| \text{ノ上限} \leq \frac{C}{(1+\delta)^{n-1}} \end{cases}$$

之レハ Lemma 2 = ヨリ $K^{(n)}(x, y)$ が asymptotic = periodic ナコトヲ示ス。

II. $K^{(n)}(x, y)$ が $n \rightarrow \infty$ ノとき, $x, y =$ ツキ一様
= 収斂スルタメノ必要條件ハ $\tilde{R}(x, y, \lambda)$ ノ絶対値1ノ
pole が $\lambda = 1$ 以外ニ存在シナイコトデアアル。

証明. 充分ナコトハ (7) 式ヨリ明カ。必要. 若シ
 $\lambda_2 \neq 1$ ($|\lambda_2| = 1$) ナル pole アレバ

$$g(x) = \lambda_2 \int_R K(x, y) \varphi(y) dy$$

ヲ満足スル積分可能ナ $\varphi(x) \neq 0$ が存在スル。

Lemma 2 ト同様ニシテ $|\varphi(x)|$ ハ有界且ツ任意
 $n =$ 対シテ

$$\varphi(x) = \lambda_2^n \int_{\mathcal{R}} K^{(n)}(x, y) \varphi(y) dy.$$

が成立スルカラ $\lambda_2 \neq 1$, $|\lambda_2| = 1$ ナ $K^{(n)}(x, y)$ 一様収斂
デハアリ得ナイ。

III. $K^{(n)}(x, y)$ / Césaro / 平均値

$$\begin{aligned} & \frac{K^{(\nu+1)}(x, y) + K^{(\nu+2)}(x, y) + \dots + K^{(\nu+n)}(x, y)}{n} \\ &= \sum_{i=1}^3 l_i(x, y) \left[\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda_i} \right)^{\nu+2+t} \right] + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon^{(\nu+t)}(x, y) \\ &\longrightarrow l_1(x, y) \quad (x, y, \nu = \text{ツイテ一様} =) \end{aligned}$$

as $n \rightarrow \infty$.

IV. 上ノ極限遷移確率密度⁽¹⁾ $l_1(x, y)$ が x -depend
シイタノ必要條件ハ, 同次積分方程式

$$(8) \quad \varphi(x) = \int_{\mathcal{R}} K(x, y) \varphi(y) dy.$$

ノ一次独立ノ解が $\varphi \equiv 1$ 以外ニナイコトデアル。

証明. 必要. (8) カラ $\varphi(x) = \int K^{(n)}(x, y) \varphi(y) dy$ ナ
得ルカラ $\varphi(x) = \int l_1(x, y) \varphi(y) dy$, 従ツテ $\varphi(x)$ ハ
 $l_1(x, y)$ ト共 x -independent.

充分. $\lambda = 1$ カ $\bar{K}(x, y, \lambda)$ ノ simple pole ト
ニフコトカラ、積分方程式ノ一般論⁽²⁾ニヨリ

(1) Césaro, 平均

(2) Goursat: loc. cit. p. 405

$$l_s(x, y) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x) \psi_i(y),$$

$\varphi_i = \varphi_i, \psi_i$ は夫々

$$\varphi_i(x) = \int K(x, y) \varphi_i(y) dy, \quad \psi_i(x) = \int K(z, x) \psi_i(z) dz$$

1-次独立な solution を成してゐる。故に明か。

V. $l_1(x, y)$ が y に depend しないための必要條件

は

$$\int K(z, x) dz = 1$$

且つ $\psi(x) = \int K(z, x) \psi(z) dz$ の 1-次独立な解が

$\psi \equiv 1$ 以外にないことである。

証明. III の所論からタマスツワカル。シカモ III ト組
合せてこのとき $l_1(x, y) \equiv \text{const.} = 1$ である。