OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	確率論ヘノ積分方程式ノ應用（M. Fréchetノ論文紹介）
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 160, p. 245-254
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74632
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

706

686. 確率論への積分方程式の應用
(M. Fréchet の論文紹介)

吉田 耕作 (阪大)

空間 R の点 x が単位時間の後に y 点に移る遷移確率密度が $K(x,y)$ で與へられ，一般に n 単位時間後に x 点が y 点に移る遷移確率密度が

$$K^{(n)}(x,y)=\int_R K(x,z)K^{(n-1)}(z,y)\,dz$$
$$=\int_R K^{(n-1)}(x,z)K(z,y)\,dz$$

($K^{(1)}(x,y)\equiv K(x,y)$ とする)

で與へられる如き discrete + homogeneous stochastic process に於て，$n\to\infty$ とするとき，$K^{(n)}(x,y)$ の狀態を積分方程式論の方法で調べてみようと云ふのである。

確率論に關する Fréchet の論文は澤山あるけれども，上の問題に對しては次の二つが重要と思はれる。Quaterly J. of Math. 5 (1934), p. 106—144. Bull. Soc. Math. France 62 (1934), p. 68—83.

定義から明らかに，全ての n に對して

(1) $K^{(n)}(x,y)\geqq 0$,

(2) $\int_R K^{(n)}(x,y)\,dy\equiv 1$.

Fréchet は次の假定のもとに議論してゐる。即ち

i) R ノ total measure $mes(R)$ = 有限[1].

ii) $M = \underset{x,y\in R}{u.b.} |K(x,y)|$ = 有限.

ノニッデアル。之等ノ假定ヲ緩クスルコトハ望マシイケレドモ証明ノ方法上必要ラシイ。

§1. 準備

Fréchet ノ議論ノ根據ハ次ノ三ツノ Lemmas ニ要約サレル。

先ヅ $|K^{(n)}(x,y)| \leqq \int_R K(x,z)|K^{(n-1)}(z,y)|\,dz$

$\leqq \int_R K(x,z)\, u.b.|K^{(n-1)}(x,y)|\,dz = u.b.|K^{(n-1)}(x,y)|$

ダカラ induction ニヨッテ、全テノ n ニ對シテ

(3) $\quad u.b.|K^{(n)}(x,y)| \leqq M.$

核 $K(x,y)$ ノ resolvent $\Gamma(x,y,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K^{(n)}$

(x,y) ハ入ノ有理型函數ナルコトハ良ク知ラレテ居ル。實際[2]

$$(4)\quad \begin{cases} \Gamma(x,y,\lambda) = \dfrac{A_0(x,y)+A_1(x,y)\lambda+\cdots+A_n(x,y)\lambda^n+\cdots}{1+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_n\lambda^n+\cdots} \\ A_p(x,y) = \dfrac{1}{\Delta}\int K\begin{pmatrix} x, s_1, s_2 \cdots s_p \\ y, s_1, s_2 \cdots s_p \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \cdots ds_p \\ a_p = \dfrac{1}{\Delta}\int K\begin{pmatrix} s_1, s_2 \cdots s_p \\ s_1, s_2 \cdots s_p \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 \cdots ds_p \end{cases}$$

---

(1) コレテモ一般性失ハヌカラ以下ノトスル.

(2) E. Goursat: Cours d'analyse III, p. 371.

コヽニ

$$K\begin{pmatrix} x & s_1 & \cdots & s_p \\ y & s_1 & \cdots & s_p \end{pmatrix} = \begin{Vmatrix} K(x,y), & K(x,s_1), & \cdots, & K(x,s_p) \\ K(s_1,y), & K(s_1,s_1), & \cdots, & K(s_1,s_p) \\ \vdots & & & \\ K(s_p,y), & \cdots & & K(s_p,s_p) \end{Vmatrix}$$

デ與ヘラレ且ツ $\sum \lambda^p A_p(x,y)$, $\sum \lambda^p a_p$ 共ニ λ ノ整函數デアル。[1]

Lemma 1. $\bar{K}(x,y,\lambda)$ ノ pole λ ハ全テ其ノ絶対値 1 ヨリ小ナラズ，且ツ絶対値 1 ノ pole ハ全テ simple pole デアル。

証明： $\left|\bar{K}(x,y,\lambda)\right| \leqq \dfrac{M}{1-|\lambda|}$ for $|\lambda|<1$ by (3) ヨリ明カ。

Lemma 2. $\bar{K}(x,y,\lambda)$ ノ絶対値 1 ノ pole λ ハ $\lambda^N=1$ （N 正整數）ヲ満足スル。

証明. 第一段. λ ガ resolvent ノ pole ト云フコトカラ同次積分方程式

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\mathcal{R}} K(x,y)\varphi(y)\,dy$$

ハ恒等的ニハ零デナイ積分可能ナ解 $\varphi(x)$ ヲ有スル。所ガ (3)

---

(1) $K(x,y)$ ガ (1), (2) ノ條件ヲ満足スルト否トニ関ラズ。$mes(\mathcal{R})$ ＝有限，$u.b.|K(x,y)|$ ＝有限トノ二ツノ假定丈カラ云ヘルコトデアル。

ト |K|=1 ニヨリ

$$|\varphi(x)| \leqq \int_R K(x,y)|\varphi(y)|dy \leqq M\int_R |\varphi(y)|dy$$

従ツテ $u.b.|\varphi(x)| = Q$ = 有限トナル。$|\varphi(x)|$ ハ実際ニ上限 Q ヲ attain スルコトガ示セル。モット precise ニ $|\varphi(x)| = Q$ トナル如キ点集合ヲ $U_\omega = E(x, |\varphi(x)| = Q)$ トシタトキニ $mes(U_\omega) \geqq \frac{1}{M}$ ガ云ヘル。ソレニハ任意ノ $0 < \varepsilon < Q$ ナル ε ヲ喚ヘタトキ $U_\varepsilon = E(x, |\varphi(x)| \geqq Q-\varepsilon)$ ノ測度 $mes(U_\varepsilon) \geqq \frac{1}{Q}$ ガ云ヘルトヨイ。$U_\omega = \prod_\varepsilon U_\varepsilon$ ダカラ。

偖テ (1), (2), (3) ニヨリ

$$|\varphi(x)| \leqq \int_{U_\varepsilon} Q|K(x,y)|dy + \int_{R-U_\varepsilon} (Q-\varepsilon)|K(x,y)|dy$$

$$= Q - \varepsilon\int_{R-U_\varepsilon} |K(x,y)|dy$$

ヲ得ル。所ガ Q ガ上限ダカラ任意ノ $\eta > 0$ ニ対シテ $Q - |\varphi(x')| < \varepsilon\eta$ ナル如キ x' ガ存在スル。従ツテ $\int_{R-U_\varepsilon} |K(x',y)|dy < \eta$. 之レト (2) ト $M = u.b.|K(x,y)|$ トヲ組合セテ $1-\eta \leqq \int_{U_\varepsilon} M\,dy$。$\eta$ 任意ダツタカラ $mes(U_\varepsilon) \geqq \frac{1}{M}$.

第二段。x_0 ヲ U_ω ノ任意ノ点トスレバ、之ニ対シテ R ノ部分集合 $R_0(x_0)$ ガ定ツテ

$$\begin{cases} \varphi(x) \equiv \dfrac{\varphi(x_0)}{\lambda} & \text{for} \quad x \in R_0(x_0) \\ mes\left(R_0(x_0)\right) \geqq \dfrac{1}{M}. \end{cases}$$

$\varphi(x_0) = \lambda \int_R K(x_0, y)\varphi(y)\,dy$ 及び $\int_R K(x_0, y)\,dy = 1$ カラ

$$\int_R K(x_0, y)\left\{1 - \frac{\lambda\varphi(y)}{\varphi(x_0)}\right\} dy = 0$$

ヲ得ル。 $\lambda\varphi(y)/\varphi(x_0) = \alpha(y) + i\beta(y)$ トオケバ

$|\varphi(x_0)| = Q$ カラ $\alpha^2(y) + \beta^2(y) \leqq 1$、故ニ $K(x_0, y) \geqq 0$, $1 - \alpha(y) \geqq 0$ カラ $K(x_0, y) > 0$ ナル如キ y ノ点ニ到ル所デ $1 - \alpha(y) = 0$, 従ッテ $\beta(y) = 0$. 故ニ $\varphi(x) = \dfrac{\varphi(x_0)}{\lambda}$ ナル如キ x ノ点集合 $R_0(x_0)$ ハ確ニ $K(x_0, y) > 0$ ナル如キ y ノ集合ヲ含ム。(1)

$$1 = \int_R K(x_0, y)\,dy = \int_{K(x_0,y)>0} K(x_0, y)\,dy \leqq M \int_{K(x_0,y)>0} dy$$

ダカラ

$$mes\left(R_0(x_0)\right) \geqq \frac{1}{M}.$$

第三段。 x_1 ヲ $R_0(x_0)$ ノ任意ノ点トスルトキ $|\lambda| = 1$ ニヨリ勿論 $|\varphi(x_1)| = Q$. 従ッテ上ト同ジク $R_1(x_1)$ ヲ定メ

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{\varphi(x_1)}{\lambda} = \dfrac{\varphi(x_0)}{\lambda^2} & \text{for} \quad x \in R_1(x_1) \\ mes\left(R_1(x_1)\right) \geqq \dfrac{1}{M}. \end{cases}$$

---

(1) mes 0 ノ集合ヲ無視スレバ

以下同様ニシテ $\mathfrak{R}_2(x_2)$, $\mathfrak{R}_3(x_3)$, ... ガ定リ

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{\varphi(x_0)}{\lambda^{k+1}} & \text{for} \quad x \in \mathfrak{R}_k(x_k) \\ mes\,(\mathfrak{R}_k(x_k)) \geqq \dfrac{1}{M}. \end{cases}$$

所ガ $mes(\mathfrak{R}) = 1$ ダカラ、$\mathfrak{R}_l(x_l)$ ト $\mathfrak{R}_m(x_m)$ トガ $(l \neq m)$ 共通点ヲモツ如キ l, m ガ存在シナケレバナラナイ。之共通点デハ $\varphi(x_0)/\lambda^{l+1} = \varphi(x_0)/\lambda^{m+1}$ トナルカラ $\varphi(x_0) \neq 0$ ニヨリ $\lambda^{|l-m|} = 1$. ―― 以上 ――

λ ニツイテノ有理型函數 $K(x, y, \lambda)$ ノ絶対値ノ pole ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_\delta$[1] 且ツ λ_i ニ於ケル principal part ヲ夫々

$$\frac{l_i(x, y)}{\lambda_i - \lambda}$$ (simple pole ナコトハ Lemma 1 ニ示シタ)

トスレバ, resolvent ニ関スル一般論カラ[2]

$$(5) \quad K(x, y) = \sum_{i=1}^{\delta} \frac{l_i(x, y)}{\lambda_i} + \varepsilon(x, y)$$

ト置リトキ

---

(1) 但シ λ_1 ノトスル. $\lambda = 1$ が pole ニナルコトハ $\varphi(x) \equiv 1$ が $\varphi(x) = \int_{\mathfrak{R}} K(x, y)\varphi(y)\,dy$ ノ解ニナルコト (2)式カラワカル。

(2) Goursat: loc. cit. p. 402

$$(6)\quad \begin{cases} \int_R l_i(x,z)\, l_i(z,y)\, dz = l_i(x,y) \\ \int_R l_i(x,z)\, l_j(z,y)\, dz \equiv 0, \qquad i \neq j \\ \int_R l_i(x,z)\, \varepsilon(z,y)\, dz = \int_R \varepsilon(x,z)\, l_i(z,y)\, dz \end{cases}$$

が成立スル。且ツ $\varepsilon(x,y)$ ナル核ノ resolvent ノ poles ハ $K(x,y,\lambda)$ ノ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$ 以外ノ poles ト principal part ヲ含メテ一致スル。

Lemma 3. $\underset{x,y\in R}{u.b.} |\varepsilon^{(n)}(x,y)| \leqq \dfrac{C}{(1+\delta)^{n-1}}$; $n=1,2,\cdots\cdots$

ナル如キ常数 $C, \delta > 0$ ガ存在スル。

証明. $K(x,y)$ ト共ニ $|l_i(x,y)|$ ハ R デ有界ガカラ $u.b.|\varepsilon(x,y)| = \varepsilon =$ 有限デアル。ヨッテ $\varepsilon(x,y)$ ノ resolvent ニ (4) 式ヲ適用デキル。コノ resolvent ノ pole 全テ絶対値ノヨリ大ガカラ分母ノ絶対値ハ $>$ 常数 >0 for $|\lambda| \leqq 1+2\delta$ ナル如キ $\delta > 0$ 存在ス。分子ノ一般項 $\lambda^p A_p(x,y)$ ノ絶対値ハ此ノ場合, Hadamard ノ行列式ニ関スル定理ヲ用ヒ, 全テノ $x, y \in R$ ニ対シ

$$\frac{\varepsilon^{p+1}(p+1)^{\frac{p+1}{2}} |\lambda|^p}{\lfloor p}$$

ヨリ小サイ。$\dfrac{1}{\lfloor p} < \dfrac{e^{p+1}}{(p+1)^{p+1}}$ ヲ用ヒテ之ノ p 乗根ハ

$p \to \infty$ ノトキ 0 = 収斂スルコトガワカル。故ニ結局

$$\underset{\substack{|\lambda| \leqq 1+2\delta \\ x, y \in R}}{\text{u. b.}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n-1} \varepsilon^{(n)}(x, y) \right| < C$$

ナル如キ常数 C ガ存在スルコトガワカル。ヨッテ Taylor 級数ノ良ク知ラレタ定理カラ求ムル結果ヲ得ル。

§2. 結　論

I. (5), (6) 及ビ Lemma 3 = ヨリ

$$(7)\begin{cases} K^{(n)}(x, y) = \sum_{i=1}^{\Delta} \dfrac{l_i(x, y)}{\lambda_i^n} + \varepsilon^{(n)}(x, y) \\ |\varepsilon^{(n)}(x, y)| \text{ ノ上限} \leqq \dfrac{C}{(1+\delta)^{n-1}} \end{cases}$$

之レハ Lemma 2 = ヨリ $K^{(n)}(x, y)$ ガ n = ツイテ asymptotic = periodic ナコトヲ示ス。

II. $K^{(n)}(x, y)$ ガ $n \to \infty$ ノトキ、x, y = ツキ一様 = 収斂スルタメノ必充條件ハ 尺(x, y, λ) ノ絶對値 1 ノ pole ガ $\lambda = 1$ 以外 = 存在シナイコトデアル。

証明. 充分ナコトハ (7) 式ヨリ明カ。必要。若シ λ_2 ナル ($|\lambda_2| = 1$) ナル pole アレバ

$$\varphi(x) = \lambda_2 \int_R K(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

ヲ満足スル積分可能ナ $\varphi(x) \neq 0$ ガ存在スル。Lemma 2 ト同様 = シテ $|\varphi(x)|$ ハ有界且ツ任意ノ n = 対シテ

$$\varphi(x)=\lambda_2^n\int_R K^{(n)}(x,y)\varphi(y)\,dy.$$

が成立スルカラ $\lambda_2\neq 1,\ |\lambda_2|=1$ デ $K^{(n)}(x,y)$ ー様収斂デハアリ得ナイ。

III. $K^{(n)}(x,y)$ノ Césaro ノ平均値

$$\frac{K^{(\nu+1)}(x,y)+K^{(\nu+2)}(x,y)+\cdots\cdots+K^{(\nu+n)}(x,y)}{n}$$

$$=\sum_{i=1}^{s}l_i(x,y)\left[\frac{1}{n}\sum_{t=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^{\nu+2+t}\right]+\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon^{(\nu+t)}(x,y)$$

$$\longrightarrow l_1(x,y)\quad(x,y,\nu=ツイテー様=)$$

$$as\ n\longrightarrow\infty.$$

IV. 上ノ極限遷移確率密度[1] $l_1(x,y)$ ガ $x=$ defiend シナイタメノ必充條件ハ，同次積分方程式

$$(8)\qquad \varphi(x)=\int_R K(x,y)\varphi(y)\,dy.$$

ノ一次独立ナ解ガ $\varphi\equiv 1$ 以外ニナイコトデアル。

証明. 必要. (8) カラ $\varphi(x)=\int K^{(n)}(x,y)\varphi(y)\,dy$ ヲ得ルカラ $\varphi(x)=\int l_1(x,y)\varphi(y)\,dy$，従ッテ $\varphi(x)$ ハ $l_1(x,y)$ ト共ニ $x=$ independent.

充分. $\lambda=1$ ガ $K(x,y,\lambda)$ ノ simple pole トニナイコトカラ、積分方程式ノ一般論[2]ニヨリ

---

(1) Césaro ノ平均

(2) Goursat: loc. cit. p. 405

$$l_s(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x)\psi_i(y).$$

コヽ = φ_i, ψ_i ハ夫々

$$\varphi_i(x)=\int K(x,y)\varphi_i(y)\,dy,\quad \psi_i(x)=\int K(z,x)\psi_i(z)\,dz$$

ノ一次独立ナ solution ヲ悉レナヲル。故ニ明カ。

V. $l_1(x,y)$ ガ y = depend シナイヌメノ必充條件ハ

$$\int K(z,x)\,dz=1$$

且ツ $\psi(x)=\int K(z,x)\psi(z)\,dz$ ノ一次独立ナ解ガ $\psi\equiv 1$ 以外ニナイコトデアル。

証明。 III ノ所論カラタヤスク ワカル。シカモ III ト組合セテコノトキハ $l_1(x,y)\equiv$ const. ニナル。