OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	確率論ヘノ積分方程式ノ應用, II (N.Kryloff ト N.Bogoliouboffノ論文紹介並ニFréchetノ定理ノ擴張)
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 161, p. 282-294
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74635
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

679. 確率論ヘノ積分方程式ノ應用, II. (N. Kryloff ト N. Bogolioubоff ノ論文紹介並ニ Fréchet ノ定理ノ擴張)

吉田耕作 (阪大)

前談話 (676) ニ於テ $K(x,y) \geqq 0$ 且ツ $\int_{\Omega} K(x,y)\,dy \equiv 1$ ナル如キ核 $K(x,y)$ ヲ n 回反復 (iterate) シタ核 $K^{(n)}(x,y)$ ノ $n \to \infty$ ニ於ケル asymtotic ナ狀態ニ關スル M. Fréchet ノ論文ヲ紹介シタ。Kryloff ト Bogoliouboff ノ論文 (Bull. Soc. Math. France 64 (1936)

ハ上ノ Fréchet ノ結果ニ鮮ヤカナ確率論的解釈ヲ與ヘテヲル。之ハ von Neumann ニヨル，compact ナ空間ニ於ケル incompressible + steady flow ヲ ergodic ナ部分ニ分ツ定理[1]ニ對比サセルト面白イ。

次ニ近着ノ C. Visser ノ論文（Proc. Amsterdam Acad. XLI, 5 (1938)）ノ idea ヲ使フト，上ノ Fréchet ノ結果ガ，Hilbert 空間ノ線型 operator ノ反轉ノ議論トレラーツノ擴張ヲ與ヘラレルコトヲ示シタイ。

§3. Kryloff ト Bogolioubоff ノ結果

1. 準備. 彼等ノ考ヘノ出發点ハ極メテ簡單デアル。即チ $\varphi(x)$ ガ

$$(9)\quad \varphi(x)=\int_R K(y,x)\,\varphi(y)\,dy$$

ヲ滿足スレバ絶対値 $|\varphi(x)|$ モ亦 (9) ヲ滿足スルト云フノデアル。証明ニハ。假定 $K(y,x)\geqq 0$ ニヨリ

$|\varphi(x)|\leqq\int_R K(y,x)\,|\varphi(y)|\,dy$ 即チ $\int_R K(y,x)\,|\varphi(y)|\,dy-|\varphi(x)|\geqq 0$

ヲ得，次ニ假定 $\int_R K(y,x)\,dx\equiv 1$ ニヨリ積分シテ

$\int_R\int_R K(y,x)\,|\varphi(y)|\,dy\,dx-\int_R|\varphi(x)|\,dx=0$ ヲ得ルコトニ注

---

(1) von Neumann: Ann. of Math. 33, 3 (1932). N. Kryloff ト N. Bogolioubоff ノ論文（Ann. of Math. 38, 1 (1937)）ノ方ガ証明ガワカリ易イシ且ツ precise デアル。

意スル。且シ，以上オラ $|\varphi(x)|$ が (9) ヲ満足スルコトヲ云フタメニ，核 $K(x,\xi)$ ノ連続性ヲ仮定スルノデアル。[1]

猪ヲ上ロラ，(9) ノ解全体ヲ $\mathcal{E}$ トスルト

$\mathcal{E}$ ハ R ニ於ケル連続且ツ積分可能ナ函数ノ線型集合デ i) 有限次元，[2] 且ツ ii) $\varphi(x)\in\mathcal{E}$ ナラバ $|\varphi(x)|\in\mathcal{E}$ ヲ満足スル。

Lemma 4. $\mathcal{E}$ カラ有限コノ一次独立ナ $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ……, $\varphi_m(x)$ ヲ撰ビ

(10) $\varphi_i(x)\geqq 0$ for $i=1,2,\cdots\cdots,m$; $\varphi_i(x)\varphi_j(x)\equiv 0$ for $i\neq j$ 且ツ $\mathcal{E}$ ニ属スル任意ノ positive ナ函数 $\varphi(x)$ ハ $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ……, $\varphi_m(x)$ ノ一次結合[3] トシテ表ハサレル如クナシ得ル。

証明. $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)\in\mathcal{E}$ ヲ一次独立トスルト，ii) ニヨリ $\varphi_1(x)=|\psi_1(x)-\psi_2(x)|+\psi_1(x)-\psi_2(x)$, $\varphi_2(x)=|\psi_1(x)-\psi_2(x)|+\psi_2(x)-\psi_1(x)$ ハ一次独立且ツ (10) ヲ満足スル。若シ $\mathcal{E}$ ノ任意ノ positive ナ函数ガ $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ト一次関係ナラバ Lemma ハ証明出来タコトニナル。($\varphi_1=\varphi_1$,

---

(1) Fréchet ノ仮定ノ他ニ，此ノ為メニハ R が topological space トシテヲクネバナラヌ。此処ハ核ト共ニ固有函数 $\varphi(x)$ モ勿論連続ニナル。

(2) 一次独立ナモノノ個数有限ナコト。

(3) 勿論 (10) ニヨリ，其ノ際ノ係数ハ皆 non negative トナル筈。

$\varphi_2=\rho_2$ トスレバヨイ)。若シ ρ_1,ρ_2 トー次独立ナ $\psi(x)$ ガ存在シタトスレバ

$$\sigma_1(x)=|\rho_1(x)-\psi(x)|+\rho_1(x)-\psi(x)$$

$$\sigma_2(x)=|\rho_2(x)-\sigma_2'(x)|+\rho_2(x)-\sigma_2'(x)$$

$$\left(\text{但シ }\sigma_2'(x)=|\rho_2(x)-\psi(x)|+\psi(x)-\rho_1(x)\right)$$

$$\sigma_3(x)=|\rho_2(x)-\sigma_2'(x)|+\sigma_2'(x)-\rho_2(x)$$

ハ一次独立且ツ (10) ノ満足スル。何者，$\sigma_2(x)\sigma_3(x)\equiv 0$ ハ明カダカラ，$\sigma_1(x_0)>0$ ナル点 x_0 デハ $\sigma_2(x_0)=0$，$\sigma_3(x_0)=0$ ナルコトヲ云フトヨイ。偖テ $\sigma_1(x_0)>0$ カラ $\rho_1(x_0)-\psi(x_0)>0$，従ッテ $\sigma_2'(x_0)=0$ 及ビ $\rho_1(x_0)>0$ ($\psi(x)\geqq 0=$ヨル) ヲ得ル故 $\rho_2(x_0)=0$，$\sigma_2(x_0)=0$，$\sigma_3(x_0)=0$.

同様ノ論法ヲ繰返セバ (induction)，i)=ヨリ ε ノ positive ナ函数全体ハ有限次元ノ線型集合[1]ヲ作ルカラ，Lemma ノ証明ガ得テレル。——以上——

以下一般性ヲ失ハズニ，上ノ $\rho_i(x)$ ハ全テ $\int_R \rho_i(x)\,dx=1$ ト仮定シテ進ム。偖テ $K^{(n+1)}(z,x)=\int_R K^{(n)}(z,y)K(y,x)\,dy$ ナル定義ニヨリ，

$$l_1(z,x)=\lim_{n\to\infty}\left\{K(z,x)+K^{(2)}(z,x)+\cdots\cdots+K^{(n)}(z,x)\right\}\Big/n$$[2]

---

(1) 係数 non negative ナル一次結合ニ對シテ

(2) 測度 R ニ有限，上限 $\overline{x,y}|K(y,x)|$ ニ有限ノ仮定ノモトニ，一様収斂スルコトガ Fréchet ノ結果 (前談話) デアッタ。

ハ，z ヲ fix シタトキニ x ノ函数トシテ (9) ヲ満足スル。且ツ $K(z,x) \geqq 0$，$\int_R K(z,x)\,dx \equiv 1$ ニヨッテ

(11) $l_1(z,x) \geqq 0$，$\int_R l_1(z,x)\,dx \equiv 1$

故ニ Lemma 4 及ビ $\int_R \varphi_i(x)\,dx = 1$ カラ

(12) $l_1(z,x) = \sum_{i=1}^{m} \psi_i(z)\varphi_i(x)$，$\sum_{i=1}^{m} \psi_i(z) \equiv 1$，

$\psi_i(z) \geqq 0$ for $i = 1, 2, \cdots\cdots, m$.

ヲ得ル。以上ノ準備ヲ終リ

2. 結論. $\varphi_i(x) > 0$ トナル x ノ集合ヲ R_i トスルト Lemma 4 ニヨリ R_i ト R_j トハ互ニ共通点ヲ持タヌ ($i \neq j$ ナラバ)。$\varphi_i(x) = \int_R K(y,x)\varphi_i(y)\,dy$ カラ，全テノ n ニ対シ $\varphi_i(x) = \int_R K^{(n)}(y,x)\varphi_i(y)\,dy$ ヲ得ル。故ニ $\varphi_i(x) = \int_{R_i} K^{(n)}(y,x)\varphi_i(y)\,dy$。従ッテ全テノ i, n ニ対シ

$$K^{(n)}(y,x) = 0 \quad \text{for} \quad y \in R_i,\ x \in R - R_i.$$

故ニ

I. 最初 R_i ニアッタ点ハ，任意ノ n ニ対シ，n 単位時間後ニ $R - R_i$ ニハ確実ニ移ラナイ。

次ニ (10), (11), (12) ニヨッテ

$$1 = \int_R l_1(z,x)\,dx = \int_{\sum_{i=1}^{m} R_i} l_1(z,x)\,dx$$

ヲ得ルカラ

II. 任意ノ点 x カラ単位時間後ニ $R_1, R_2, \cdots\cdots, R_m$ ノ何レカニ移ルコトハ $n \to \infty$ ノトキ[1] 確實デアル。

之レハ $\sum_{i=1}^{m} R_i = R$ トラバ trivial デアルガ

III 若シ $m \geqq 2$ 且ツ R ガ連結集合ナラレバ $\sum_{i=1}^{m} R_i$ ヤ R デアル。

証明. $m \geqq 2$ トレ $R = \sum_{i=1}^{m} R_i$ トセヨ。$R' = R_1$, $R^2 = \sum_{i=2}^{m} R_i$ トスレバ $R = R' + R^2$, $\prod_{i=1}^{2} R^i =$ 空集合トナル。R_i ハ連続実函数 $\varphi_i(x)$ ガ >0 トナル x ノ集合ダカラ開集合。従ッテ R ハ互ニ共通点ヲモタヌ開集合 R', R^2 ノ和トナレカラ R ノ連結ト云フ假定ニ反スル。

§4. Fréchet ノ結果ノ一ツノ擴張

定理. Hilbert 空間 h_y ノ線型 operator K ガ vollstetig 且ツ

(13) $\|K^n \cdot x\| \leqq C\|x\|$ for any x and for any n.[2]

ヲ滿足スレバ operator $K_n = \frac{K + K^2 + \cdots\cdots + K^n}{n}$ ハ h_y ノ或ル operator K' ニ一樣收斂スル。[3]

---

(1) 但シ Césaro 平均ノ意味デ（前說話ヲミラレタイ）

(2) $K^2 \cdot x = K \cdot (K \cdot x)$, $\cdots\cdots$, $K^n \cdot x = K \cdot (K^{n-1} \cdot x)$. C ハ正常数。$\| \|$ ハ h_y デ絶對値（Norm）.

(3) 全テノ $x \in h_y$, $\|x\| \leqq 1$ ニ於テ一樣ニ $\lim_{n \to \infty} \|K' \cdot x - K_n \cdot x\| = 0$.

(注意) K が vollstetig ト云フノハ，絶對値有界ノ点集合ヲ絶對値ノ意味デ compact ナ集合ニ寫スコトヲ意味スル。線型積分 operator ハ vollstetig ナコトハ良ク知ラレテヲルカラ，上定理ガ前說話ニ紹介シタ Frechet ノ結果ヲ by ニ拡張シタモノニトッテルコトハ明カデアル。

以下証明ノタメノ Lemmas ヲ述ベル。

Lemma 1. vollstetig ナ K ノ固有値ハ複素数有限平面上デ孤立点集合ヲナシ，且ツソレラノ固有値ノ multiplicity ハ全テ有限デアル（良ク知ラレタ F. Riesz ノ定理）.

Lemma 2. (13)ヲ満足スル K ハ其絶対値ノヨリ大ナル固有値ヲモタナイ。

証. $|\lambda|>1$, $K\cdot x=\lambda\cdot x$, $x\neq 0$ トセヨ。之レカラ $K^n\cdot x=\lambda^n\cdot x$ ヲ得ルカラ $\|K^n\cdot x\|=|\lambda|^n\|x\|$ トナッテ (13) ニ矛盾スル。

Lemma 3. K ノ絶対値 1 ノ固有値ヲ $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots,\lambda_m^{(1)}$ トスレバ K ノ adjoint K^* ノ絶対値 1 ノ固有値ハ $\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_2,\cdots\cdots,\overline{\lambda}_m$ デアル。

証明. K^* ハ全テノ x,y ヲ by ニ對シ $(K\cdot x,y)=(x,K^*\cdot y)$[2] デ定義サレ，又良ク知ラレタ如ク (13) ハ $\|(K^n\cdot x,y)\|\leqq C\|x\|\|y\|$ ト同等ガカラ，K^* モ亦 (13) ヲ満足スル。諸ヲ $\overline{\lambda}_i$

---

(1) m ノ有限ナコトハ Lemma 1.

(2) (x,y) ハ inner product.

が K^* ノ固有値トラズトスレバ (B)ヲ満足スル $\frac{K^*}{\lambda_1}=M$ ハ1ヲ固有値トシナイ。然ラバ任意ノ $x\in l_y$ ニ對シ

$$y_n=\frac{M\cdot x+M^2\cdot x+\cdots\cdots+M^n\cdot x}{n}$$ ハ0ニ弱收斂[1]スル。

何者，(13)ニヨリ $\|y_n\|\leqq C\|x\|$ ヲ得ルカラ絶對値有界ナ $\{y_n\}$ ガ若シ0ニ弱收斂シナケレバ，$\{y_n\}$ ハ $z\neq 0$ ニ弱收斂スル部分列 $\{y_{n_i}\}$ ヲ含ム。[2] 然レテ(13)ニヨリ

$\|M\cdot y_{n_i}-y_{n_i}\|\leqq\frac{2C}{n_i}\|x\|$ ガ $n_i\to\infty$ ノトキ0ニ收斂スルカラ M，M^* ノ連續性（有界性）ニヨッテ $M\cdot z=z$ ナル矛盾ヲ得ルカラ。

偖テ任意ノ $x,z\in l_y$ ニ對シ

$$\left(\frac{M\cdot x+M^2\cdot x+\cdots\cdots+M^n\cdot x}{n},z\right)=\left(x,\frac{M^*\cdot z+M^{*2}\cdot z+\cdots\cdots+M^{*n}\cdot z}{n}\right)$$

ガ成立スルカラ，上述ニヨリ左辺從ッテ右辺ガ0ニ收斂スル。所ガ $M^*=\frac{K}{\lambda_1}$ ダカラ $z\neq 0$，$M^*\cdot z=z$ ナル如キ z ガ存在スル。斯ル z ニ對シテハ右辺ハ (x,z)．任意ノ x ニ對シ $(x,z)=0$ トイフコトハ $z\neq 0$ ニ矛盾スル。

ヨッテ K ガ(13)ヲ滿足スレバ，λ_1 ($|\lambda_1|=1$) ガ K ノ固有値ナルトキ K^* ハ $\overline{\lambda_1}$ ヲ固有値トスル。$(K^*)^*=K$ ニ注意スレバ symmetry カラ Lemma ノ証明ヲ得ル。

---

(1) 任意ノ $z\in l_y$ ニ對シ $\lim_{n\to\infty}(y_n,z)=0$ ナルコト。

(2) l_y ニ於ケル有界点集合ハ l_y ノ点ニ弱收斂スル部分列ヲ含ム。

Lemma 4. $K\cdot x=\lambda_i\cdot x$ ヲ満足スル x 全体ヲ $\mathfrak{C}_i$ トスル。

$\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{C}_m$ ノ張ル線型閉集合ヲ $\mathfrak{M}_e$, $\mathfrak{M}_e$ ノ全テノ点＝直交スル[1]点全体ノ張ル線型閉集合ヲ $\mathfrak{M}_1$ トスル。K^* ニツイテモ同様＝ $K^*\cdot x=\overline{\lambda}_i\cdot x$ ノ解全体ノ張ル線型閉集合ヲ $\mathfrak{C}_i^*$, $\mathfrak{C}_1^*$ 乃至 $\mathfrak{C}_m^*$ ノ張ル線型閉集合 $\mathfrak{M}_e^*$, $\mathfrak{M}_e$ ＝直交スル点全体ノ張ル線型閉集合ヲ $\mathfrak{M}_1^*$ トスル。

$\mathfrak{h}=\mathfrak{M}_e\oplus\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_e^*\oplus\mathfrak{M}_1^*$, $\mathfrak{M}_e=\mathfrak{C}_1\dotplus\cdots\cdots\dotplus\mathfrak{C}_m$, $\mathfrak{M}_e^*=\mathfrak{C}_1^*\dotplus\cdots\cdots\dotplus\mathfrak{C}_m^*$.

然ラバ $\mathfrak{M}_e$ ト $\mathfrak{M}_1^*$, $\mathfrak{M}_e^*$ ト $\mathfrak{M}_1$ トハ 0 以外＝共通点ナイ。

証明. 任意ノ x, y ＝対シ,

$$(K\cdot x-\lambda_i x, y)=(x, K^*\cdot y)-(x, \overline{\lambda}_i y)=(x, K^*\cdot y-\overline{\lambda}_i y).$$

ヨッテ $x\in\mathfrak{C}_i$ ナラ上式ノトナルカラ $(K^*y-\overline{\lambda}_i y)\perp\mathfrak{C}_i$. 逆＝又カ $K^*y-\overline{\lambda}_i y$ ノ形ノ全テノ点ト直交スレバ上式カラ $K\cdot x-\lambda_i x$ ハ全テノ y ト直交シ故ッテ $K\cdot x=\lambda_i x$ 即チ $x\in\mathfrak{C}_i$. 故＝ $\mathfrak{C}_i$ ハ $K^*-\overline{\lambda}_i E$ (E ハ単位変換) ノ値域 (Wertsumrat) ＝直交スル点全体ノ集合＝一致スル。

故＝ $\mathfrak{M}_e$ ハ $(K^*-\overline{\lambda}_i E)$ $(i=1,2,\cdots\cdots,m)$ ノ値域ノ共通部分＝ナル。同ジク $\mathfrak{M}_1^*$ ハ $(K-\lambda_i E)$ $(i=1,2,\cdots\cdots,m)$ ノ値域ノ共通部分＝ナル。

今若シ $x\in\mathfrak{M}_e\cdot\mathfrak{M}_1^*$ トスレバ, $x\in\mathfrak{M}_e$ カラ $x=x_1+x_2+\cdots$

---

(1) x カ $\mathfrak{M}_e$ ＝直交スルトハ $(x, y)=0$ for all $y\in\mathfrak{M}_e$ ノ意味.

……+x_m, $x_i \in \mathfrak{C}_i$ ト unique ニ表ハサレル[1]. $x_1=0$ ナコトヲ云フニハ $x \in \mathfrak{M}_1^*$ カラ $x=(K-\lambda_1 E)\cdot y$ ノ形ニ注意スルト

$$\frac{K}{\lambda_1}\cdot x = x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}x_2 + \cdots\cdots + \frac{\lambda_m}{\lambda_1}x_m = \frac{K^2}{\lambda_1}\cdot y - K\cdot y$$

$$\left(\frac{K}{\lambda_1}\right)^2\cdot x = x_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 x_2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^2 x_m = \frac{K^3}{\lambda_1^2}\cdot y - \frac{K^2}{\lambda_1}\cdot y$$

$$\vdots$$

ノ算術平均ヲトッテ

$$x_1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2 + \cdots\cdots + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k x_m$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\frac{K^{n+1}}{\lambda_1^n}\cdot y - K\cdot y\right\}$$

ヲ得. (13) ト $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$ $|\lambda_i| = 1$ ヨッテ, $n \to \infty$ ノトキ $x_1 = 0$ トナルコトカラワカル。

同様ノ議論ヲクリカヘシ結局 $x \in \mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}_1^*$ ナラ $x=0$. 同ジク $x \in \mathfrak{M}^*\cdot\mathfrak{M}_1$ ナラ $x=0$

Lemma 5. $x \in \mathfrak{M}_1^*$ ナラバ $\dfrac{K\cdot x + \cdots\cdots + K^n\cdot x}{n}$ ハ一様ニ0ニ収斂スル。

証明. 任意ノ $y \in \mathfrak{y}$ ニ対シ $K(K-\lambda_i E)\cdot y = (K-\lambda_i E)(K\cdot y)$ ダカラ, K ハ $\mathfrak{M}_1^*$ ヲ $\mathfrak{M}_1^*$ 内ニ写ス。K ヲ Hilbert 空間 $\mathfrak{M}_1^*$ デノ operator ト考ヘルト vollstetig 且ツ (13) ヲ満足スル。Lemma 4 ヨリ K ハ $\mathfrak{M}_1^*$ デハ絶対

---

(1) $\mathfrak{C}_i$ ハ互ニ直次ハシナイカヒシレスガ互ニ一次独立.

値 1 ノ固有値モタヌ。然ツテ $(E-\lambda K)$ ナル $\mathfrak{M}_1^*$ デノ voll-stetig + operator ガ, Lemma 1, 2 ヲ用ヒ $|\lambda| \leqq 1+\delta$, $\delta>0$ デ固有値モタヌ如キ $\delta>0$ ガ存在スル。ヨッテ $(E-\lambda K)$ ノ resolvent $(E-\lambda K)^{-1}$ ハ $|\lambda| \leqq 1+\delta$ デ入ノ正則函数トナル。(1) ヨッテ $(E-\lambda K)^{-1} = E+\lambda A_1+\lambda^2 A_2+\cdots\cdots$ ト $|\lambda| \leqq 1+\delta$ デ展開デキル。$|\lambda|$ ガ充分小サイ所デハ $(E-\lambda K)^{-1} = E+\lambda K+\lambda^2 K^2+\cdots\cdots$ ダカラ $A_i = K^i$。

ヨッテ Cauchy ノ積分表示ヨリ

$$\|K^i\| \leqq \frac{D}{\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^i}, \quad D = \text{O. G.}_{|\lambda| \leqq 1+\frac{\delta}{2}} \|(E-\lambda K)^{-1}\|$$

ヲ得ルカラ.(2)

Lemma 6. $\mathfrak{h}$ ノ $\mathfrak{M}^*$ ヘノ projection ヲ Q トスルトキ Q ハ $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{M}^*$ ヘノ對ノ一ニ寫像スル。

証明: $x \in \mathfrak{M}$, $Q \cdot x = 0$ トスレバ $x \in \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M}_1^*$ トナリ ($\mathfrak{h} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}_1^*$ ニヨル) Lemma 4 カラ $x=0$. コレハ Q ガ $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{M}^*$ ノ中ニ schlicht ニ寫スコトヲ示ス。若シ $Q \cdot \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^*$ ナラズトスレバ, 或ル $y \neq 0$ ($y \in \mathfrak{M}^*$) ニ對シ $Q \cdot \mathfrak{M}$ ガ直交スル。即チ $(y, Q \cdot x) = 0$ for $x \in \mathfrak{M}$, Q ハ projection ダカラ $(y, Q \cdot x)$

---

(1) $(E-\lambda K)$ ノ resolvent ガ入ノ有理型函数トナルコト及ビ $(E-\lambda K)$ ノ固有値以外デハ正則ナコトハ良ク知ラレテヲル.

(2) $\|K\| = \text{O. G.}_{\substack{x \in \mathfrak{h} \\ \|x\| \leqq 1}} \|K \cdot x\|$

$=(Q\cdot y, x)=(y, x)$ ヲ得ルカラ $y\in\mathfrak{M}$, ($h_y=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{M}_1$ ニヨル)。従ッテ $y\in\mathfrak{M}_1\cdot\mathfrak{M}^*$ ニヨリ Lemma 4 カラ $y=0$ ナルネ盾ヲ得ル。

ヨッテ Q ハ $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{M}^*$ ニ一對一ニ寫ス。

定理ノ証明. Q ニヨル $\mathfrak{M}\to\mathfrak{M}^*$ ナル寫像ノ逆寫像 P が存在スル(Lemma 6)。任意ノ $x\in h_y$ ヲ

$$x=PQ\cdot x+(x-PQ\cdot x)=y_1+y_2$$

ト分解スレバ, $y\in\mathfrak{M}$, $y_2\in\mathfrak{M}_1^*$ トナル。何者, y_1 ハ定義カラ明ニ $\in\mathfrak{M}$. $y_2\in\mathfrak{M}_1^*$ 云フニハ $Q\cdot y_2=0$ 云フトヨイガ之レモ $Q\cdot y_2=Q\cdot x-QPQ\cdot x=Q\cdot x-Q\cdot x=0$ デ明カ。

Lemma 5 ニヨリ $\dfrac{K\cdot y_2+\cdots\cdots+K^n\cdot y_2}{n}$ ハ 0 ニ一樣收斂スルカラ, $y_1=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_m$, $x_i\in\mathfrak{C}_i$ トシタトキ $\dfrac{K\cdot y_1+\cdots\cdots+K^n\cdot y_1}{n}$ が x_1 ニ一樣收斂スルコトヲ云フトヨイ。但シ $\lambda_1=1$ ト假定スル。ソコデ $\mathfrak{C}_1=0$ ナラバ, 即チ 1 が K ノ固有値ナラズバ $x_1=0$ トノ convention ヲ用フルコトニシテ。

偖テ $K\cdot y_1=x_1+\lambda_2x_2+\cdots\cdots+\lambda_mx_m$, $K^2\cdot y_1=x_1+\lambda_2^2x_2+\cdots\cdots+\lambda_mx_m$, $\cdots\cdots$ ニヨリ

$$\frac{K\cdot y_1+\cdots\cdots+K^n\cdot y_1}{n}=x_1-x_2\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_2^k}{n}+\cdots\cdots+x_m\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_m^k}{n}.$$

$\lambda_i\neq1$ 且ツ $|\lambda_i|=1$ ナルコト及ビ $\mathfrak{C}_i$ が全テ有限次元且ツ $\mathfrak{C}_1,\cdots\cdots,\mathfrak{C}_m$ が互ニ一次独立ナルコトカラ

$\frac{K\cdot y_1+\cdots\cdots+K^n\cdot y_1}{n}$ ノ x_1 = 一様収斂スルコトヲ結論シ得ル。 ——以上——

§5. Visser ノ結果

前章ハ今少シ簡単ニセレルノデスガ，アソコノ Lemmas ヲ使ッテ Visser ノ結果ヲ紹介シタカッタノデ，ダラダラシテ了ッタ次第デス。

Visser ノ定理. K ヲ by ノ線型 operator デ且ツ (13) ヲ満足スルモノトスレバ，任意ノ x ニ對シ $\frac{K\cdot x+K^2\cdot x+\cdots\cdots+K^n\cdot x}{n}$ ガ弱収斂スル。(K ノ vollstetig ヲ假定セヌ)

証明. 前章デ $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$ ヲ夫々 $K\cdot x=x$, $K^*\cdot x=x$ ヲ満足スル x ノ張ル線型閉集合トスレバ $by=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{M}_1$, $=\mathfrak{M}^*\oplus\mathfrak{M}_1^*$ デ $\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{M}_1^*=\mathfrak{M}^*\cdot\mathfrak{M}_1=0$ (Lemma 4 ト同様)。Lemma 6 が同ジク成立スルカラ任意ノ $x\in by$ ハ x_1+x_2 ($x_1\in\mathfrak{M}$, $x_2\in\mathfrak{M}_1^*$) ト分解デキル。Lemma 5 ト同ジク K ハ $\mathfrak{M}_1^*$ デハ 1 ヲ固有値トセヌカラ，Lemma 3 ノ証明ノ中ニ示シタ如クシテ $\frac{K\cdot x_2+\cdots+K^n\cdot x_2}{n}$ ハ 0 ニ弱収斂スル。一方 $\frac{K\cdot x_1+\cdots\cdots+K^n\cdot x_1}{n}=x_1$, by $x_1\in\mathfrak{M}$ ダカラ定理ガ証サレタ。

注意 若シ K ガ vollstetig ナラ上ノ収斂ハ強収斂(1)トナ

(1) 絶對値ノ意味ノ収斂