



Title	確率論へノ積分方程式ノ應用, II (N.Kryloff ト N.Bogoliouboffノ論文紹介並ニFréchetノ定理ノ擴張)
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 161, p. 282-294
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74635
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

679. 確率論へ、積分方程式、應用、II. (N. Kryloff
 ト N. Bogoliouboff / 論文紹介並 = Fréchet
 / 定理、擴張)

吉田 耕作 (阪大)

前談話 (676) = 於て $K(x, y) \geq 0$ 且 $\int_{\mathcal{R}} K(x, y) dy \equiv 1$
 ナル如キ核 $K(x, y)$ 7 n 回反復 (iterate) シタ核 $K^{(n)}(x, y)$, $n \rightarrow \infty$ = 於ケル asymptotic + 状態 = 関スル
 M. Fréchet / 論文ヲ紹介シタ。Kryloff ト Bogoliouboff / 論文 (Bult. Soc. Math. France 64 (1936))

以上、Fréchet / 結果 = 鮮々 カ + 確率論的解釈ヲ與ヘテ
 ナル。之ハ von Neumann = ヨル, compact ナ空間
 = 於ケル incompressible + steady flow ナ er-
 godic ナ 部分 = 分々 定理⁽¹⁾ = 對比ケルコト面白イ。

次 = 近着, C. Visser / 論文 (Proc. Amsterdam
 Acad. XL1, 5 (1938)) / idea ナ 使フト, 上, Fréchet
 / 結果ガ, Hilbert 空間 / 線型 operator / 反覆 / 議論
 トレヲ ーツ / 擴張ヲ與ヘラレルコトヲ示シタイ。

§3. Kryloff ト Bogoliuboff / 結果

1. 準備. 彼等 / 考ヘ / 出発点ハ 極メテ 簡單デアル。
 即チ $\varphi(x)$ ガ

$$(9) \quad \varphi(x) = \int_{\mathcal{R}} K(y, x) \varphi(y) dy$$

ヲ 満足スルハ 絶対値 $|\varphi(x)|$ $\in$ 亦 (9) ナ 満足スルト云フノヲ
 アル。証明 = ハ。假定 $K(y, x) \geq 0$ = ヨリ

$$|\varphi(x)| \leq \int_{\mathcal{R}} K(y, x) |\varphi(y)| dy \quad \text{即チ} \quad \int_{\mathcal{R}} K(y, x) |\varphi(y)| dy - |\varphi(x)| \geq 0$$

ヲ得, 次 = 假定 $\int_{\mathcal{R}} K(y, x) dx \equiv 1$ = ヨリ 積分シテ

$$\int_{\mathcal{R}} \int_{\mathcal{R}} K(y, x) |\varphi(y)| dy dx - \int_{\mathcal{R}} |\varphi(x)| dx = 0 \quad \text{ヲ得ルコト} = \text{注}$$

(1) von Neumann: Ann. of Math. 33, 3 (1932).
 N. Kryloff ト N. Bogoliuboff / 論文 (Ann. of
 Math. 38, 1 (1937)) / 方ガ 証明ガ ヲカリ 易イシ 且ツ
 precise デアル。

意スル。且シ、以上オラ $|f(x)|$ が (9)ヲ満足スルコトヲ云
フヌメニ、核 $K(x, y)$ ノ連続性ヲ假定スルノチアリ
ル。⁽¹⁾

諸ヲ上オラ、(9)ノ解全体ヲ E トスルト

E ハ R ニ於ケル連続且ツ積分可能ノ函数ノ線型集合
デ ii) 有限次元⁽²⁾、且ツ ii) $f(x) \in E$ ナラバ $|f(x)| \in E$ ヲ
満足スル。

Lemma 4. E カラ有限コノ一次独立ノ $f_1(x), f_2(x),$
-----, $f_m(x)$ ヲ撰ビ

(10) $f_i(x) \geq 0$ for $i=1, 2, \dots, m$; $f_i(x) f_j(x) \equiv 0$
for $i \neq j$ 且ツ E ニ属スル任意ノ positive ノ函数
 $f(x)$ ハ $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ ノ一次結合⁽³⁾トシテ
表ハサレル如クナシ得ル。

証明. $\psi_1(x), \psi_2(x) \in E$ ヲ一次独立トスルト, ii) =
ヨリ $f_1(x) = |\psi_1(x) - \psi_2(x)| + \psi_1(x) - \psi_2(x)$, $f_2(x) =$
 $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| + \psi_2(x) - \psi_1(x)$ ハ一次独立且ツ (10)ヲ満足ス
ル。若シ E ノ任意ノ positive ノ函数ガ $f_1(x), f_2(x)$ ト
一次関係ナラバ Lemmaハ証明出来タコトナル。(4) = f_1 ,

(1) Fréchetノ假定ノ他ニ。此ノ爲メハ R ガ topological
spaceトシテマカネバナラス。此度ハ核ト共ニ固有函数
 $f(x) \equiv 0$ ヲ勿論連続ニナス。

(2) 一次独立ノモノノ個數有限ナコト。

(3) 勿論 (10)ニヨリ、其ノ際ノ係數ハ non negativeトナ
ル筈。

$\varphi_2 = \rho_2$ トス レバ ヨイ。 若シ ρ_1, ρ_2 ト一次独立ナ $\varphi(x)$ ナ
存在シタトスレバ

$$\sigma_1(x) = |\rho_1(x) - \varphi(x)| + \rho_1(x) - \varphi(x)$$

$$\sigma_2(x) = |\rho_2(x) - \sigma_2'(x)| + \rho_2(x) - \sigma_2'(x)$$

$$(\text{但シ } \sigma_2'(x) = |\rho_2(x) - \varphi(x)| + \varphi(x) - \rho_1(x))$$

$$\sigma_3(x) = |\rho_2(x) - \sigma_2'(x)| + \sigma_2'(x) - \rho_2(x)$$

ハ一次独立且 $\gamma(10)$ ノ満足スル。 何者, $\sigma_2(x) \sigma_3(x) \equiv 0$ ハ
明カカラ, $\sigma_1(x_0) > 0$ ナル点 x_0 デハ $\sigma_2(x_0) = 0$,
 $\sigma_3(x_0) = 0$ ナルコトヲ云フトヨイ。 然レ $\sigma_1(x_0) > 0$ カ
ラ $\rho_1(x_0) - \varphi(x_0) > 0$ 。 従ッテ $\sigma_2'(x_0) = 0$ ナル
 $\rho_1(x_0) > 0$ ($\varphi(x) \geq 0 = \text{ヨル}$) ヲ得ル故 $\rho_2(x_0) = 0$,
 $\sigma_2(x_0) = 0$, $\sigma_3(x_0) = 0$ 。

同様ノ論法ヲ繰返セバ (induction), $i) = \text{ヨリ } \mathcal{C}$,
positive ナ 函数全体ハ有限次元ノ線型集合⁽¹⁾ヲ作ルカラ,
Lemma ノ証明カ得レル。 — 以上 —

以下一般性ヲ失ハズ, 上ノ $\rho_i(x)$ ハ全テ $\int_{\mathcal{R}} \rho_i(x) dx = 1$
ト假定シテ進ム。 然レ $K^{(n+1)}(z, x) = \int_{\mathcal{R}} K^{(n)}(z, y) K(y, x) dy$
ナル定義ニヨリ,

$$l_1(z, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{K(z, x) + K^{(2)}(z, x) + \dots + K^{(n)}(z, x)\} / n^{(2)}$$

(1) 係数 non negative ナ一次結合ニ對シテ

(2) 測度 $\mathcal{R} = \text{有限}$, 上限 $|K(y, x)| = \text{有限}$ ノ假定ノモトニ, 一樣
収斂ナルコトガ Fréchet ノ結果 (前談話) デアツタ。

ハ、 z を fix したとき x の函数として (9) を満足スル。且つ
 $K(z, x) \geq 0, \int_{\mathcal{R}} K(z, x) dx \equiv 1 = \text{ヨツテ}$

$$(11) \quad l_1(z, x) \geq 0, \quad \int_{\mathcal{R}} l_1(z, x) dx \equiv 1$$

故 = Lemma 4 及び $\int_{\mathcal{R}} g_i(x) dx = 1$ カラ

$$(12) \quad l_1(z, x) = \sum_{i=1}^m \psi_i(z) g_i(x), \quad \sum_{i=1}^m \psi_i(z) \equiv 1,$$

$$\psi_i(z) \geq 0 \quad \text{for } i=1, 2, \dots, m.$$

ヲ得ル。以上ヲ準備ヲ終リ

2. 結論. $g_i(x) > 0$ ナル x の集合ヲ $\mathcal{R}_i$ トスルト
 Lemma 4 = ヲ $\mathcal{R}_i$ ト $\mathcal{R}_j$ トハ互ニ共通点ヲ持タズ ($i \neq j$
 ナラベ). $g_i(x) = \int_{\mathcal{R}} K(y, x) g_i(y) dy$ カラ, 全テ, $n =$

對シ $g_i(x) = \int_{\mathcal{R}} K^{(n)}(y, x) g_i(y) dy$ ヲ得ル。故ニ
 $g_i(x) = \int_{\mathcal{R}_i} K^{(n)}(y, x) g_i(y) dy$. 從ツテ全テ, $i, n =$ 對

シ

$$K^{(n)}(y, x) = 0 \quad \text{for } y \in \mathcal{R}_i, \quad x \in \mathcal{R} - \mathcal{R}_i.$$

故ニ

I. 最初 $\mathcal{R}_i$ に入ッス点 y ハ, 任意, $n =$ 對シ, n 單位
 時間後 = $\mathcal{R} - \mathcal{R}_i =$ ハ 確實 = 移ヲ + 1.

$$\begin{aligned} \text{又} = (10), (11), (12) = \text{ヨツテ } 1 &= \int_{\mathcal{R}} l_1(z, x) dx \\ &= \int_{\sum_{i=1}^m \mathcal{R}_i} l_1(z, x) dx \end{aligned}$$

ヲ得ルカラ

II. 任意ノ点 z カ n 單位時間後 $= R_1, R_2, \dots, R_m$
 ノ何レカ $=$ 移ルコトハ $n \rightarrow \infty$ ノトキ ⁽¹⁾ 確實 デアル。

又レハ $\sum_{i=1}^m R_i = R$ ナラバ trivial デアルガ

III 若シ $m \geq 2$ 且ツ R カ 連結集合 ナアレバ $\sum_{i=1}^m R_i \neq R$
 デアル。

証明. $m \geq 2$ トレ $R = \sum_{i=1}^m R_i$ トセヨ。 $R' = R_1, R^2 = \sum_{i=2}^m R_i$

トスレバ $R = R' + R^2, \prod_{i=1}^2 R_i =$ 空集合トナル。 R_i ハ連続実

函数 $\varphi_i(x)$ カ > 0 トナル x ノ集合 G カラ 閉集合。従ッテ R
 ハ互ニ共通点ヲモク又閉集合 R', R^2 ノ和トナレカラ R ノ連
 結ト云フ假定ニ及スル。

§4. Fréchet ノ結果ノ一ツノ擴張

定理. Hilbert 空間 H ノ線型 operator K カ
vollstetig 且ツ

$$(13) \|K^n \cdot x\| \leq C \|x\| \text{ for any } x \text{ and for any } n. \quad (2)$$

ヲ満足スレバ operator $K_n = \frac{K + K^2 + \dots + K^n}{n}$ ハ H ノ或ル
 operator $K' =$ 一樣收斂 スル。(3)

(1) 但シ Césaro 平均ノ意味デ (前談話ヲミタレタ)

(2) $K^2 \cdot x = K \cdot (K \cdot x), \dots, K^n \cdot x = K \cdot (K^{n-1} \cdot x)$. C ハ 正常数. $\| \cdot \|$ ハ
 H ノ 絶対値 (Norm).

(3) 全 $x, x \in H, \|x\| \leq 1$ 於テ一樣 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \|K' \cdot x - K_n \cdot x\| = 0$.

(注意) K が *vollstetig* ト云フハ、絶対値有限ノ点集合ヲ絶対値ノ意味ヲ *compact* + 集合 = 寫スコトヲ意味スル。線型積分 operator ハ *vollstetig* + コトハ良ク知ラレテ フルカラ、上定理カ前談話ニ紹介シタ Frechet ノ結果ヲ $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ シテモノ = トツテルコトハ明カデアアル。

以下証明ノタメノ Lemmas ヲ述ベル。

Lemma 1. *vollstetig* + K ノ固有値ハ複素数有限平面上ニ孤立点集合ヲナシ、且ツソレヲノ固有値ノ multiplicity ハ全テ有限デアアル (良ク知ラレタ F. Riesz ノ定理)。

Lemma 2. (13) ヲ満足スル K ハ其絶対値 / ヨリ大ナル固有値ヲモタナイ。

証. $|\lambda| > 1$, $K \cdot x = \lambda \cdot x$, $x \neq 0$ トセヨ。之レカラ $K^n \cdot x = \lambda^n \cdot x$ ヲ得ルカラ $\|K^n \cdot x\| = |\lambda|^n \|x\|$ トナツテ (13) = 矛盾スル。

Lemma 3. K ノ絶対値 / ノ固有値ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m^{(1)}$ トスレバ K ノ adjoint K^* ノ絶対値 / ノ固有値ハ $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m$ デアル。

証明. K^* ハ全テ, $x, y \in \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ 對シ $(K \cdot x, y) = (x, K^* \cdot y)^{(2)}$ ガ定義サレ、又良ク知ラレタ如ク (13) ハ $\|(K^n \cdot x, y)\| \leq C \|x\| \|y\|$ ト同等カカラ、 K^* モ亦 (13) ヲ満足スル。此ヲ入、

(1) m , 有限ナコトハ Lemma 1.

(2) (x, y) ハ inner product.

が K^* の固有値トラズトスレバ (b)ヲ満足スル $\frac{K^*}{\lambda_1} = M \wedge 1$
 7固有値トシナイ。然ラバ任意ノ $x \in l_2 =$ 對シ

$$y_n = \frac{M \cdot x + M^2 \cdot x + \dots + M^n \cdot x}{n} \wedge 0 = \text{弱収斂}^{(1)} \text{スル。}$$

何者, (13) = $\exists \nu \parallel y_n \parallel \leq C \parallel x \parallel$ 7得ルカラ絶対値有界ナ
 $\{y_n\}$ カ若シ $0 =$ 弱収斂シナケレバ, $\{y_n\} \wedge Z \neq 0 =$ 弱収
 斂スル部分列 $\{y_{n_i}\}$ 7含ム。⁽²⁾ 然レテ (13) = $\exists \nu$

$$\parallel M \cdot y_{n_i} - y_{n_i} \parallel \leq \frac{2C}{n_i} \parallel x \parallel \text{ カ } n_i \rightarrow \infty \text{ ノ } \rightarrow 0 = \text{収斂スル}$$

カラ M, M^* ノ 連続性 (有界性) = $\exists \nu$ テ $M \cdot Z = Z$ ナルヲ
 得7得ルカラ。

猶テ任意ノ $x, z \in l_2 =$ 對シ

$$\left(\frac{M \cdot x + M^2 \cdot x + \dots + M^n \cdot x}{n}, z \right) = \left(x, \frac{M^* \cdot z + M^{*2} \cdot z + \dots + M^{*n} \cdot z}{n} \right)$$

ガ成立スルカラ, 上述ニヨリ左辺既ニ右辺ガ $0 =$ 収斂スル。所ガ
 $M^* = \frac{K}{\lambda_1}$ ナカラ $Z \neq 0, M^* \cdot Z = Z$ ナル如キ Z カ存在スル。
 斯ル $Z =$ 對シテハ右辺ハ (x, Z) 。任意ノ $x =$ 對シ $(x, Z) = 0$
 ト云フコトハ $Z \neq 0 =$ 矛盾スル。

ヨツテ K ガ (13)ヲ満足スレバ, $\lambda_1 (|\lambda_1| = 1)$ ガ K ノ
 固有値ナルトキ K^* ハ $\bar{\lambda}_1$ 7固有値トスル。 $(K^*)^* = K =$ 注
 意スレバ *symmetry* カラ *Lemma* ノ証明7得ル。

(1) 任意ノ $z \in l_2 =$ 對シ $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n, z) = 0$ ナルコト。

(2) $l_2 =$ 於ケル有界点集合ハ l_2 ノ $\infty =$ 弱収斂スル部分列ヲ
 含ム。

Lemma 4. $K \cdot x = \lambda_i \cdot x$ を満足する x 全体を C_i とスル。

$C_1, C_2, \dots, C_m$ / 張ル線型閉集合ヲ $\mathcal{M}_i$, $\mathcal{M}_i$ / 全体ノ点 = 直交スル⁽¹⁾ 点全体ノ張ル線型閉集合ヲ $\mathcal{M}_i^*$ とスル。 K^* = ツイテモ同様 = $K^* \cdot x = \overline{\lambda_i} \cdot x$ / 解全体ノ張ル線型閉集合ヲ C_i^* , $C_1^*, \dots, C_m^*$ / 張ル線型閉集合 $\mathcal{M}_i^*$, $\mathcal{M}_i^* =$ 直交スル点全体ノ張ル線型閉集合ヲ $\mathcal{M}_i^*$ とスル。

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{M}_i \oplus \mathcal{M}_i^*, \mathcal{M}_i^* = \mathcal{M}_i^* \oplus \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_i = C_1 + \dots + C_m, \mathcal{M}_i^* = C_1^* + \dots + C_m^*.$$

然ラバ $\mathcal{M}_i$ と $\mathcal{M}_i^*$, $\mathcal{M}_i^*$ と $\mathcal{M}_i$, トハ 0 以外 = 共通点ナシ。

証明. 任意ノ $x, y =$ 特シ,

$$(K \cdot x - \lambda_i x, y) = (x, K^* y) - (x, \overline{\lambda_i} y) = (x, K^* y - \overline{\lambda_i} y).$$

ヨツテ $x \in C_i$ 上式 0 トナレカラ $(K^* y - \overline{\lambda_i} y) \perp C_i$.

逆 = x カ $K^* y - \overline{\lambda_i} y$ ノ形ノ全体ノ点ト直交スレバ上式カラ

$K \cdot x - \lambda_i x$ ハ全体ノ点ト直交シ従ツテ $K \cdot x = \lambda_i x$ 即チ

$x \in C_i$. 故ニ C_i ハ $K^* - \overline{\lambda_i} E$ (E ハ単位変換) / 値域

(Wertusrat) = 直交スル点全体ノ集合 = 一致スル。

故ニ $\mathcal{M}_i$ ハ $(K^* - \overline{\lambda_i} E)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) / 値域ノ

共通部分 = ナル。同シク $\mathcal{M}_i^*$ ハ $(K - \lambda_i E)$ ($i = 1, 2, \dots, m$)

ノ値域ノ共通部分 = ナル。

今若シ $x \in \mathcal{M}_i \cdot \mathcal{M}_i^*$ とスレバ, $x \in \mathcal{M}_i$ カラ $x = x_1 + x_2 + \dots$

(1) x カ $\mathcal{M}_i =$ 直交スルトハ $(x, y) = 0$ for all $y \in \mathcal{M}_i$ ノ意味。

..... + x_m , $x_i \in C_i$ と unique = 表ハサレル⁽¹⁾ $x_1 = 0$ +
 コトヲ云フニハ $x \in \mathcal{H}_1^*$ カラ $x = (K - \lambda_1 E) \cdot y$, 形 = 注
 意スルト

$$\frac{K}{\lambda_1} \cdot x = x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda_1} x_m = \frac{K^2}{\lambda_1} \cdot y - K \cdot y$$

$$\left(\frac{K}{\lambda_1}\right)^2 \cdot x = x_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 x_2 + \dots + \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^2 x_m = \frac{K^3}{\lambda_1^2} \cdot y - \frac{K^2}{\lambda_1} \cdot y$$

⋮

ノ算術平均ヲトツテ

$$x_1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2 + \dots + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k x_m$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \frac{K^{n+1}}{\lambda_1^n} \cdot y - K \cdot y \right\}$$

ヲ得, (13) ト $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$) $|\lambda_i| = 1$ = ヲツテ, $n \rightarrow \infty$
 ノトキ $x_1 = 0$ トナルコトヲワカル。

同様ノ議論ヲクリカヘシ結局 $x \in \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}^*$ ナラ $x = 0$,
 同ジク $x \in \mathcal{H}^* \cdot \mathcal{H}$ ナラ $x = 0$

Lemma 5. $x \in \mathcal{H}^*$ ナラバ $\frac{K \cdot x + \dots + K^n \cdot x}{n}$ ハ一様
 $= 0$ = 収斂スル。

証明。任意, $y \in \mathcal{H}$ = 對シ $K(K - \lambda_i E) \cdot y = (K - \lambda_i E)$
 $(K \cdot y)$ ナカラ, K ハ $\mathcal{H}^*$ $\mathcal{H}^*$ 内ニ寫ス。 K ヲ Hilbert
 空間 $\mathcal{H}^*$ デノ operator ト考ヘルト *vollstetig* 且
 ヲ (13) ヲ満足スル。 Lemma 4 = ヨリ K ハ $\mathcal{H}^*$ デハ絶対

(1) C_i ハ互ニ直交ハシナイケシレヌガ互ニ一次独立。

値 1 の固有値 ε がある。従って $(E - \lambda K)$ となる $\mathcal{M}^*$ は *vollstetig + operator* であり、Lemma 1, 2 を用いて
 $|\lambda| \leq 1 + \delta$, $\delta > 0$ なる固有値 ε がある如き $\delta > 0$ が存在する。
 よって $(E - \lambda K)$ の *resolvent* $(E - \lambda K)^{-1}$ は
 $|\lambda| \leq 1 + \delta$ なる λ の正則函数となる。(1) よって $(E - \lambda K)^{-1}$
 $= E + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \dots$ と $|\lambda| \leq 1 + \delta$ で展開できる。
 $|\lambda|$ が充分小さい所では $(E - \lambda K)^{-1} = E + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \dots$
 だから $A_2 = K^2$ 。

よって Cauchy の積分表示より

$$\|K^i\| \leq \frac{D}{(1 + \frac{\delta}{2})^i}, \quad D = O.G. \|(E - \lambda K)^{-1}\|_{|\lambda| \leq 1 + \frac{\delta}{2}}$$

を得るから。(2)

Lemma 6. $\mathcal{H}_y, \mathcal{M}^*$ は projection Q による
 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{M}^*$ への写像である。

証明: $x \in \mathcal{M}$, $Q \cdot x = 0$ となれば $x \in \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^*$ となり
 $(\mathcal{H}_y = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^* = \mathcal{H})$ Lemma 4 から $x = 0$ 。
 之れは Q が $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}^*$ への *schlicht* 写像を示す。
 もし $Q \cdot \mathcal{M} = \mathcal{M}^*$ となれば、或る $y \neq 0$ ($y \in \mathcal{M}^*$)
 $=$ 對し $Q \cdot \mathcal{M}$ が直交する。即ち $(y, Q \cdot x) = 0$
 for $x \in \mathcal{M}$, Q は projection だから $(y, Q \cdot x)$

(1) $(E - \lambda K)$ の *resolvent* に入る、有理型函数となることより
 $(E - \lambda K)$ の固有値は外側の正則な部分に知られる。

(2) $\|K\| = O.G. \|K \cdot x\|$
 $x \in \mathcal{H}_y$
 $\|x\| \leq 1$

$= (Q \cdot y, x) = (y, x)$ 7得ルカラ $y \in \mathcal{M}$, ($\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$, $= \mathcal{Y}$ ル). 従ツテ $y \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}^\perp = \mathcal{Y}$ リ Lemma 4 カラ $y = 0$ ナル矛盾ヲ得ル。

ヨツテ $Q \wedge \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\perp =$ 一対一 = 寫ス。

定理ノ証明. $Q = \mathcal{Y}$ ル $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}^\perp$ 上ノ寫像ノ逆寫像 P が存在スル (Lemma 6). 任意, $x \in \mathcal{H}$ 7

$$x = PQ \cdot x + (x - PQ \cdot x) = y_1 + y_2$$

ト分解スレバ, $y_1 \in \mathcal{M}$, $y_2 \in \mathcal{M}^\perp$ トナル。何者, y_1 ハ定義カラ $\mathcal{M} = \mathcal{Y}$ ル. $y_2 \in \mathcal{M}^\perp$ 云フハ $Q \cdot y_2 = 0$ 云フトヨイガ之レモ $Q \cdot y_2 = Q \cdot x - QPQ \cdot x = Q \cdot x - Q \cdot x = 0$ ナリ。

Lemma 5 = ヨリ $\frac{K \cdot y_2 + \dots + K^n \cdot y_2}{n}$ ハ $0 =$ 一樣收

斂スルカラ, $y_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, $x_i \in \mathcal{C}_i$ トシタトキ $\frac{K \cdot y_1 + \dots + K^n \cdot y_1}{n}$ が $x_1 =$ 一樣收斂スルコトヲ云

フトヨイ。但シ $\lambda_i = 1$ ト假定スル。ソコデ $\mathcal{C}_1 = 0$ ナラバ, 即チ 1 が K ノ固有値ナラズバ $x_1 = 0$ ト 1 convention ヲ用フルコトニシテ。

尚テ $K \cdot y_1 = x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$, $K^2 \cdot y_1 = x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$, ----- = ヨリ

$$\frac{K \cdot y_1 + \dots + K^n \cdot y_1}{n} = x_1 - x_2 \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_2^k}{n} + \dots + x_m \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_m^k}{n}.$$

$\lambda_i \neq 1$ 且 $|\lambda_i| = 1$ ナルコト及ビ $\mathcal{C}_i$ が全テ有限次元且ツ $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$ が互ニ一次独立ナルコトカラ

$$\frac{K \cdot y_1 + \dots + K^n \cdot y_1}{n}, \quad x_1 = \text{一樣收斂スルコトヲ結論シ}$$

得ル。 ———— 以上 ————

§ 5. Visser / 結果

前章ハ今少シ簡單ニサレルノデスガ、アソコノ Lemmas
ヲ使フテ Visser / 結果ヲ紹介シタカッタノヲ、ダラダ
ラシテ了ツタ次第デス。

Visser / 定理. K ヲ h_y ノ線型 operator デ
且ツ (13)ヲ満足スルモノトスレバ、任意ノ x ニ對シ

$$\frac{K \cdot x + K^2 \cdot x + \dots + K^n \cdot x}{n} \text{ が弱收斂スル. (} K, \text{ vollstetig}$$

ヲ假定セヌ)

証明. 前章デ $\mathcal{M}, \mathcal{M}^*$ ヲ夫々 $K \cdot x = x, K^* \cdot x = x$
ヲ満足スル x ノ成ル線型閉集合トスレバ $h_y = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^*,$
 $= \mathcal{M}^* \oplus \mathcal{M},$ デ $\mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^* = \mathcal{M}^* \cdot \mathcal{M} = 0$ (Lemma 4
ト同様). Lemma 6 が同ジク成立スルカラ任意ノ
 $x \in h_y$ ハ $x_1 + x_2$ ($x_1 \in \mathcal{M}, x_2 \in \mathcal{M}^*$)ト分解デキル.
Lemma 5 ト同ジク K ハ $\mathcal{M}^*$ デハ 1ヲ固有値トセヌカラ,
Lemma 3ノ証明ノ中ニ示シタ如クニテ $\frac{K \cdot x_2 + \dots + K^n \cdot x_2}{n}$
ハ 0ニ弱收斂スル, 一方 $\frac{K \cdot x_1 + \dots + K^n \cdot x_1}{n} = x_1$ by $x_1 \in \mathcal{M}$
デカラ 定理ハ証サレタ。

(1)

注意 若シ K ガ vollstetig ナラバ、收斂ハ 強收斂トナ

(1) 絶対値ノ意味ノ收斂