



Title	確率論への積分方程式の應用, III (Banach空間へのFréchet定理の擴張)
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 162, p. 296-306
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74638
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

649. 確率論へノ積分方程式ノ應用, III
(Banach空間へノFréchet定理ノ
擴張)

吉田 耕作 (阪大)

先ヨ前談話ノ誤謬訂正。

p. 284. 第14行目: E ヲ一次独立, ノ次 = 「且ツ
 $\int \psi_1(x) dx = \int \psi_2(x) dx = 1$ 」ヲ補フ。

p. 285. 第2行目: シタトスレバ, ノ次 = 「正常数
ヲ除シテ $\int p_1(x) dx = \int p_2(x) dx = \int \psi(x) dx = 1$ ト
假定シテヲケバ」ヲ補フ。

p. 285. 第5行目:

$$\pi'_2(x) = \{ |p_1(x) - \psi(x)| + \psi(x) - p_1(x) \} / \int \{ |p_1(x) - \psi(x)| + \psi(x) - p_1(x) \} dx$$

ト改ム。

p. 288. 第3行目: operator ハ, ノ次 = 「適當ノ
條件ノ下 =」ヲ補フ。

p. 288. 第7行目: Lemma 1 ノ内容ヲ「*voëlstetig*
ナKノ固有値ハ複素数平面上原点以外ニ集積シナイ」ト改ム。

p. 299. 第3行目: $\delta > 0$ ナ, ノ次 = 「0ヲ」ヲ, 固
有値ノ次 = 「=」ヲ補フ。

p. 295. 第11行目: ノト, ノ次 = 「根本ノ考ヘハ」ヲ
補フ。

前談話ニ於テハ、丁度 *C. Visser* ノ論文ヲ讀ンダ許リダ
ツタノデ *Hilbert* 空間ヲ離レラレ + カッタ。併シ其ノ後
反省シテミタラ *F. Riesz* 及ビ南雲氏ニヨツテ「積分方程
式ノ抽象化」ガ相當ノ程度ニ出來テアルノヲ、§4ノ定理（
前談話）ヲ *complex Banach* 空間ヘ拡張スルコトハ
容易ナコトガ直グワカッタ。ソコデ之レヲ書カントシタノデ
アルガ、念ノタメニ *Zentralblatt* ヲヒツクリカヘシテ
文献ヲ漁リ *N. Kryloff* ト *N. Bogoljuboff* ノ論文
（*C. R.* 204 (1937), p. 1386-1388）ノ存在ヲ知ツタ。ソコ
デ此ノ論文（証明ハ書イテナイ）ノ結果ヲモ含ムメウナ
Fréchet 定理ノ一拡張ガ得ラレナイカト考ヘテミタ。ソ
ウシタラ後述ノ如キ相當一般ノ定理ガ得ラレルコトガワカッ
タ。此ノ間ニ角谷壽夫氏ノ倦マサル御助力ヲ受ケタコトヲ厚
ク感謝スル。尚角谷氏ハ前談話ノ *Visser* 定理ノ *C. Banach*
空間ヘ鮮マカニ拡張セラレ、又筆者ノ得タ *Lemma 7, 9* ⁽¹⁾
（後述）ヲ用ヒテ定理ノ別証明ヲ峽ヘラレタ。（末紙ノ同氏
談話参照）

§6. *Fréchet* 定理ノ *Complex Banach* 空間ヘノ一擴張

定理. T ヲ *C. Banach* 空間 L ノ線型 operator
トシ、且ツ次ノニ條件ヲ満足スルモノトスル。（i）全テノ

(1) 其特別ノ場合大ニ充分。

$n =$ 對シ $\|T^n\| \leq M$ ナル如キ常數 M が存在スル。(ii) 適當 = *vollstetig* ナ線型 operator ∇ フトレバ $\|T - \nabla\| < 1$ 。然ラバ T ノ絶對値 1 ノ固有値ハ有限コシカナリ, 之等ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ トスレバ

$$T = \sum_{i=1}^k \lambda_i T_i + S;$$

ココニ T_i ハ全テ *vollstetig* = シテ且ツ

$$T_i^2 = T_i, \quad T_i T_j = T_j T_i = 0 \quad \text{for } i \neq j,$$

$$T_i S = S T_i = 0.$$

及び全テ $n =$ 對シ $\|S^n\| \leq \frac{C}{(1+\varepsilon)^n}$ ナル如キ正常數 C, ε

が存在スル。

上定理カラ直チ =

系 1. T^n が $n \rightarrow \infty$ ノトキ一様收斂スルタメノ必要條件ハ T が 1 以外ニ絶對値 1 ノ固有値ヲモタヌコトデアル。

$$\text{系 2.} \quad \left\| \frac{T + T^2 + \dots + T^n}{n} - T_\infty \right\| \leq \frac{D}{n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

ナル如キ *vollstetig* ナ T_∞ 及び常數 C が存在スル。コ

コニ $T_\infty = T_i$ or 0 as $\lambda_i = 1$ or all $\lambda_j \neq 1$. (系 1 ノ收斂ノ場合ニ $\|T^n - T_\infty\| \leq \frac{D}{n}$).

系 3. 假定 (ii) ノ代リニ (ii)' 「或ル $\nabla =$ 對シテ適當 = *vollstetig* ナ ∇ フ探ベバ $\|T - \nabla\| < 1$ 」ヲ假定スルト

$$\left\| \frac{T + T^2 + \dots + T^n}{n} - T'_\infty \right\| \leq \frac{D}{n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

ナル如キ *vollständig* ナ T_{∞} 及び常數 D' が存在スル。

此ノ系3ハ上述 *N. Kryloff* ト *N. Bogoljuboff* が証明ナシニ 與ヘタ結果ノ *C. Banach* 空間ヘ、拡張デアレ。

注意. 之ヲ *Fréchet* 定理ノ抽象化トシテハ先ヅ満足デキル様デアリマスガ、*Fréchet* ノ如ク 有界デ可測ナ核 $K(x, y) =$ ヨル *integral operator* ハ L_1 空間ヲ必ずシモ *vollständig* デナイ (之疑問ヲ三村氏及び角谷氏ニオ訊ネシタ所角谷氏ハ實際例ヲ作ツテ之ヲ示シテ下サツタ) カラ、*Fréchet* ノ定理ハ完全ニ抽象化サレタ部デアアリマセン。

此所ニ「*F. Riesz* = ヨル積分方程式ノ抽象化」ト「古典的ナ或ハ具體的ナ積分方程式論」トノ間ニ *gap* ガアレ様デス。ソレカラ、*Fréchet* ノ核 $K(x, y)$ ハ 確率論的 ナ假定 $K(x, y) \geq 0$, $\int K(x, y) dy \equiv 1$ ヲ満足スルタメニ、其ノ絶対値ノ、固有値ハ全テ $\lambda^N = 1$ (N 整数 ≥ 1) ノ如キ條件ヲ満足トルコトガワカツテル (前々談話 p. 247) ノダイヤルガ、我々ノ一般ト場合ニハ之種ノコトハ何モ云ヘナイ。ソコヲ positive linear operator トデモ云フベキモノヲ詢メルコトガ問題ニトルノデスガ、今ノ所文献ヲ漁ツテ

E. Hopf: Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern (*Sitz. Berichte Berlin* (1928), p. 233)

M. A. Rutmann: Sur une classe spéciale
d'opérateurs linéaires totalement continus
(C. R. URSS, 18, 9 (1938), p. 625)

ヲ見ツケタ = 過ヤマセン。識者、御教示ヲ仰グ次第デス。

§7. 定理ノ証明

Lemma 7. T が (ii) ヲ満足スレバ (i) ヲ假定スル必要ナシ), T ノ固有値ハ單位円ノ内部ノ点ニシテ集積シナイ。

証. $Tx_i = \lambda_i x_i$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $x_i \in \mathcal{L}$, $x_i \neq 0$,
 $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \lambda$, $|\lambda| \geq 1$ カラ矛盾ヲ出ストヨイ。 $T^n = \{T^n - (T - \nabla)^n\} + (T - \nabla)^n$ デアルカ、右辺第一項ハ其 factor = シットレーツ *vollstetig* + ∇ ヲ含ム如キ term - 和
デカラ *vollstetig*。且ツ $\|T - \nabla\| = \delta < 1$ トスルト
 $\|(T - \nabla)^n\| \leq \delta^n$, $T^n x_i = \lambda_i^n x_i$ デカラ、結局次ノ假定
カラ矛盾ヲ出ストヨイ。

$T = \nabla + \Delta$, ∇ *vollstetig* 且 $\|\Delta\| = \delta < \frac{1}{4}$. $\lambda_i \neq \lambda_j$,
 $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \lambda$, $\|\lambda\| \geq 1$, $Tx_i = \lambda_i x_i$, $x_i \in \mathcal{L}$, $x_i \neq 0$.

以下 F. Riesz ノ考⁽¹⁾ ヲ modify シテ矛盾ヲ出ス。

先ツ任意ノ $n =$ 整シテ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ハ一次独立。証明ハ *induction* = ヨル。即チ $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ヲ一次独立

(1) S. Banach: *Théorie des Opérations linéaires*,
p. 160. 尚上ノ Lemma ガ F. Riesz ノ定理ノ拡張 = ナ
ツタルコトハ明カデス。

立トスレバ x_n ハ $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ト一次独立。何者

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i \text{ トスレバ } Tx_n = \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_n \alpha_i x_i,$$

$$Tx_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_i x_i = \text{ヨリ } \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i) \alpha_i x_i = 0 \text{ 得}$$

ルガ、 α 全テハ 0 ナラズス $\lambda_i \neq \lambda_j$ カラ $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ が一次関係トナツテ了フカラ。

故ニ $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ 1 張ル線型空間ヲ E_{n-1} トル
ルト $E_{n-1} \subset E_n$ ノ純部分空間トナル。F. Riesz
= ヨリ、⁽¹⁾

$y_i \in E_i, \|y_i\| = 1$, 且ツ $\|y_i - x\| > \frac{1}{2}$ for all
 $x \in E_{i-1}$ ナル如キ点列 $\{y_i\}$ が存在スル。

次ニ $(\lambda_n x - T \cdot x) \in E_{n-1}$ for all $x \in E_n$ ナ

アル。何者、 $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ トスルト $\lambda_n x - T \cdot x = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i) \alpha_i x_i$

トナルカラ。

$$\text{故ニ } T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - T\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) = y_n - \left\{ y_n - T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) + T\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \right\},$$

右辺第ニ項ハ $m < n$ ノトキ E_{n-1} へ属ス。ヨリテ

$$\left\| T\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - T\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \right\| > \frac{1}{2} \text{ for } m < n.$$

從ツテ $\delta < \frac{1}{4}$, $T = \nabla + \Delta$, $\|\Delta\| = \delta = \text{ヨリ}$

$$\left\| \nabla\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - \nabla\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \right\| + \frac{1}{4} \left\| \frac{y_n}{\lambda_n} - \frac{y_m}{\lambda_m} \right\| > \frac{1}{2} \text{ for } m < n$$

(1) Banach: loc. cit. p. 153

所が $\|y_i\| = 1$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $|\lambda| \geq 1$ 且 $\forall \nabla$ *vollstetig* =

ヨリ適當 = 部分列ヲトリ $\left\| \nabla \left(\frac{y_{n'}}{\lambda_{n'}} - \frac{y_{m'}}{\lambda_{m'}} \right) \right\| \rightarrow 0$,

$\left\| \frac{y_{n'}}{\lambda_{n'}} - \frac{y_{m'}}{\lambda_{m'}} \right\| \leq 2$ for $n', m' \rightarrow \infty$. 從テ $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$

ナル矛盾ヲ得ルコト = ナル。

— 以上 —

Lemma 8. λ 平面ノ領域 $\mathcal{D}$ が定義サレテ $\nabla(\lambda)$ が,
 λ ヲ *fix* スルト $\mathcal{L}$ ノ *vollstetig* + *operator* ヲ與
 へ, 且 λ ノ 函數トシテ $\mathcal{D}$ が正則ナリトスル。若シ $(E + \nabla(\lambda)) \cdot x = 0^{(1)}$ が *non trivial* + 解ル $x \neq 0$ ヲ許ス
 如キ λ ノ 値ガ $\mathcal{D} =$ 於テ孤立集合 $\mathcal{J}$ ヲナセバ, $\mathcal{J}$ 以外デ
 $E + \nabla(\lambda)$, *resolvent* $(E + K(\lambda)) = (E + \nabla(\lambda))^{-1}$ が存
 在シ, 且 $K(\lambda)$ ハ $\mathcal{J}$ 以外, $\lambda \in \mathcal{D}$ ヲ λ ノ 正則函數トナ
 ル。尚之等, $\lambda =$ 對シ $K(\lambda)$ ハ *vollstetig*.

証明. 各 $\lambda =$ 對シテ $\nabla(\lambda)$ *vollstetig* ナリテ,
 F. Riesz ノ 定理⁽²⁾ = ヨリ $\mathcal{J}$ 以外ノ 点 λ 。ニハ $(E + \nabla(\lambda))^{-1}$
 が有界 (連続) + *operator* トシテ *unique* = 存在スル。
 即チ *resolvent* が存在スル。之ガ λ_0 ヲ 正則ナキトハ
 $|\lambda - \lambda_0|$ が充分小ナリト

$$\left\{ E + \sum_{n=1}^{\infty} (E - (E + \nabla(\lambda_0))^{-1} (E + \nabla(\lambda)))^n \right\} (E + \nabla(\lambda_0))^{-1}$$

が絶対且 $\forall$ 一樣 = 收斂シ $E + \nabla(\lambda)$ ノ *inverse* = ナルコトガ
 計算ヲ試セルコトカラワカレ。

(1) E ハ $\mathcal{L}$ 中ノ 單位 *operator*

(2) Banach: loc. cit. p. 153

各 $\lambda =$ 對シ $K(\lambda)$, *vollstetig* ナコトハ
 $(E + \nabla(\lambda))(E + K(\lambda)) = E$ カラ $K(\lambda) = -\nabla(\lambda) - \nabla(\lambda)K(\lambda)$
ヲ得, $\nabla(\lambda)$, *vollstetig* ナコトカラワカル。

Lemma 9. $T = \nabla + \Delta$ カ (ii) ヲ満足スルトスル。
然ラバ Lemma 7 =ヨリ, T ノ絶対値ノ固有値ハ有限
コシケナク之等ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ トスレバ, $1 + 2\varepsilon$
 $> |\lambda| > \frac{1}{1+2\varepsilon}$ ナル範圍ニハ λ_i 以外ニ T ノ固有値ノナ
イマウナ $\varepsilon > 0$ カ存在スル。 $\varepsilon > 0$ ヲ充分小ナクシテ $(E + \lambda T)$
ナル $(E + \lambda T)$, *resolvent* カ $1 + 2\varepsilon > |\lambda| > \frac{1}{1+2\varepsilon} =$
於テ λ , 有理型函数トシテ存在スル ($\frac{-1}{\lambda_i}$ カ *pole* トナリ其
以外ニハ *regular*)

証明: $\|\Delta\| = \delta < 1 = \text{ヨリ}$ $(E + \lambda \Delta)$, *resolvent*
 $(E + \lambda R_\lambda)$ カ $|\lambda| < \frac{1}{\delta}$ カ存在シ且ツ λ , 正則函数トナル:

$$\text{實際 } (E + \lambda R_\lambda) = E + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda \Delta)^n.$$

$$\begin{aligned} (E + \lambda K_\lambda)(E + \lambda T) &= (E + \lambda R_\lambda)(E + \lambda \Delta + \lambda \nabla) \\ &= E + \lambda (\nabla + \lambda K_\lambda \nabla) \end{aligned}$$

テアル。⁽¹⁾ 之レヲ $E + \nabla(\lambda)$ ト置クト, $\nabla(\lambda)$ ハ $|\lambda| < \frac{1}{\delta}$ ナ
正則且ツ λ ヲ *fix* スルト *vollstetig* (∇ *vollstetig*
 $= \text{ヨル}$)。

(1) $(E + \lambda R_\lambda)(E + \lambda T)$ ナ若ヘルコトハ、嘗テ南雲氏カ具體的ナ
積分方程式, *resolvent* カ λ , 有理型函数トナルコト
ヲ簡單ニ云フタメニ考ヘラレタコトガアル。本誌 132 号
p. 249 参照。

$(E + \nabla(\lambda)) \cdot x = 0, x \neq 0$ トスルト $(E + \lambda T) \cdot x = 0$
 デアル。何者、 $y = (E + \lambda T)x \neq 0$ トスルト $(E + \lambda R_\lambda)y = 0$,
 $y \neq 0$. 之レヨリ $(E + \lambda \Delta)(E + \lambda R_\lambda)y = y = 0$ トル
 矛盾ヲ得レカヲ。

故 = Lemma 8 = ヨリ, $|\lambda| < \frac{1}{\delta}$ 且ツ $\frac{1}{1+2\varepsilon} < |\lambda| < 1+2\varepsilon$ デハ $\frac{-1}{\lambda_i}$ ($i=1, 2, \dots, k$) ヲ除キ $(E + \nabla(\lambda))^{-1}$
 が存在シ且ツ $\frac{-1}{\lambda_i}$ 以外デハ之ハ正則トナル。

$\frac{-1}{\lambda_i}$ が $(E + \nabla(\lambda))^{-1}$ ノ pole ナルコトヲ示ス。ソレニ
 ハ $(E + \nabla(\lambda))^{-1} = E + K(\lambda)$ トオクト $(E + K(\lambda))(E + \lambda R_\lambda)(E + \lambda T)$
 $= E$ デカヲ

$(E + \lambda T)^{-1} = E + K(\lambda) + \lambda R_\lambda + \lambda K(\lambda) R_\lambda$
 ヲ得ルコト = 注意スル。 $\left\{ \frac{K(\lambda)}{\lambda} + R_\lambda + K(\lambda) R_\lambda \right\}$, 孤立
 特異点 $\frac{-1}{\lambda_i}$ = 於ケル Laurent 展開ヲ

$$(*) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{C_i}{\left(\lambda + \frac{1}{\lambda_i}\right)}$$

トスルト, $K(\lambda)$ が各 λ = 對シ *vollstetig* ナコトト
 (Lemma 8), 及び R_λ が $\lambda = \frac{-1}{\lambda_i}$ = 於テ正則ナコトナ
 リ, Cauchy ノ積分表示 = ヨリ, C_i が全テ *vollstetig*
 ナコトガナル。⁽¹⁾

此所マ來レバ占メタモ、テ、南雲氏ノ論法(本紙76
 号, 談話333) が其ノマニ使ヘテ, 上ノ展開(*) = 於テ負ノ

(1) *vollstetig* + operator ト一様收斂ノ limit ハ又
vollstetig.

□ (ベキ) は有限ノ所デキレル。即チ $\frac{-1}{\lambda_i}$ は $(E + \lambda T)^{-1}$ ノ pole デアル。 — 以上 —

注意 上ノ南雲氏ノ議論ノ際ノ結果

$$C_{-1}^2 = C_{-1}, \quad C_{-1} C_n = C_n C_{-1} = 0 \quad \text{for } n \geq 0$$

ハ矢張り同ジク得ラレル。

定理ノ証明。 假定 (i) = ヨリ T ハ其ノ絶對値ノヨリ大キイ固有値ニタヌ。 何者 $T \cdot x = \lambda x$, $|\lambda| > 1$, $x \in \mathcal{L}$, $x \neq 0$ トナルト $T^n \cdot x = \lambda^n x$ ヲ得, 之レカラ $\|T^n x\| = |\lambda|^n \|x\|$ ナル (i) = 矛盾スル式ヲ得ルカラ,

故 = Lemma 9 ト組合セテ $(E + \lambda T)^{-1}$ が $|\lambda| < 1 + 2\varepsilon$ ナハ $\frac{-1}{\lambda_i}$ ナル pole ヲ除イテ正則ナル如キ $\varepsilon > 0$ が存在スル。 又 (i) = ヨリ $(E + \lambda T)^{-1} = E + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda T)^n$ が $|\lambda| < 1$ ナ絶對且ツ一様収斂スル: 實際 $|\lambda| < 1$ デ $\|(E + \lambda T)^{-1}\| \leq \frac{M}{1-|\lambda|}$. 又コノ式カラ pole $\frac{-1}{\lambda_i}$ が simple pole ナルコトヲカル。

故 = $(E + \lambda T)^{-1} = (E + \lambda T_\lambda) \text{ ト } T_\lambda$, $\frac{-1}{\lambda_i}$ = 於ケル Laurent 展開ノ principal part ヲ $\frac{T_i}{\lambda + \frac{1}{\lambda_i}}$ トヲクト, 上ノ 注意 カラ

$$\begin{cases} T = \sum_{i=1}^h \lambda_i T_i + S \\ T_i T_j = 0 \text{ for } i \neq j, \quad T_i^2 = T_i, \quad T_i S = S T_i = 0 \end{cases}$$

ナルコトヲ得カル。

$$\text{備テ } |\lambda| < 1 \text{ デ } T_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} (-T)^n \text{ ナカラ}$$

$$T_\lambda = \sum_{n=1, i=1}^{\infty, k} \lambda^{n-1} \{ (-\lambda_i)^n T_i + (-S)^n \} = \sum_{i=1}^k (-\lambda_i) \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda \lambda_i)^{n-1} T_i \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} (-S)^n = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i T_i}{1 + \lambda \lambda_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} (-S)^n$$

ヲ得ル。之レカラ $(E + \lambda S)^{-1} = E + S_\lambda$ ヲ定義サレル

$$S_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} (-S)^n \text{ が } |\lambda| < 1 + 2\varepsilon \text{ ヲ正則ト云フコトガ}$$

カル。故ニ Cauchy ノ積分表示ヲ用ヒテ、全ヲ、 $n =$
對シ

$$\|S^n\| \leq \frac{C}{(1+\varepsilon)^n}$$

ナル常數 C ノ存在スルコトガワカル。 — 以上 —

今迄ハ discrete case ノミヲ取扱ツタガ continuous case 即チ所謂 smoluchowsky ノ方程式

$$T(t+\Delta) = T(t)T(\Delta), \quad 0 \leq t, \Delta < \infty$$

ガ角谷氏ノ考ヘテ使ツテ巧ク取扱ヘルマウマス。之レハ此
ノ次ニユツリマス。