



Title	彷徨函数 (random functions)
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 162, p. 335-350
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74641
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

682. 彷徨函数 (random functions)

北 川 敏 月 (阪大)

§1. 緒言: Brown 運動⁽¹⁾ = 刺激サレテ生ミ出サレタ彷徨函数⁽²⁾, 理論=ウィナー, Paley-Wiener⁽³⁾, 著=優レタ解説カアル。タジ遺憾ナコト=ハ, ソコデ展開スル理論=ハ, 彼等ノ云フ如ク,⁽⁴⁾

-
- (1) Perrin: *Les Atomes*. スハ植村, 玉虫, 三島共譯: 原子: 第二章及ビ第四章。コレヲ〔原〕ヲ引用スル。又, 物理学文献抄, II, 土井不憂: Brown 運動=本シイ。
- (2) 橋島浩: 物理学=於ケル統計的現象 (岩波科学文献抄) =於イテ *Schwankung* (fluctuation) ノ譯=, 彷徨偏倚ヲ用ヒラレタタ。ソレ=ナラヒ, 假リ=彷徨ヲ用ヒルコト=シタ。同書, 序言, 跋ヲ参照セラレヨ。
- (3) *Fourier Transforms in the complex domain*: *Am. Math. Coll. Pub. Vol. XIX*. 特= *Chap. IX* 及ビ *X*. コレヲ〔F〕ヲ引用ス。
- (4) [F], p. 141.

"the disadvantage of being most non-heuristic and of demanding from the reader the patience to take on faith the necessity of a large amount of material whose justification is only given after the completion of the argument" が +イ 譯デモ +イ。モット heuristic + 方法が アツテ 然ルベキ アアル。

Brown 運動ノ 錯雜ナル、個々、微粒子 = ツイテ、軌道ノ 追跡ヲ 出来ル 限り 精細 = シマウトシテモ ソレハ 無意味デアツテ、⁽⁵⁾ 統計力学ノ 対象トシテ、始メテ 意味ヲモツ、經驗的 = ハ、実験サレタ 数多クノ 軌道 = ツイテノ、或ル物理的量ノ 平均値ガ 問題デアアル。茲ニ 物理學者ノ イフ 数多クト云フ、ハ、數學的 = 云フ 凡ヅラ = 相應スル。一粒子ノ 軌道方程

-
- (5) [原], p. 115—176 = 云フ "粒子軌道ノ 錯雜ハ 實ニ 多様デ、又 其ノ 変化ハ 迅速デアルカラ、到底之レヲ 際ツケルコトハ 不可能デアリ、又 實際測ラレタル 軌道ハ 事實ヨリモ 遙カニ 簡單且ツ 小デアアル。又一粒子ノ 見掛けノ 平均速度モ 與ヘラレタ 時間内ニ 於イテハ、ソノ 大イサ方向共ニ 激シク 変リ、觀察時間ヲ 如何ニ 短縮シテモ 決シテ 一定ノ 極限ニ 向フモノデハナイ。…… 我々ハ タトヘ 近似的ニ セヨ 軌道ノ ドノ 点ニ 對シテモ 切線ヲ 定メルコトモ 出来ナイ、而シテ コレヨリ 我々が 微分係數ヲモタナイ 連続函數ヲ 考ヘズニ 誤ニ 自然ナル 場合デアアル。"

式ハ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ (t ハ時間) トシ
 テ與ヘラレルデアラウ。可能ナルスベテノ軌道函数 $x = x(t)$
 イテ, y ノ汎函数ノ平均値ガ問題ニナル。⁽⁶⁾ コレハ、可能
 ナルスベテノ軌道函数ノツクル空間ニ於イテ、測度ノ概念
 テ導入スレコトト同問題デアラウ。但シ、通常ノ解析ノ對
 象トナルタメニハ、ソノ測度ハ、完全加法的デアルコトガ
 望マシイ。

斯クシテ、彷徨函数ノ理論ガ、要スルニ一ツノ積分論
 デアルベキコトヲ知ルノデアルガ、⁽⁷⁾ ソウシテ理論ガ何等カノ
 方法ヲ建設サレタ場合、實驗的ニ確立サレタ統計的⁽⁸⁾ 法則ガ
 ソノ理論カラ導カレタケレバ無意味デアルコトハ敢テ断ルマデ
 ヌナイ。

前述ノ Paley - Wiener ノ所謂 "disadvantage"
 ノ除カレルコトヲ第一ニ希望スル立場ニアツテハ、Wiener
 ノコノ方面ノ最初ノ論文⁽⁹⁾ニ於ルニ如クハナリ。E. Hopfガ

(6) $y(t)$ ニ関シテモ同様也。以下 $x(t)$ ニ関シテノミ述ベル。粒
 子ニハ重量ガアルタメ鉛直ノ方向ハ別デアル。(原), p. 177.

(7) It will be seen that the theory of random
 functions is in essentials a theory of inte-
 gration in function space. ([F], p. 140)

(8) Perrinノ實驗等。コレハ續テ述ベル。

(9) Differential space, Journ. Math. and Phys.
 Vol. II, NO. 3. (1923)

ソノ著⁽¹⁰⁾ニ於テ、ソノ方法ノ荒筋ヲ、ヨリ modern ナ形ヲ述ベテ居ル。私ハ此處ニ、其處ヲ省略サレタ証明ヲ補ヒテラ、紹介ヲ試ミヨウト思フ。

§2. 構成的方法⁽¹¹⁾ノ概要. $-\infty < t < \infty$ デ定義サレタ實數値連続函数⁽¹²⁾ $x(t)$ ニ對シテ, $x(0) = 0$ ナルトキ, 區間 $(\delta, t) = A$ ニ對シテ $\Phi(A) = x(t) - x(\delta)$ ト定義スル。コノ場合, 点函数 x ト區間函数 Φ トノ對應が一對一ナル。今考ヘタマウナ區間全部ノ集合ハ, 集合体⁽¹³⁾ (Mengenkörper) ヲツクリ, Φ ハソコデ加法的 (finite additive) デアル。吾カハ, E. H. Hopf = 従ヒアラユル Φ ノツクル函数空間ニ, Lebesgue 測度ヲ入レルコトヲ問題ニスルノデアル。

- (10) Ergodentheorie, Ergeb. Math. und ihr. Grenzgebiete (1937). 特ニ, §16. Mass theorie im Raum der additiven Mengenfunktionen. コレヲ [E] ヲ引用ス。
- (11) 假リニコノ様ナ名ヲツケタ。[F]ノ方法ニ對比シテ。
- (12) [E]ニハ, 連続トイフ假定ガ著イテナイ。以下ノ議論デハコノ性質ヲ用ヒナケレバナラナイコトハ明ラカデアル。(或ハ, 必然的ニ導ケレルコトデアルカモ知レナイ)。[F], Theorem XLIII, p. 148 参照。又 [F], p. 151 = "In all that follows, we take $\varphi(x, \alpha)$ to be continuous" トアル。
- (13) 或ル集合系ガアツテ, ヲレノ任意ノ二ツノ元 α, β ト共ニ, $\alpha + \beta$ $\alpha\beta$, $\alpha - \beta$ ($\alpha > \beta$ トキ), $\beta - \alpha$ ($\beta > \alpha$ トキ)ヲ含ムトキ, Mengenkörper ト云フ。コレヲ集合体ト譯シタミタ。

吾々ハ、次ノヤウナ構成的方法ヲ採ラウ。

[I] $\mathcal{R}$ ノツクリル或ル集合体 $\mathcal{R}$ ヲ適當ニ選ビ此處ニ、finite additive + 測度 m ヲ、先ツ定義スル。

[II] $\mathcal{R}$ ヲ Borel 集合体 B $\mathcal{R}$ (完全加法的集合体) ⁽¹⁴⁾ニマテ拡張シテ、 $B \mathcal{R} = \tau$ 完全加法的 (completely additive) τ 、 $\mathcal{R}$ ガハ m ト一致スルヤウナ測度 m^* ヲ求メル。

§ 3. 加法的測度ノ導入。 $\mathcal{R}$ ハ点 $p, p', \dots$ カラナル空間、 $\mathcal{K}$ ハ $\mathcal{R}$ ノ部分集合ニヨリテ形成サレタ或ル集合体トスル。 $\mathcal{R}$ ガ実数全部ノ集合、 $\mathcal{K}$ ガ § 2ニ述ベタ区間ノツクリル集合体デアルノガ、吾々、要求スル場合デアルガ、茲デハ、コノヤウナ制限ヲ設ケズ、一般のナ結果ヲ述ベヨウ。今 $\mathcal{K}$ ニ属スルルベテノ集合ニ對シテ定義サレタ加法的ナ集合函数 $\mu(A)$ ヲ考察ノ對象トスル。カナル $\mathcal{O}$ 全部ノツクリル空間ヲ Ω トスル。

$\mathcal{R}$ カヲ、稠密ナル $A_1, A_2, \dots, A_n$ ヲ選ビ、 $x_i = \mu(A_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ナル實数ノ組ヲ考ヘル。 n 次元ユークリッド空間 R_n ニ属スル O_n ナル可測集合ヲ與フルトキ、 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset O_n$ デアル様ナ Ω ノ

(14) 集合体ガ、可附屬無限個ノソレニ属スル原集合ノ和集合ヲ包含ムトキ、コレヲ Borelscher (od. absolut additiver) Mengenkörper トイフ。

部分集合ヲ以テ表ハサウ。

コノ様ナ方法デツクラレタメ全部ノ集合ハ、一ツノ集合
体ヲツクル。ソレヲ示スノニハ

$$\alpha = [\mathcal{A}; \{\mathcal{A}(A_1), \mathcal{A}(A_2), \dots, \mathcal{A}(A_n)\} \subset \mathcal{O}_n] \dots (15)$$

$$\beta = [\mathcal{B}; \{\mathcal{B}(B_1), \mathcal{B}(B_2), \dots, \mathcal{B}(B_m)\} \subset \mathcal{O}_m] \dots (2)$$

ヲ考ヘル。 A_i, B_j = 共通ノ部分分割ヲ施シテ、相奏ナル

$C_i (i=1, 2, \dots, N)$ ヲ得ヌトスル。⁽¹⁶⁾ コノトキ

$$\alpha = [\mathcal{C}; \{\mathcal{C}(C_1), \mathcal{C}(C_2), \dots, \mathcal{C}(C_N)\} \subset \mathcal{O}_N] \dots (3)$$

$$\beta = [\mathcal{C}; \{\mathcal{C}(C_1), \mathcal{C}(C_2), \dots, \mathcal{C}(C_N)\} \subset \mathcal{O}'_N] \dots (4)$$

トモ書カレル。斯クモハストキ、 $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$,

$\alpha - \beta$ ($\alpha > \beta$ ノトキ) カ又、吾々ノ集合体ニ付スルコトハ

明ラカデアル。⁽¹⁷⁾

コノ集合体ニ加法的集合体ヲ導入スル：ソノメ、任
意ノ実数 x 及ビ K = 属スル任意 A = 對シテ定義セレタ實数値

函数 $w(x, A)$ ヲ考ヘ $w \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} w(x, A) dx = 1$ (スベ

(15) $\in(x)$ ナル性質ヲ有スル X ノ全部ヲ $[X, \in(x)]$ ト書ク。

(16) A_i 同志, B_j 同志ハ大々、假定ニヨリ共通点ハナイ。シカシ、

A_i ト B_j トニハ共通点ガアルカモ知レナイ。共通分割ニヨル

$C_\nu (\nu=1, 2, \dots, N)$ ヲツクルトキ、各 A_i ハ若干個ノ C_ν ノ和

集合トシテ表ハサレル。但シ C_i ノうちノアルモノハ $\sum A_i$ = 全

マヌコトモアラウ。 $\{B_j\}$ = 同シテモ同様。

(17) $\mathcal{O}_N + \mathcal{O}'_N$, $\mathcal{O}_N \mathcal{O}'_N$, $\mathcal{O}_N - \mathcal{O}'_N$ ヌハ $\mathcal{O}'_N - \mathcal{O}_N$ ガ又 R_n デ可測

ナルガ故ニ。

ヲ $A \in K = \text{ツイテ}$ トスル。ソシテ (1) デ 與ヘラレタ $\alpha =$
對シ

$$m(\alpha) = \iiint_{0_n} \cdots \int w(x_1, A_1) w(x_2, A_2) \cdots w(x_n, A_n) dx_1 \cdots dx_n \quad (5)$$

デ $m(\alpha)$ ヲ定義スル。

然ルニ同ジ $\alpha \in$, 例ヘバ (1) ト (3) トヲ見ル如ク違ツタ
定義ノ仕方がアル。定義ノ仕方ハ違フモ, $m(\alpha)$ ノ $\alpha \in$ ノ
ハ一致セネバナラス。

コノタノノ 必要條件ハ, $AB = 0 =$ 對シ 常ニ

$$w(x, A+B) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t, A) w(x-t, B) dt \quad (6)$$

ナル函数方程式ヲ満足スルコトデアル。⁽¹⁸⁾ 尚、 m が加法的
測度ニナルコトハ, 明カデアル。

コレ等ハ, 一般的结果デアル。吾々ハ §2 デ掲ゲタ問
題 [I] ニ歸ラウ。§1 ノ終リニ述べタ如ク、吾々ノ理論ハ
実験ノ⁽¹⁹⁾ 結果ヲ導カナケレバナラス。実験ノ示ストコロヲ從
フタメニハ、(5)ニ於テ, $w(x, A) = e^{-\frac{x^2}{M(A)}} / \sqrt{M(A)}$ ニト

(18) 証明ハ [E]ニ依シク書イテアル。 $A_i (i=1, 2, \dots, n)$

ヲ $C_\nu (\nu=1, 2, \dots, N)$ トシツルトキ, (1), (3) 各々ニ
ヨリ夫々 $m(\alpha)$ が定義サレレガ、ソレが同ジ値ヲモツ
コトヲ示セバヨイ。

(19) ハ次頁ニ。

セネバナラス。⁽²⁰⁾ $(M(A) = M([A, B]) = \epsilon - \Delta t)$ カ
 ン定義サレタ W ハ 函数方程式 (6) ナ充メヌガ故ニ, 加法的
 ナ測度ヲ得タコトニナル。即チ問題 I ハ肯定的ニ解決サレタ。
 (1) ノ如ク定義サレタ α ナ基本圖形ト呼ンデ宜シカラ
 シ。

§4. 彷徨函数ニ関スル Hölder ノ條件。

問題 [II] ニ進ム前ニ, 準備ヲセネバナラス,

定理 1. $\epsilon > 0, \eta > 0, C > 0$ ナ任意ニ與ヘタトスル。
 然ルトキ, 次ノ性質 10—30 ナ有スルヤウナ, 自然數

(19) 例ヘバ, 顯微鏡ノ視野ニ於イテ, アル適當ニ選ンダ同時
 テヲ隔テテ, 同ハ粒子ノ位置ヲシルス。例ヘバ x —成分ニ
 ヲイテ, $x_i(t_k)$ ナ測定ス。コノヤウナ實驗ヲ繰返シテ
 $\{x_i(t_k)\} (k=0, 1, 2, \dots, N, i=1, 2, \dots, M)$ ナ得ル。
 Perrin ノ實驗カラハ, 次ノ様ナ漸近的法則ヲ得ラレル。

I. $\sum_{i=1}^M \{x_i(t_k)\}^2$ ハ, 略シ k = 正比例スル。

II. $\text{time-interval } (t_k, t_{k+1})$ = 於ケル
 $\{x_i(t_{k+1}) - x_i(t_k)\} (i=1, 2, \dots, M)$ ハ, 略シ Gauss,
 分布ニ從フ。ソノ分布ノ基準ハ $t_{k+1} - t_k$ = depend スル。

III. $\underline{x}$ = 重リ合ハナシ time-intervals = 於ケル運動ハ,
 独立事象ト見做サレル。

(20) カク定義スルトキ, 脚註 (19) ナ述べタ法則 II, III ナ
 テ用ルコトガワカル。コクスルトキ I^{*} ハ, 必然的結果トナル
 コトハ後ヲ示ス。

$N(\varepsilon, \eta, C)$, 正数 $C'(\varepsilon, \eta, C)$ 及ビ高々可降無限個
ノ基本図形列 $\{\alpha_i\}$ ($i=1, 2, 3, \dots$) が選ビ出レル,
即チ

$$1^\circ) \quad \sum_{i=1}^{\infty} m(\alpha_i) < \eta \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$2^\circ) \quad \mathcal{N} - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \text{属スル凡テ, } \mathcal{N} \text{ (即チ函数 } x) =$$

共通 = , 指数 $\frac{1}{2} - \varepsilon$ 次ノ Hölder ノ条件が充テラ
中ル: $|t_2 - t_1| \leq 1/2 N(\varepsilon, \eta, C)$ ナル限リ, $-\infty < t_1,$
 $t_2 < \infty = \tau$

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leq C |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2} - \varepsilon} \{1 + |t_1|^{2\varepsilon} + |t_2|^{2\varepsilon}\} \dots\dots (8)$$

$$3^\circ) \quad \mathcal{N} - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \text{属スル凡ベテ, } \mathcal{N} \text{ (即チ } x) = \text{共}$$

通 = , $-\infty < t < \infty = \tau$

$$|x(t)| \leq C' \left\{ |t|^{\frac{1}{2} + \varepsilon} + 1 \right\} \dots\dots\dots (9)$$

証明: $\frac{1}{2} - \varepsilon = \lambda$ ト書ク。証明ヲ三段ニ分ツ。

第一段。與ヘラレタ C トハ別ニ, $C_1 > 0$ 便宜上考ヘ
ル。整数 m, n, k ヲ定メテ

$$\begin{aligned} & \left| x\left(m + \frac{k+1}{2^n}\right) - x\left(m + \frac{k}{2^n}\right) \right| \\ & \geq C_1 2^{-\lambda n} \left\{ 1 + \left| m + \frac{k+1}{2^n} \right|^{2\varepsilon} + \left| m + \frac{k}{2^n} \right|^{2\varepsilon} \right\} \dots\dots (10) \end{aligned}$$

ヲ満足スル x ナ x 即チ $\mathcal{N}$ ノ集合ヲ $\mathcal{N}$ ニテ考ヘル。

コレハ基本図形デアルカラ、ソノ測度⁽²¹⁾ハ $\delta_3 =$ 於イテ
與ヘタ、簡單ナ計算ノ後ヲカル如ク

$$\exp\left(-\frac{C_1^2 2^{(1-2\lambda)n}}{2\pi} \left(1 + \left|m + \frac{k}{2^n}\right|^{2\varepsilon} + \left|m + \frac{k+1}{2^n}\right|^{2\varepsilon}\right)\right) \dots (11)$$

次ニ、 m, n, k ノうち、 n ガケ固定シテ、 $-\infty < m < \infty$ 、
 $0 \leq k < 2^n$ ナル整数 m, k ノドレカノ組ニ對シテ (10)
ナル關係ノ成立スル m ノ集合ヲ考ヘルト、コレハ可附
番無限個ノ基本図形ノ和集合デアツテ、ソノ測度ノ和ハ、
(11)ナル項ヲ、 $-\infty < m < \infty$ 、 $0 \leq k < 2^n$ ノ範囲ヲ總和
シタモノニナル。コノ總和ハ、

$$C_2 \frac{2^n}{2^{(1-2\lambda)n} \left(\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon-1} + 1\right)} \exp\left\{-\frac{C_1^2 2^{(1-2\lambda)n}}{2\pi}\right\} \dots (12)$$

ヲ超ヘナシ。但シコトニ、 C_2 ハ ε ト C_1 トニ關係スルカ
 n ニ無關係ニエラベル常数。從ツテ、アル自然數 N ヲ與フ
ルトキ、(10)ナル關係ガ、 $n \geq N$ 、 $-\infty < m < \infty$ 、 $0 \leq k < 2^n$
ノ範囲ニアルドレカノ (m, n, k) ノ組ニ對シテ成立スル
 m ノ全部ノ集合ハ、可附番個ノ基本図形ノ和集合ニ含

(21) 吾々ハ、(E)ニ於テ、 $w(x, A) = e^{-\frac{x^2}{M(A)}} / \sqrt{M(A)\pi}$ トシタカラ、

コノ測度ハ、コノ際 $M(A) = 2^{-n}$ ニ注意シテ、

$$\sqrt{\frac{2^n}{\pi}} \left\{ \int_p^\infty e^{-2^n x^2} dx + \int_{-\infty}^{-p} e^{-2^n x^2} dx \right\}$$

ガ與ヘラレル。但シ

$$p = C_1 2^{-\lambda n} \left\{ 1 + \left|m + \frac{k+1}{2^n}\right|^{2\varepsilon} + \left|m + \frac{k}{2^n}\right|^{2\varepsilon} \right\}$$

マレ、ソレヲ基本圖形ノ測度ノ和ハ、(12)ナル項ヲ $n \geq N$ ナルスベテノ n ニツイテ總和シタモノニナル。ノ $-2\lambda > 0$ ナルコトカラ、ソレハ收斂スル。從ツテ、 $\eta > 0$ ヲ勝手ニ與ヘテモ、 $N, (\varepsilon, \eta, C_1)$ ヲ充分大キクトレバ $N, (\varepsilon, \eta, C_1)$ ヨリ大ナル n ニツイテノ總和ヲ η ヨリ小ナラシム得ル。

コノコトハ、定理1ノ假定ノ ε, η ニ於テ、(但シ C ノ代リ $= C_1 > 0$ (コレモ勝手ニ與ヘテヨイ)ヲ與フルトモ)主張1°ト、ソレカラ或ル制限ノモトデ主張2°トが成立スルコトヲ意味スル。ソノ制限トイフノハ、(8)式ノ成立ハ、 C ノ代リ $= C_1$ ヲ用ぬ; 又 $t_2 = m + \frac{k+1}{2^n}$, $t_1 = m + \frac{k}{2^n}$, (n ハ任意ノ整数, $n \geq N, (\varepsilon, \eta, C_1)$, $0 \leq k < 2^n$)ニ對シテノミ証明シレバナルコトヲ意味スル。ソノ制限ヲ取除クコトが第二段デアル。

第二段、今スベテノ實數ヲ二進法デ展開スル。

$$t_1 = a_{-k} a_{-k+1} \dots a_0, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots$$

$$t_2 = b_{-k} b_{-k+1} \dots b_0, b_1 b_2 \dots b_n b_{n+1} \dots$$

$$0 < t_2 - t_1 \leq 1/2^n, \quad n \geq N(\varepsilon, \eta, C_1) \text{ トスル。從ツテ}$$

$$k = k \neq l \leq n-1 \text{ニ對シテハ } a_l = b_l. \quad \text{点列}$$

$$t_2^n = a_{-k} a_{-k+1} \dots a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n a_{n+1} \dots a_m$$

$$t_1^m = a_{-k} a_{-k+1} \dots a_0, a_1 a_2 \dots a_{n-1} b_n b_{n+1} \dots b_m$$

ヲ考ヘル。 $x(t)$ ハ連続ナル

$$x(t_i) = \sum_{m=n}^{\infty} \left\{ x(t_i^{m+1}) - x(t_i^m) \right\} + x(t_i^n) \quad (i=1,2)$$

t_i^m ハミチ、第一段ヲ考ヘタ分点ガアルカラ、第一段ノ結果ト上式トカラ

$$|x(t_2) - x(t_1)| < \frac{4C_1}{1-2^{-\lambda}} 2^{-\lambda n} \left\{ 1 + |t_1|^{2\varepsilon} + |t_2|^{2\varepsilon} \right\}$$

コノ $t_2 - t_1 = 2^{-n}$. 依ツテ、定理1ノ假定ノ C ヲ勝手ニ與ヘタトキ、 $C_1 = C(1 - 2^{-\lambda})/4 = 1$ トツテ、コノ C_1 ニツキ第一段ヲ証明シテオケバ、結局定理1ノ $1^0 - 2^0$ カ得ラレタコトナル。

第三段. 3^0 ヲ証明スル。 $t^* = 1/2^{N(\varepsilon, \lambda, C)}$ トス。 $t > t^*$ トスル ($t < -t^*$ ノトキモ同様) 區間 $[t, t^*]$ ヲ等分シ、 $t_r = t$, $t_0 = 1$ トシテ

$$x(t) - x(t^*) = \sum_{i=1}^r \{x(t_i) - x(t_{i-1})\}$$

ト書ク。細區間ノ長サヲ $1/2^{N(\varepsilon, \lambda, C)}$ ヨリ小ニスル。

$\int_0^\infty \alpha_i = \infty$ ナル凡ベテノ函数 $x = x(t)$ ニツイテ、第二段

ヲ証明シタ 關係式 (8) カラ

$$|x(t) - x(t^*)| < C \sum_{i=1}^r |t_i - t_{i-1}|^\lambda \left\{ 1 + |t_i|^{2\varepsilon} + |t_{i-1}|^{2\varepsilon} \right\}$$

ト有限ナク大ナラシメル。コノ不等式カラ

$$|x(t) - x(t^*)| \leq C \lambda \int_1^t t^{\lambda-1} dt + 2C \lambda \int_1^{t^*} t^{\lambda-1+2\varepsilon} dt$$

$t < -t^*$ ニ關シテモ同様。 $|t| \leq t^*$ ニツイテハ、既ニ $|x(t) - x(0)| = |x(t)| < C |t|^\lambda \{1 + |t|^{2\varepsilon}\}$ ヲ得テ

キル。コレヲ三ツヲ一所ニシテ (9) 式ヲ成立セシメルヤウト
 C' ヲ見出スコトハ容易デアレ。 — 以上 —

定理2. 定理1ニ於テ得タ $\Omega - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ ナル集合ハ、完
 全ニ緊ツテ (*in sich kompakt*) キル。

証明: (8) 及ビ (9) ニヨツテ明ラカ。

§5. Lebesgue 積分ノ導入。 §2ノ問題
 [II]ノ解決ニ移ル。問題[I]ハ既ニ §3ニ解ケタ、コ
 レノ拡張ガ問題デアルガ、次ノ定理ニヨリ肯定的ニ解決
 ガ得ラレル。

定理3. §3ニ於イテ基本圖形全部ノツクル集合
 体ニテ定義シタ加法的測度 m ハ、 ν ノ集合体ヲ連続デアル。
 即チ⁽²²⁾基本圖形列 $\{\beta_k\}$ ($k=1, 2, \dots$) ガ、..... (i)

$$\beta_k \supset \beta_{k-1} \quad (k=1, 2, \dots) \quad \text{..... (ii)}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \beta_k = 0 \quad \text{ヲ満足スレバ、常ニ} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} m(\beta_k) = 0.$$

$$\text{証明: } \beta_k = \beta_k \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \beta_k \left(\Omega - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \right) \text{ト書ク。}$$

コノニ、 $\{\alpha_i\}$ ハ定理1ニヨリ、アル與ヘラレタ η, ε, C
 ニ對シテ選ンダ基本圖形ノ系列。

$$\sum_k = \beta_k \left(\Omega - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \right)$$

(22) [E], §1 Einiges aus der allgemeinen Mass-
 theorie, pp. 1-3. Kolmogoroff, 確率ノ本ニ
 モノツテキタト思フ。

トオク ト, $\Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \dots \supset \Sigma_n \supset \dots$ 1 ナ ヲ テ キル。
 アル ル ガ $\Sigma_n = 0$ ナ ル カ, ソノ 様 ナ ル ガ ナ イ キ デ ア
 ル。後 者, マウ ナ コト ハ 実 ハ 起 ラ ナ イ。何 者, ソノ カ 起 ヲ タ
 ト ス レ バ, Σ_n ノ 元, 無 限 系 列 ガ 得 ラ レ ル。部 分 列 ヲ ト
 ヲ テ 收 斂 セ シ メ, ソレ ガ, $\Omega - \sum \alpha_i =$ 属 ス ル コトヲ,
 定 理 2 = ヲ ヲ テ 知 ル。基 本 圖 形, 定 義 ヲ ラ β_n = モ 属 ス。
 即チ $\beta_n (\Omega - \sum \alpha_i) = \Sigma_n =$ 属 ス。コレ ガ ス ベ テ ノ
 n = 就 イ チ 云 ハ ル ト 云 フ コトハ, $\prod_{k=1}^{\infty} \Sigma_k \neq 0$, 従 ヲ テ

$\prod_{k=1}^{\infty} \beta_k \neq 0$ コレ 矛盾。依 ヲ テ 充 分 大 ナ ル k_0 ヲ ト レ バ,

$$k \geq k_0 = \text{對シテ } \beta_k = \beta_k \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} m(\alpha_i) < \eta = \tau$$

ル ヲ シ = $\{\alpha_i\}$ ヲ 選 ビ テ 居 タ ノ ガ カ ラ $m(\beta_k) < \eta$ 。

$\eta > 0$ ハ 定 理 1 = テ 述 ベ タ 如 ク 任 意 ノ 正 数。故 =

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(\beta_k) = 0 \quad \text{— 以 上 —}$$

カ ク シ テ § 2, [II] テ 目 指 シ タ m^* -測 度 ヲ 得 ル。

以 下 コレ ヲ 單 = m -測 度 ト 書 キ 改 メ ル。

§ 6. ス ペ ク ト ル 解 析 等。完 全 加 法 的 測 度 m
 ヲ Ω デ 定 義 シ 得 タ カ ラ = ハ, Lebesgue 積 分 (m -
 積 分) ノ 導 入 ハ, 定 石 ノ 数 フ ル 所 = 従 ヘ バ ヨ イ。 m -積 分
 ヲ, 基 函 数 ノ 積 分 = ヲ ヲ テ 近 似 ス ル コト 等 此 處 = 述 バ ル マ
 デ モ ナ イ。 Brown 運 動 = 関 ス ル 實 験 ト 照 應 シ テ 重 要 ナ
 ハ, 次 ノ モ ノ デ ア レ。

$$\int_{\Omega} (\varphi)^2(A) dm = \frac{1}{2} M(A)^{(23)}, \quad \int_{\Omega} |\varphi(A)| dm = \frac{\sqrt{M(A)}}{\sqrt{\pi}}$$

更ニ進ンテ、移動群 $t \rightarrow t + \Delta$ 考ヘ、 $(\varphi_{\Delta})(A) = \varphi(A_{\Delta})$
 = ヨリ、 Ω -空間ニ、流シ (Strömung) 考フルトキ、
 コレガ狭義ノ混合型 (Mischungstypus im engeren
 Sinne) デアルコトヲ証明シ $U_t F(\varphi) = F(\varphi_t)$ 、
スペクトル 解析等ヲ建設スルコトハ、Ergodic theory
 一般論ノ結果ヲ援用スレバヨイ。カクシテ、所謂彷徨函数
 ノ理論ノウチ、真ニ eigentlich $\pm \epsilon$ 、ハ Lebesgue
 積分導入マデノ過程デアルト言ヒ得ルデアラウ。

Ω = 於ケル殆ンド凡ベテノ函数ガ、アル意味デ微分不
 可能ト函数デアルトイフ注目スベキ結果モ、§3ノ Lebesgue
 積分ノ導入ニヨリ導カレルモノガアル。

$m(\Omega) = 1$ ナルガ故ニ、今マデ用ヒ來ツク “測度”
 ヲ、ヨリ印象的ナ “確率” トイフ言葉デ置キ換ヘラヨ
 イ。

§7. 結ビ: Brown 運動ノ實驗ハ、Wiener
 等ノ彷徨函数論ヲ促シタ。ソノ理論ハ、加法的集合函数
 = 於ケル完全加法的測度論トシテ上述ノ如ク建設サレ。
 ソノ スペクトル 解析モ、Lopf, Birkhoff 等ノ
 ergodic theory 一般論カラ得ラレル。最近 庭ニニ卷
 展シツ、アルトイフ洞動論 (turbulent motions)

(23) 脚註(19)デ述ベタ統計的法則 I^* = 照應スル。

ニ於テモ，コノ様ニ，適切ナ「言葉」ニ依ル整理が行ハレナ
イモノデアラウキ。

ソレニツケテモ，コノ彷徨函数ノ理論ヲ，コノデハ全然
築レナカッタ一般ノ *homogeneous random process*
ノ立場カラ見直ス必要ガアル。シカシ，Kolmogoroff,
Levy⁽²⁴⁾ 等ノ結果ノ紹介ハ、他日ニ譲リタイ。

(24) *Annali della R. Scuola Norm. Sup. Pisa*,
Ser II, 3 (1934).