OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	彷徨函數 (random functions)
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 162, p. 335-350
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74641
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

682. 彷徨函数 (random functions)

北川敏男 (阪大)

§1. 緒言: Brown 運動[1]ニ刺戟サレテ産ミ出サレタ彷徨函数[2]ノ理論ニツイテハ, Paley-Wiener[3]ノ書ニ優レタ解説ガアルノデ遠慮ナコトニヘ。ソコデ展開スル理論ニハ, 彼等ノ云フ如ク,[4]

---

(1) Perrin: Les Atomes. 又ハ桂村, 玉虫, 三島共譯: 原子: 第二章及ビ第四章. コレヲ〔原〕デ引用スル。又, 物理學文献抄, II. 土井小雲: Brown 運動ニ委シイ。

(2) 福島浩: 物理学ニ於ケル統計的現象 (岩波科學文献抄) ニ於イテ Schwankung (fluctuation) ノ譯ニ, 彷徨偏倚ヲ用ヒラレテタ。ソレニナラヒ, 假リニ彷徨ヲ用ヒルコトニシタ。同書, 序言, 既ヲ參照セラレヨ。

(3) Fourier Transforms in the complex domain: Am. Math. Coll. Pub. Vol. XIX. 特ニ Chap. IX 及ビ X. コレヲ〔F〕デ引用ス。

(4) 〔F〕, p. 141.

"the disadvantage of being most non-heuristic and of demanding from the reader the patience to take on faith the necessity of a large amount of material whose justification is only given after the completion of the argument" ガ十イ譯デモナイ。モット heuristic ナ方法ガアッテ然ルベキデアル。

Brown 運動ノ錯雜ナル，個々ノ微粒子ニツイテ，軌道ノ追跡ヲ出來ル限リ精細ニシヤウトシテモソレハ無意味デアッテ，[5] 統計力學ノ對象トシテ，始メテ意味ヲモツ。經驗的ニハ，實驗サレタ數多クノ軌道ニツイテノ、或ル物理的量ノ平均値ガ問題デアル。茲ニ物理學者ノイフ數多クト云フノハ，數學的ニ云フ凡ベラニ相應スル。一粒子ノ軌道方程

---

(5) [例]，p. 115—116 ニ云フ"粒子軌道ノ錯雜ハ實ニ多樣デ，又其ノ變化ハ迅速デアルカラ、到底之レヲ跡ツケルコトハ不可能デアリ、又實際測ラレタル軌道ハ事實ヨリモ遙カニ簡單且ツ小デアル。又一粒子ノ見掛ケノ平均速度モ與ヘラレタ時間内ニ於イテハ，ソノ大イサ方向共ニ激シク變リ，觀察時間ヲ如何ニ短縮シテモ決シテ一定ノ極限ニ向フモノデハナイ。……我々ハタトヘ近似的ニセヨ軌道ノドノ点ニ對シテモ切線ヲ定メルコトモ出來ナイ、而シテコレコソ我々ガ微分係數ヲモタナイ連續函數ヲ考ヘベキ眞ニ自然ナル場合デアル。"

式ハ $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ （t ハ時間）トシテ與ヘラレルデアラウ。可能ナルスベテノ軌道函數 x ニツイテ，ソレノ汎函數ノ平均値ガ問題ニナル。(6) コレハ、可能ナルスベテノ軌道函數ノツクル空間ニ於イテ、測度ノ概念ヲ導入スルコトト同問題デアラウ。但シ，通常ノ解析ノ對象トナルタメニハ，ソノ測度ハ，完全加法的デアルコトガ望マシイ。

斯クシテ，偶穏函數ノ理論ガ，要スルニ一ツノ積分論デアルベキコトヲ知ルノデアルガ，(7) ソウシタ理論ガ何等カノ方法デ建設サレタ場合，實驗的ニ確立サレタ統計的法則(8)ガソノ理論カラ導カレナケレバ無意味デアルコトハ敢テ斷ルマデモナイ。

前述：Paley-Wiener ノ所謂 "disadvantage" ノ除カレルコトヲ第一ニ希望スル立場ニアッテハ，Wiener ノコノ方面ノ最初ノ論文(9)ニ戻ルニ如クハナイ。E. Hopf ガ

---

(6) $y(t)$ ニ關シテモ同樣。以下 $x(t)$ ニ關シテノミ述ベル。粒子ニハ重量ガアルタメ鉛直ノ方向ハ別デアル。[原], p. 177.

(7) It will be seen that the theory of random functions is in essentials a theory of integration in function space. ([F], p. 140)

(8) Perrin ノ實驗等。コレハ後デ述ベル。

(9) Differential space, Journ. Math. and Phy. Vol. II, NO. 3. (1923)

ソノ著[10]ニ於テ、ソノ方法ノ荒筋ヲ、ヨリ modern ナ形デ述ベテ居ル。私ハ此處ニ、其處デ省略サレタ証明ヲ補ヒ乍ラ、紹介ヲ試ミヨウト思フ。

§2. 構成的方法[11]ノ概要。 $-\infty < t < \infty$ デ定義サレタ實数値連続函數[12] $\chi(t)$ ニ對シテ、$\chi(0)=0$ ナルトキ、區間 $(\delta, t)=A$ ニ對シテ $\varphi(A)=\chi(t)-\chi(\delta)$ ト定義スル。コノ場合、忽函數 χ ト區間函數 φ トノ對應ガ一對一トナル。今考ヘタヤウナ區間全部ノ集合ハ、集合体[13] (Mengenkörper) ヲツクリ、φ ハソコデ加法的 (finite additive) デアル。吾リハ、E. Hopf ニ從ヒアラユル φ ノツクル函數空間ニ、Lebesgue 測度ヲ入レルコトヲ問題ニスルノデアル。

---

(10) Ergodentheorie, Erged. Math. und ihr. Grenzgebiete (1937). 特ニ、§16. Masstheorie im Raum der additiven Mengenfunktionen. コレヲ[E]デ引用ス。

(11) 假リニコノ様ナ名ヲツケタ。[F]ノ方法ニ對比シテ。

(12) [E]ニハ、連続トイフ假定ガ書イテナイ。以下ノ議論デハコノ性質ヲ用ヒナケレバナラナイコトハ明ラカデアル。(或ハ、必然的ニ導クレルコトデアルカモ知レナイ)。[F], Theorem XLIII, p. 148 參照。又[F], p. 151 ニ"In all that follows, we take $\varphi(x,\alpha)$ to be continuous"トアル。

(13) 或ル集合系ガアッテ、ソレノ任意ノ二ツノ元 α, β ト共ニ、$\alpha+\beta$ $\alpha\beta$, $\alpha-\beta$ (α ツ β ノトキ), $\beta-\alpha$ (β ツ α ノトキ)ヲ含ムトキ、Mengenkörper トイフ。コレヲ集合体ト譯シテミタ。

吾々ハ，次ノヤウナ構成的方法ヲ採ラウ。

〔I〕 Ωノツリル或ル集合体 $\mathfrak{k}$ ヲ適當ニ選ビ此處ニ，finite additive ナ測度 m ヲ，先ヅ定義スル。

〔II〕 $\mathfrak{k}$ ヲ Borel 集合体 $B\mathfrak{k}$（完全加法的集合体）[14] ニマデ拡張シテ，$B\mathfrak{k}$ ニテ完全加法的（completely additive）デ，$\mathfrak{k}$ ガハ m ト一致スルヤウナ測度 m^* ヲ求メル。

§3. 加法的測度ノ導入。 Ωハ点 $p, p', \cdots\cdots$ カラナル空間，K ハ Ω ノ部分集合ニヨッテ形成サレタ或ル集合体トスル。Ω ガ実数全部ノ集合，K ガ§2 ニ述ベタ区間ノツリル集合体デアルノガ，吾々ノ要求スル場合デアルガ，茲デハ、コノヤウナ制限ヲ設ケズ、一般的ナ結果ヲ述ベヨウ。今 K ニ属スル凡ベテノ集合ニ對シテ定義サレタ加法的ナ集合函數 $\mathfrak{M}(A)$ ヲ考察ノ對象トスル。カヽル $\mathfrak{M}$ 全部ノツリル空間ヲ $\mathfrak{S}$ トスル。

Ω カラ、相素ナル $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ ヲ選ビ，$\alpha_i = \mathfrak{M}(A_i)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ ナル實数ノ組ヲ考ヘル。n 次元ユークリッド空間 R_n ニ属スル O_n ナル可測集合ヲ與フルトキ，$\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\} \subset O_n$ デアル様ナ $\mathfrak{S}$ ノ

---

(14) 集合体ガ，可附番無限個ノソレニ属スル集合ノ和集合ヲモ含ムトキ，コレヲ Borelscher (od. absolut additiver) Mengenkörper トイフ。

部分集合ヲ以テ表ハサウ。

コノ様ナ方法デツクラレタ以全部ノ集合ハ，一ツノ集合体ヲツクル。ソレヲ示スノニハ

$$\alpha=[\textcircled{\alpha};\{\textcircled{\alpha}(A_1),\textcircled{\alpha}(A_2),\cdots\cdots,\textcircled{\alpha}(A_n)\}\subset O_x]^{(15)}\cdots\cdots(1)$$

$$\beta=[\textcircled{\beta};\{\textcircled{\beta}(B_1),\textcircled{\beta}(B_2),\cdots\cdots,\textcircled{\beta}(B_m)\}\subset O_m]\cdots\cdots(2)$$

ヲ考ヘル。A_i, B_j ニ共通ノ部分分割ヲ施シテ，相素ナル $C_i\,(i=1,2,\cdots\cdots,N)$ ヲ得クトスル。[16] コノトキ

$$\alpha=[\textcircled{\alpha};\{\textcircled{\alpha}(C_1),\textcircled{\alpha}(C_2),\cdots\cdots,\textcircled{\alpha}(C_N)\}\subset O_N]\cdots\cdots(3)$$

$$\beta=[\textcircled{\beta};\{\textcircled{\beta}(C_1),\textcircled{\beta}(C_2),\cdots\cdots,\textcircled{\beta}(C_N)\}\subset O'_N]\cdots\cdots(4)$$

トモ書カレル。斯リ表ハストキ，$\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$，$\alpha-\beta$（$\alpha>\beta$ ノトキ）ガ又，夫々ノ集合体ニ属スルコトハ明ラカデアル。[17]

コノ集合体ニ加法的集合体ヲ導入スル：ソノタメ，任意ノ実数又及ビ K ニ属スル任意 A ニ對シテ定義サレタ実数値函数 $w(x,A)$ ヲ考ヘ $w\geqq 0$，$\int_{-\infty}^{\infty} w(x,A)\,dx=1$（スベ

---

(15) $\in(x)$ ナル性質ヲ有スル X ノ全部ヲ $[X,\in(x)]$ ト書ク。

(16) A_i 同志，B_j 同志ハ夫々，假定ニヨリ共通点ハナイ。シカシ，A_i ト B_j トニハ共通点ガアルカモ知レナイ。共通分割ニヨル $C_\nu\,(\nu=1,2,\cdots\cdots,N)$ ヲツクルトキ，各 A_i ハ若干個ノ C_ν ノ和集合トシテ表ハサレル。但シ C_i ノ内ノアルモノハ $\sum A_i$ ニ含マヌコトモアラウ。$\{B_j\}$ ニ関シテモ同様。

(17) $O_N+O'_N$，$O_NO'_N$，$O_N-O'_N$ 又ハ O'_N-O_N ガ又 R_n デ可測ナルガ故ニ。

ヲ $A \in K$ ニ ツイテ）トスル。ソシテ (1) デ與ヘラレタ α ニ對シ

$$m(\alpha)=\iint_{O_n}\cdots\cdots\int w(x_1,A_1)\,w(x_2,A_2)\cdots\cdots w(x_n,A_n)\,dx_1 \cdots\cdots dx_n \cdots\cdots (5)$$

デ $m(\alpha)$ ヲ定義スル。

然ルニ同ジ α モ，例ヘバ (1) ト (3) トデ見ル如ク違ッタ定義ノ仕方ガアル。定義ノ仕方ハ違ッテモ，$m(\alpha)$ ソノモノハ一致セネバナラヌ。

コノタメノ必充條件ハ，$AB=0$ ニ對シ常ニ

$$w(x,A+B)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t,A)\,w(x-t,B)\,dt \cdots\cdots\cdots (6)$$

ナル函數方程式ヲ滿足スルコトデアル。[18] 尚，m が加法的測度ニナルコトハ，明ラデアル。

コレ等ハ，一般的ナ結果デアル。吾々ハ §2 デ掲ゲタ問題 [I] ニ歸ラウ。§1 ノ終リニ述ベタ如ク、吾々ノ理論ハ實驗ノ[19]結果ヲ導カナケレバナラヌ。實驗ノ示ストコロヲ從フメメーハ、(5) ニ於テ，$w(x,A)=e^{-\frac{x^2}{M(A)}}/\sqrt{M(A)}$ ニト

---

(18) 証明ハ [E] ニ委シク書イテアル。A_i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ C_ν $(\nu=1,2,\cdots\cdots,N)$ トシツルトキ，(1)，(3) 各々ニヨリ夫々 $m(\alpha)$ ガ定義サレルガ、ソレガ同ジ値ヲモツコトヲ示セバヨイ。

(19) ハ次頁ヘ。

セネバナラス。[20] ($M(A)=M([a,t])=t-$ムトス) カノ定義サレタル函数方程式(6)ヲ充スカ故ニ，加法的ナ測度ヲ得タコトニナル。即チ問題Ⅰハ肯定的ニ解決サレタ。(1)ノ如ク定義サレタルヲ基本圖形ト呼ンデ宜シカラウ。

§4. 微復函数ニ関スル Hölder ノ條件。

問題〔Ⅱ〕ニ進ム前ニ，準備ヲセネバナラス。

定理1. $\varepsilon>0$, $\eta>0$, $C>0$ ヲ任意ニ與ヘタルトキ，次ノ性質 10—30 ヲ有スルヤウナ，自然数

---

(19) 例ヘバ，顕微鏡ノ視野ニ於イテ，アル適當ニ選ンダ同時間テヲ隔テテ、同ジ粒子ノ位置ヲシルス。例ヘバ x一成分ニツイテ，$x(t_0)$ ヲ測定ス。コノヤウナ実験ヲ繰返シテ $\{x_i(t_0)\}$ ($t_0=0,1,2,\cdots\cdots,N$, $i=1,2,\cdots\cdots,M$) ヲ得ル。Perrin ノ実験カラハ，次ノ様ナ漸近的法則ガ得ラレル。

Ⅰ.* $\sum_{i=1}^{M}\{x_i(t_0)\}^2$ ハ，略ボ t_0 ニ正比例スル。

Ⅱ.* 各 time-interval (t_0, t) ニ於ケル $\{x_i(t)-x_i(t_0)\}$ ($i=1,2,\cdots\cdots,M$) ハ，略ボ Gauss ノ分布ニ従フ。ソノ分布ノ基準ハ $t-t_0$ ニ depend スル。

Ⅲ.* 互ニ重リ合ハナイ time-intervals ニ於ケル運動ハ，独立事象ト見做サレル。

(20) カク定義スルトキ，脚註(19)ガ述ベタ法則Ⅱ.*, Ⅲ.*ヲ充シテヰルコトガワカル。コノスルトキⅠ.*ハ，必然的結果トナルコトハ後デ示ス。

$N(\varepsilon, \eta, C)$, 正数 $C'(\varepsilon, \eta, C)$ 及び高々可附番無限個の基本閉形列 $\{\alpha_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ が選び出せる。即ち

1°) $$\sum_{i=1}^{\infty} m(\alpha_i) < \eta \quad \cdots\cdots (7)$$

2°) $\Omega - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ に属する凡ての $\mathfrak{N}$ (即ち函数 x) に共通に, 指数 $\frac{1}{2} - \varepsilon$ の次の Hölder の条件が充されて居る: $|t_2 - t_1| \leqq 1/2^{N(\varepsilon, \eta, C)}$ なる限り, $-\infty < t_1, t_2 < \infty$ に於て

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leqq C |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2} - \varepsilon} \left\{ 1 + |t_1|^{2\varepsilon} + |t_2|^{2\varepsilon} \right\} \quad \cdots\cdots (8)$$

3°) $\Omega - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$ に属する凡ての $\mathfrak{N}$ (即ち x) に共通に, $-\infty < t < \infty$ に於て

$$|x(t)| \leqq C' \left\{ |t|^{\frac{1}{2} + \varepsilon} + 1 \right\} \quad \cdots\cdots (9)$$

証明: $\frac{1}{2} - \varepsilon = \lambda$ と書く。証明を三段に分ける。

第一段. 與へられた C とに対し, $C_1 > 0$ 便宜上考へる。整数 m, n, k を定めて

$$\left| x\left(m + \frac{k+1}{2^n}\right) - x\left(m + \frac{k}{2^n}\right) \right|$$

$$\geqq C_1 2^{-\lambda n} \left\{ 1 + \left| m + \frac{k+1}{2^n} \right|^{2\varepsilon} + \left| m + \frac{k}{2^n} \right|^{2\varepsilon} \right\} \quad \cdots\cdots (10)$$

を満足するやうな x 即ち $\mathfrak{N}$ の集合を Ω で考へる。

コレハ基本圖形デアルカラ、ソノ測度[21]ハ§3ニ於イテ與ヘタ，簡單ナ計算ノ後ワカル如ク

$$\exp\left(-\frac{C_1^2 2^{(1-2\lambda)n}}{2\pi}\left(1+\left|m+\frac{k}{2^n}\right|^{2\varepsilon}+\left|m+\frac{k+1}{2^n}\right|^{2\varepsilon}\right)\right) \cdots\cdots (11)$$

次ニ，m, n, kノウチ、nガ𝑛ヲ固定シテ，$-\infty < m < \infty$, $0 \leqq k < 2^n$ナル整數 m, kノドレカノ組ニ對シテ(10)ナル關係ノ成立スルヤウナ𝑥ノ集合ヲ考ヘルト，コレハ可附番無限個ノ基本圖形ノ和集合デアッテ、ソノ測度ノ和ハ，(11)ナル項ヲ，$-\infty < m < \infty$，$0 \leqq k < 2^n$ノ範圍デ總和シタモノニナル。コノ總和ハ，

$$C_2 \frac{2^n}{2^{(1-2\lambda)n\left(\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon-1}+1\right)}} \exp\left\{-\frac{C_1^2 2^{(1-2\lambda)n}}{2\pi}\right\} \cdots\cdots (12)$$

ヲ超ヘナイ．但シコゝニ，C_2ハεトC_1トニ關係スルガnニ無關係ニエラベル常數。從ッテ，アル自然數Nヲ與フルトキ，(10)ナル關係ガ，$n \geqq N$, $-\infty < m < \infty$, $0 \leqq k < 2^n$ノ範圍ニアルドレカノ(m, n, k)ノ組ニ對シテ成立スルヤウナ𝑥全部ノ集合ハ，可附番個ノ基本圖形ノ和集合ニ含

---

(21) 吾々ハ，(5)ニ於テ，$w(x, A) = e^{-\frac{x^2}{M(A)}}/\sqrt{M(A)}$ トシタカラ，

コノ測度ハ，コノ際$M(A) = 2^{-n}$ニ注意シテ，

$$\sqrt{\frac{2^n}{\pi}}\left\{\int_p^{\infty} e^{-2^n x^2} dx + \int_{-\infty}^{-p} e^{-2^n x^2} dx\right\}$$

デ與ヘラレルル。但シ

$$p = C_1 2^{-\lambda n}\left\{1+\left|m+\frac{k+1}{2^n}\right|^{2\varepsilon}+\left|m+\frac{k}{2^n}\right|^{2\varepsilon}\right\}$$

マレ，ソレラ基本圖形ノ測度ノ和ハ，(12) ナル項ヲ以テ≧N ナルスベテノ n ニツイテ總和シタモノニナル。ノー $2\lambda>0$ トルコトカラ、ソレハ收斂スル。從ツテ，$\eta>0$ ヲ勝手ニ與ヘテモ，$N_1(\varepsilon,\eta,C_1)$ ヲ充分大キクトレバ $N_1(\varepsilon,\eta,C_1)$ ヨリ大ナル各 n ニツイテノ總和ヲ η ヨリ小ナラシメ得ル。

コノコトハ，定理 I ノ假定ノモトニ於テ，(但シ C ノ代リニ $C_1>0$ (コレモ勝手ニ與ヘテヨイ) ヲ與フルトキ) 主張 1° ト，ソレカラ或ル制限ノモトデ主張 2° トガ成立スルコトヲ意味スル。ソノ制限トイフノハ，(8) 式ノ成立ハ，C ノ代リニ C_1 ヲ用ヰ；又 $t_2=m+\frac{k+1}{2^n}$，$t_1=m+\frac{k}{2^n}$，(n ハ任意ノ整數，$n\geqq N_1(\varepsilon,\eta,C_1)$，$0\leqq k<2^n$) ニ對シテノミ証明サレテヰルコトヲ意味スル。ソノ制限ヲ取除クコトガ第二段デアル。

第二段。　今スベテノ實數ヲ二進法デ展開スル。

$$t_1=a_{-k}a_{-k+1}\cdots a_0,a_1a_2\cdots a_n a_{n+1}\cdots$$

$$t_2=b_{-k}b_{-k+1}\cdots b_0,b_1b_2\cdots b_n b_{n+1}\cdots$$

$0<t_2-t_1\leqq 1/2^n$，$n\geqq N(\varepsilon,\eta,C_1)$ トスルノ從ツテ $k=k$ デ，$l\leqq n-1$ ニ對シテハ $a_l=b_l$. 依テ

$$t_2^n=a_k a_{-k+1}\cdots a_0,a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n a_{n+1}\cdots a_m$$

$$t_1^m=a_{-k}a_{-k+1}\cdots a_0,a_1a_2\cdots a_{n-1}b_n b_{n+1}\cdots b_m$$

ヲ考ヘル。$x(t)$ ハ連続ダカラ

$$x(t_i)=\sum_{m=n}^{\infty}\left\{x\left(t_i^{m+1}\right)-x\left(t_i^{m}\right)\right\}+x\left(t_i^{n}\right)\quad(i=1,2)$$

t_i^m ハミチ、第一段デ考ヘタ分点デアルカラ、第一段ノ結果ト上式トカラ

$$|x(t_2)-x(t_1)|<\frac{4C_1}{1-2^{-\lambda}}2^{-\lambda n}\left\{1+|t_1|^{2\varepsilon}+|t_2|^{2\varepsilon}\right\}$$

コヽニ $=t_2-t_1=2^{-n}$. 依ッテ，定理ノ假定ノ C ヲ勝手ニ與ヘタトキ，$C_1=C(1-2^{-\lambda})/4$ トッテ，コノ C_1 ニツキ第一段ヲ証明シテオケバ、結局定理ノ $1^\circ-2^\circ$ ガ得ラレタコトニナル。

第三段，3° ヲ証明スル。$t^*=1/2^{N(\varepsilon,\eta,C)}$ トス．$t>t^*$ トスル（$t<-t^*$ ノトキモ同様）區間 $[t^*,t]$ ヲ下等分シ，$t_n=t$，$t_0=t^*$ トシテ

$$x(t)-x(t^*)=\sum_{i=1}^{n}\left\{x(t_i)-x(t_{i-1})\right\}$$

ト書ク。細區間ノ長サヲ $1/2^{N(\varepsilon,\eta,C)}$ ヨリ小ニスル。

$\Omega-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ ニ屬スル凡ベテノ函數ニツイテ，第二段デ証明シタ關係式 (8) カラ

$$|x(t)-x(t^*)|<C\sum_{i=1}^{n}|t_i-t_{i-1}|^{\lambda}\left\{1+|t_i|^{2\varepsilon}+|t_{i-1}|^{2\varepsilon}\right\}$$

n ヲ限リナク大ナラシメル。コノ不等式カラ

$$|x(t)-x(t^*)|\leqq C\lambda\int_t^{t^*}t^{\lambda-1}dt+2C\lambda\int_t^{t^*}t^{\lambda-1+2\varepsilon}dt$$

$t<-t^*$ ニ關シテモ同様。$|t|\leqq t^*$ ニツイテハ，既ニ $|x(t)-x(0)|=|x(t)|<C|t|^{\lambda}\{1+|t|^{2\varepsilon}\}$ ヲ得テ

キル。コレラ三ツヲ一所ニシテ (9) 式ヲ成立セシメルヤウナ C' ヲ見出スコトハ容易デアル。 ——以上——

定理2. 定理1ニ於テ得タ $\Omega-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i$ ナル集合ハ，完全ニ緊ツテ（in sich kompakt）キル。

証明: (8) 及ビ (9) ニヨッテ明ラカ。

§5. Lebesgue 積分ノ導入。§2ノ問題〔II〕ノ解決ニ移ル。問題〔I〕ハ既ニ§3デ解ケタ，コレノ拡張ガ問題デアルガ、次ノ定理ニヨリ肯定的ナ解決ガ得ラレル。

定理3. §3ニ於イテ基本圖形全部ノツクル集合体ニテ定義シタ加法的測度ハ，ソノ集合体デ連続デアル。即チ[22]基本圖形列 $\{\beta_k\}$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$ ガ，……(i)

$$\beta_k \supset \beta_{k-1} \quad (k=1,2,\cdots\cdots) \quad \cdots\cdots\cdots (ii)$$

$\prod_{k=1}^{\infty}\beta_k=0$ ヲ満足スレバ，常ニ $\lim_{k\to\infty} m(\beta_k)=0$.

証明: $\beta_k=\beta_k\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i+\beta_k\left(\Omega-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\right)$ ト書ク。

コヽニ，$\{\alpha_i\}$ ハ定理1ニヨリ．アル與ヘラレタ η, ε, C ニ對シテ選ンダ基本圖形ノ系列。

$$\Sigma_k=\beta_k\left(\Omega-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\right)$$

---

(22) [E], §1 Einiges aus der allgemeinen Masstheorie, pp. 1—3. Kolmogoroff ノ確率ノ本ニモノッテオタト思フ。

トオクト，$\Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \cdots\cdots \supset \Sigma_n \supset \cdots\cdots$ トナッテキル。アルガ $\Sigma_n = 0$ ニナルカ，ソノ様ナガナイクデアル。後者ノヤウナコトハ実ハ起ラナイ。何者，ソレガ起ッタトスレバ，Σ_k ノ元ノ無限系列ガ得ラレルノ部分列ヲトッテ収斂セシメ，ソレガ，$\Omega - \sum \alpha_i$ ニ属スルコトヲ，定理2ニヨッテ知ル。基本図形ノ定義カラ β_k ニモ属ス。即チ $\beta_k(\Omega - \sum \alpha_i) = \Sigma_k$ ニ属ス。コレガスベテノ k ニ就イテ云ヘルト云フコトハ，$\prod_{k=1}^{\infty} \Sigma_k \neq 0$，従ッテ $\prod_{k=1}^{\infty} \beta_k \neq 0$ コレ矛盾。依ッテ充分大ナル k_0 ヲトレバ，$k \geq k_0$ ニ対シテ $\beta_k = \beta_k \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$。$\sum_{i=1}^{\infty} m(\alpha_i) < \eta$ ニナルヤウニ $\{\alpha_i\}$ ヲ選ンデ居タノダカラ $m(\beta_k) < \eta$。$\eta > 0$ ハ定理1ニテ述ベタ如ク任意ノ正数。故ニ

$$\lim_{k \to \infty} m(\beta_k) = 0$$

—— 以上 ——

カクシテ §2〔II〕デ目指シタ m^*—測度ヲ得ル。以下コレヲ単ニ m—測度ト書キ改メル。

§6. スペクトル解析等。完全加法的測度 m ヲ Ω デ定義シ得タカラニハ，Lebesgue 積分（m—積分）ノ導入ハ，定石ノ数フル所ニ従ヘバヨイ。m—積分ヲ、基函数ノ積分ニヨッテ近似スルコト等此処ニ述ブルマデモナイ。Brown 運動ニ関スル実験ト照応シテ重要ナノハ，次ノモノデアル。

$$\int_{\mathfrak{A}} \varphi^{2}(A)\,dm = \frac{1}{2}M(A)^{(23)},\quad \int_{\mathfrak{A}} |\varphi(A)|\,dm = \frac{\sqrt{M(A)}}{\sqrt{2}}$$

更ニ進ンデ、移動群 $t \longrightarrow t+\Delta$ ヲ考ヘ，$\Phi_\Delta(A)=\varphi(A_\Delta)$ ニヨリ、$\mathfrak{A}$— 空間ニ，流レ（Strömung）ヲ考フルトキ，コレガ狭義ノ混合型（Mischungstypus im engeren Sinne）デアルコトヲ証明シ $U_t F(\Phi) = F(\Phi_t)$ ノスペクトル解析等ヲ建設スルコトヘ，Ergodic theory 一般論ノ結果ヲ援用スレバヨイ。カクシテ，所謂分程函数ノ理論ノウチ、真ニ eigentlich ナモノハ Lebesgue 積分導入マデノ過程デヤルト言ヒ得ルデアラウ。

$\mathfrak{A}$ ニ於ケル殆ンド凡ベテノ函数ガ、アル意味デ微分不可能ナ函数デアルトイフ注目スベキ結果モ，§3 ノ Lebesgue 積分ノ導入ニヨリ導クレルモノデアル。

$m(\mathfrak{A})=1$ ナルガ故ニ，今マデ用ヒ来ツヽ〝測度〟ヲ，ヨリ印象的ナ〝確率〟トイフ言葉デ置キ換ヘテヨイ。

§7. 結び: Brown 運動ノ実験ハ，Wiener 等ノ分程函数論ヲ促シタ。ソノ理論ハ，加法的集合函数ニ於ケル完全加法的測度論トシテ上述ノ如ク建設サレ、ソノスペクトル解析モ，Hopf，Birkhoff 等ノ ergodic theory 一般論カラ得ラレル。最近益ニ発展シツヽアルトイフ渦動論（turbulent motions）

---

(23) 脚註(19)デ述ベタ統計的法則 I^{*} ニ照応スル。

ニ於テモ，コノ様ニ，適切ナ「言葉」ニ依ル整理ガ行ハレナイモノデアラウカ。

ソレニツケテモ，コノ循環函数ノ理論ヲ，コンデハ全然筆レナカッタ一般ノ homogeneous random process ノ立場カラ見直ス必要ガアル。シカシ，Kolmogoroff，Lévy[24]等ノ結果ノ紹介ハ、他日ニ譲リタイ。

---

(24) Annali della R. Scoula Norm. Sup. Pisa, Ser II, 3 (1934).