



Title	確率論への積分方程式の應用, IV (Smoluckovskyの方程式並ニMarkovの連鎖)
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 163, p. 358-364
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74645
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

716. 確率論への積分方程式の應用 IV.

(Smoluchowsky, 方程式並 - Markov, 聯鎖)

吉田 耕 作 (阪大)

前談話 (679) の 定理 を使つて Smoluchowsky の
方程式

$$(H) \quad T(t+\Delta) = T(t)T(\Delta) \quad (0 < t, \Delta < \infty)$$

ヲ取扱ツテ ミル。 始メ筆者ハ Fourier 解析 = ヨリ, 角
谷氏ハ 系列 $\{T(\frac{t}{2^n})\}$ ヲ 考ヘル コト = ヨリ 略、 同ジ 結果
ヲ 得タ ガ, 何レモ 幾分 ノ 計算 ヲ 要スル。 其ノ 後 考ヘ 直シテ ミ
タラ, 次ノ 様 = スル ノ が 手 取リ 早ク 且ツ übersichtlich
ノ 様 デアル。 色々 御 助力 ヲ 受 ケ タ 角 谷 氏 = コノ ガ 感謝 シ テ
ヲ キ マ ス。

次ニハ 定理 ヲ 用ヒテ Markov ノ 聯鎖 = 開スル 古
典的ノ 結果ガ 擴張 シタ 形ガ 得ラレル コトヲ 示シタイ。

§8. Smoluchowsky の方程式

complex Banach 空間 L ノ 線型 operator

ノ系 $T(t)$ が (14) ヲ満足スルトスル。コノ解 $T(t)$ = 次ノ条件ヲ附ケル。

(a) 或ル $t_0 > 0$ = 對シ $T = T(t_0)$ が 定理 ノ条件 (i), (ii) ヲ満ス。

(b) $T(t)$ ハ t = 関シテ連続:

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \|T(t) - T(t_1)\| = 0.$$

然ラベ, 定理 = 於ケル T ノ分解ト類似ノ $T(t)$ ノ分解が得ラレルコト次ノ如クデアル。

先ヅ 定理 = ヨリ

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} T = \sum_{i=1}^k \lambda_i T_i + S, \quad |\lambda_i| = 1, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (i \neq j), \\ T_i^2 = T_i, \quad T_i T_j = 0 \quad (i \neq j), \\ T_i S = S T_i = 0 \quad \text{且ツ} \quad \|S^n\| \leq \frac{\beta}{(1+\varepsilon)^n} \\ \quad \quad \quad (n = 1, 2, \dots; \varepsilon, \beta > 0). \end{array} \right.$$

今 $T_i(t) = T_i T(t) T_i$ トシ, 次ノ如ク置テ

$$(15) \quad T(t) = \sum_{i=1}^k T_i(t) + S(t).$$

$$(*) \quad \text{カ} \quad T_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{T}{\lambda_i} \right) + \left(\frac{T}{\lambda_i} \right)^2 + \dots + \left(\frac{T}{\lambda_i} \right)^n \right\}$$

然ラ (14) = ヨリ T_i ハ 全テノ $T(t)$ ト commutative:

$$T_i T(t) = T(t) T_i.$$

故 = (14), (*) = ヨリ 容易 =

$$(16) \quad T_i(t+s) = T_i(t) T_i(s)$$

$$(17) \quad T_i(t) T_j(s) = 0 \quad (i \neq j),$$

$$T_i(t) S(s) = S(s) T_i(t) = 0.$$

$$(18) \quad S(s) S(t) = S(t+s)$$

が得られる。次=

$S(t)$ の評価. (b) から $S(t)$ が $0 < t < \infty$ で $t =$ 関シ連続ナコトハ明カ, $S = S(t_0)$ が (*) を満たカラ, (18) = ヨリ

$$(19) \quad \|S(t)\| \leq d \exp(-ct); \quad c, d > 0,$$

$$t_0 \leq t < \infty$$

$T_i(t)$ の構造. $T_i =$ ヨル $\mathcal{L}_i$ の像ヲ $\mathcal{L}_i$ トスルト $T_i^2 = T_i =$ ヨリ $\mathcal{L}_i$ の各点ハ何レモ $T_i =$ ヨリ invariant. T_i ハ *vollstetig* (定理=証明シタ) ダカラ, $\mathcal{L}_i$ の単位球 $\|x\| \leq 1$ ハ compact. ヨツテ Riesz の定理⁽¹⁾ = ヨリ $\mathcal{L}_i$ ハ有限次元。

$T_i(t) = T_i T(t) T_i$ ハ $\mathcal{L}_i$ 上 $\mathcal{L}_i$ 内ニ寫ス. $T_i^2 = T_i$ ダカラ $T_i(t) = T_i(t) T_i$. ヨツテ $T_i(t) = M_i(t) T_i$ ($M_i(t)$ ハ $\mathcal{L}_i$ 上 $\mathcal{L}_i$ 内ニ寫ス一次寫像即チ有限次元ノ matrix !!) ノ形デアアル。 $M_i(t)$ ハ勿論 (16), (18) を満足スル ($T_i^2 = T_i =$ ヨル) カラ, $M_i(t_0) =$ 単位行列 = ヨリ, $M_i(t)$ ハ $0 \leq t < \infty$ で $t =$ 関シ連続且ツ (16) を満足シ, $M_i(0) =$ 単位行列,

(1) S. Banach: *Théorie des Opérations*

linéaires, p. 83.

ヨツテ⁽¹⁾ $\|M_i(t) - M_i(0)\| < 1$ for $t, \leq 1$ トスルト

$$\begin{cases} M_i(t) = \exp \frac{t}{t_i} C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{t_i} C \right)^n \\ C = \log M(t_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (M(t_i) - M(0))^n \end{cases}$$

C , 固有値 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_e$ トスルト, 之カラ

$$(20) \quad M_i(t) \approx \begin{vmatrix} \exp(\mu_1 t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\mu_e t) \end{vmatrix} \quad (\approx \text{ハ固有値, 意味})$$

然シテ $M_i(t_0) = \text{単位行列}$ カラ $\mu_e t_0 \equiv 0 \pmod{2\pi i}$.

ヨツテ $T = T(1)$, *Eigenraum* $\mathcal{L}_i = T_i$ $\mathcal{L}$ が *time* t の変化 = ヨツテ *Eigenraum* $\mathcal{L}$ コ = 今イル状態がワカッタ.

(15) 乃至 (20) 及ビ $T_i(t) = M_i(t) T_i =$ ヨツテ 定理 = 相當スルコトガ $T(t) =$ 關シテ云ヘタワケ = ナル.

§ 9. Markov / 連鎖 (Chain)

我々ノ談話ノ出発点ハ *Fréchet* ノ定理 (談話 676) デアッタ。之レハ古典的ナ *Markov chain* ノ議論ヲ函数空間 = 拡張シタモノデアアル。 *Markov chain* ノ定義ハ次ノ通り。

(1) 作者: 日本數學報 13 (1936) p. 24 以下, 証明ガソノマ
マアテハマル。

有限 Σ の状態 $[1], [2], \dots, [\Delta]$ が有り, 単位時間
 の後 = 状態 $[i]$ が状態 $[j]$ = 移ル遷移確率が t_{ij} ,
 n 単位時間 の後 = 状態 $[i]$ が状態 $[j]$ = 移ル遷移確率
 $t_{ij}^{(n)}$ が行列

$$T^{(n)} \quad \left(T = (t_{ij}), \quad t_{ij}^{(1)} = t_{ij} \right)$$

$i-j$ 要素が興へラレル如キ事象ヲ *Markov chain*
 ト呼ブ。

$$\text{明ラカ} = \sum_{j=1}^{\Delta} t_{ij}^{(n)} = 1, \quad t_{ij}^{(n)} \geq 0 \quad \text{ガカラ, 行列 } T \text{ ハ我}$$

々ノ 定理 ノ条件 (i), (ii) ヲ満足スル。筆者ノ調べタ所デハ
Markov chain = 関シテ優レタ敘述ハ *v. Mises* ノ
 書物 *Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig*
 (1931) p. 533 - 549 = 7ル。 定理 ヲ使ハバ状態全体
 が complex Banach 空間 $\mathcal{L}$ ヲ作ル場合 =, T /
positivity ($t_{ij}^{(n)} \geq 0, \sum_{j=1}^{\Delta} t_{ij}^{(n)} = 1$ - 相當スル) /

假定 + シ =, *v. Mises* = 出テアル事柄ノ中 essential
 ナ部分ガ擴張シタ形デ得ラレルコト次ノ通りガアル。

$\mathcal{L}$ ノ線型 operator T が 定理 ノ条件 (i), (ii)
 ヲ満足スルトスレバ 定理 = ヨリ (*) が成立ツ。 E ヲ $\mathcal{L}$ ノ

単位 operator トスルト $T_0 = E - \sum_{i=1}^{\Delta} T_i$ ハ (**) = ヨリ

$T_0^2 = T_0, T_0 T_i = T_i T_0 = 0 \quad (i \geq 1)$ ヲ満ス。即チ E ハ

$\bar{E}$ = orthogonal + idempotent $T_0, T_1, \dots, T_k$
 , 直和 = +ル。ヨツテ $T_i = \text{ヨル } \mathcal{L}_i$, 像ヲ $\mathcal{L}_i$ トスルト
 $\mathcal{L}_i$ ハ原点以外 = $\bar{E}$ = 共通点モタス $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k$,
 直和 = +ル,

Mises = +ラ ヲテ $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_i (i \geq 1)$ ヲ 夫々 keine
 Zugangs - Wahrscheinlichkeit , 部分 keine
 Abgangs - Wahrscheinlichkeit , 部分ト呼バウ。
 其, 理由ハ 次ノ通り:

$x \in \mathcal{L}_0$ トスルト $T_0^2 = T_0$ = ヨリ $T_0 x = x$. ヲツテ
 (*) = ヨリ

$$T \cdot x = T \cdot \left(E - \sum_{i=1}^k T_i \right) x = S x,$$

同ジク $T^2 \cdot x = S^2 x, \dots, T^n \cdot x = S^n x$ ヲ得ル。ヨツテ
 (*) = ヨリ time ト共 = 幾何級数的ノ速度デ一様 = $T^n x$
 が $\mathcal{L}_0$ ノ 原点 0 = 近ヅク。

$x \in \mathcal{L}_i (i \geq 1)$ トスルト $T_i^2 = T_i$ = ヨリ $T_i x = x$.
 ヲツテ (*) = ヨリ $T \cdot x = T \cdot T_i \cdot x = \lambda_i x$. 同ジク
 $T^2 x = \lambda_i^2 x, \dots, T^n x = \lambda_i^n x$ ヲ得ル。ヨツテ 全
 テノ時間 = 対シ $T^n x \in \mathcal{L}_i$. 且ツ $|\lambda_i| = 1$ = ヨリ $T^n x$
 ハ時間 = 対シ 概週期的 (fast periodic) = $\mathcal{L}_i$ 内ヲ
 シロツク。(1)

以上ノ結果ハ Kryloff - Bogoliouboff , Fréchet

(1) §8 ノ所論ト同ジク T_i , vollstetig + コトカラ $\mathcal{L}_i$
 ハ有限次元ナル。

定理 = 對スル 確率論的 解釈 (談話 678) ト對比シテ 頂ヲト
 意味ガハッキリスル。ソレ故 現代式 (?) = $\mathcal{L}_i (i \geq 1)$ 也。
 ヲ夫々 ergodic + 部分, dissipative + 部分 ト呼
 ンダオカヨサ相デアル。