



Title	Convexナ集合ニ関スル不動点定理, II
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 163, p. 364-372
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74646
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

717. Convex + 集合 = 関スル不動点定理, II

角 谷 静 夫 (阪大)

最初 = 前面ノ誤リデ氣ノツイタモ、ヲ訂正シマス。最初ノ頁ノ定理ノ三行目「 $E \ni E$ ノ中へ」ハ「 $B \ni B$ ノ中へ」ノ誤リデアリマス。

§ 7

Almost periodic function トノ關係 先ヅ almost periodic function ノ定義カラ始メル。 G ヲ任意ノ群、 E ヲ G ノ上デ定義サレタ有界ナ実数値函数 $f(x)$ 全体カラ成ル linear space トスル。任意ノ $f \in E$ = 對シテ $\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|$ = ヨツテ norm $\|f\|$ ヲ定義シ、任意ノ $f, g \in E$ = 對シテ $d(f, g) = \|f - g\|$ = ヨツテ f ト g トノ距離 $d(f, g)$ ヲ導入スル。 $f \in E$ カ almost periodic ナアレト云フ、ハ $f_a(x) \equiv f(xa), a \in G$, ナル形ノ函数全体ガ作ル集合 A

(C E) が $E =$ 於て compact + closure $\bar{A}$ 7
 $\in$ ヲコトデアール。⁽¹²⁾ 今 $E =$ 於ケル A , closed convex
 cover B 7 考ヘレバ B ハ又 compact 7 且ツ B ハ

$$(*) \quad \lambda_1 f(xa_1) + \lambda_2 f(xa_2) + \dots + \lambda_n f(xa_n),$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in G; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1; n = 1, 2, \dots$$

ナル形ノ函数デ一様ニ近似出来ル函数全体ノ集合デアール。
 今任意ノ $g \in E =$ 對シテ $T_a \{g(x)\} = g(xa) = \exists$ ヲツテ
 $T_a \{g(x)\}$ ノ定義スレバ T_a ハ E 7 E 全体ニ linear
 $=$ (勿論 affine!) 寫像スル isometric + 変換デ
 且ツ B ハ $T_a = \exists$ ヲツテ B 全体ニ寫像サレテキル。

V. Neumann 及ビ Maak = 依レバ almost
 periodic function $f(x) =$ 對シテハ常ニソノ mean
 $M(f)$ が對應シ常数 $M(f)$ ハ (*) ノ形ノ函数デ一様ニ
 近似出来ルノデアール。コレハ上ノ如ク考ヘレバ常数 $M(f)$
 が B ニ屬シテキルト云フコトニ外ナラナイ。常数ハ E ノ中
 デアラエル $T_a (a \in G) =$ 對シテ不動ノ点トシテ charac-
 terize 出来ルカラ almost periodic function =

(12) 定義ノ形ヨリ云ヘバカ、ル函数ハ right almost
 periodic function ト名付ケルベキデアール。シカ
 シ、同様ニシテ left almost periodic function
 7 定義シテモ結局同ジニシク得テレナイノデアール。
 コレニ關シテハ例ヘバ Maak ノ論文 (4) 参照。

$mean$ が存在スルト云フコトハ B / 中 = スベテノ $Ta =$
 對シテ不動ノ点が存在スルト云フコトニ同ジデアアル。ヨツテ
 V. Neumann-Maack ノ結果ハ次ノ如ク述ベルコトが
 出來ル:

定理 E 7 norm ノアル linear space, B
 7 compact, convex + E / 部分集合 (空デ + $1 \in 1$),
 Γ 7 $E \rightarrow E$ / 中へ affin = 寫像シ且ツ同時 = B 7
 B / 中へ寫像スル isometric + affine Transformation $\varphi(x)$ が作ル群⁽¹³⁾ トスレバ, スベテノ
 $\varphi \in \Gamma =$ 對シテ $\varphi(x) = x$ トナル如キ B / 点 x が存
 在スル。

コノ様ニ定理ヲ書キ改メレバ E が函数が作ル
 linear space デアルト云フコトハモハヤ必要デハナイ。
 ヨツテ証明ハ直接ヤリ直スベキデアアル。証明ハ Maack ノ
 真似ヲシテ次ノ如クヤレバヨイ。

証明: E ハ metric space, B ハソノ中ノ com-
 pact ナ集合デアルカラ又 totally bounded デアル。
 ヨツテ任意ノ $\varepsilon > 0$ = 對シテ B 7 有限個 (= N 個)ノ直
 徑ガ ε 7 超ヘナイ互ニ共通点ノナイ集合ニ分ケルコトが出
 來ル。 $\varepsilon > 0$ 7 定メタトキ, カナルアラユル分割ニ對スル

(13) $\varphi(x)$ が isometric ナラバ affin = ナルコトガマ
 カツテキルカラ (S. Banach: Opération liné-
 aire, 166 頁 定理 2) affin ト云フ假定ハイ
 ラナイ。

N の最小値ヲ N_ε トセヨ。

B の直径ガ ε ヲ超ヘナイ互ニ共通点ノナイ N_ε 個ノ集合 $B_1, B_2, \dots, B_{N_\varepsilon}$ ニ分レルコトガ出来ル。今各々、 B_i ($i=1, 2, \dots, N_\varepsilon$) カラ任意ニ一点 x_i ヲ取り出セバ

$$x = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} x_i \text{ ハ明カニ } B \text{ ノ点デ且ツ任意ノ } \varphi \in \Gamma =$$

對シテ $\|x - \varphi(x)\| \leq 2\varepsilon$ デアル。何トナレバ φ ハ B ヲ B 全体ニ對シテ isometric ニ寫像スルカラ

$$B = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \varphi(B_i) \text{ ハ } x \text{ ーツ、 } B \text{ ノ分割デ各々、 } \varphi(B_i) \text{ ハ}$$

直径ガ ε ヲ超ヘナイ、 N_ε ハカナル分割ノ個数ノ最小値デアルカラ r 個ノ $\varphi(B_i)$ ガ $r+1$ 個ノ B_j ヲ含ムコトハナク。又 r 個ノ B_j ガ $r+1$ 個ノ $\varphi(B_i)$ ヲ含ムコトモナイ。ヨツテ Maakノ Lemma⁽¹⁴⁾ニヨツテ B ノニツノ分割 $B = \sum B_j$ ト $B = \sum \varphi(B_i)$ トニハ共通ノ代表元 y_k ($k=1, 2, \dots, N_\varepsilon$) ヲ取ルコトガ出来ル。ヨツテ $\varphi(x)$ ガ

(14) W. Maak: Eine neue Definition der fast-periodischen Funktionen, Abh. math.

Semin. Hansisch. Univ, Bd 11 (1956), p. 241.

スハ H. Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppentheorie, 1937. p. 11. Maakノモトノ証明デハ group G ヲ分割シテキル。コノデハ B ヲ分割シテキルコトニ注意!

affine + ルコトヨリ

$$\begin{aligned}\|x - \varphi(x)\| &= \left\| \frac{1}{N_\varepsilon} \sum x_j - \frac{1}{N_\varepsilon} \sum \varphi(x_i) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{N_\varepsilon} (\sum x_j - \sum y_k) \right\| + \left\| \frac{1}{N_\varepsilon} (\sum \varphi(x_i) - \sum y_k) \right\| \leq 2\varepsilon\end{aligned}$$

カ、ル x ハ 各々、 $\varepsilon > 0$ = 對シテ 定マルカラ コレヲ x_ε トス。今 $\{x_{\frac{1}{n}}\}$ ($n=1, 2, \dots$) ヲ考ヘレバコレハ何レモ B ノ 点デアアルカラ B が compact + ルコトヨリ、少クトモ一ツ B = 属スル 集積点が存在スル。コレヲ x トセヨ、コレガ求ムル 不動点ナルコトヲ証明シヨウ。今 $\varepsilon > 0$ ヲ任意ニトレバ x が $\{x_{\frac{1}{n}}\}$ ($n=1, 2, \dots$) ノ 集積点デアアルカラ $\|x - x_{\frac{1}{n_0}}\| \leq \varepsilon$, $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$ + ル如キ n_0 が必ず少クトモ一ツ存在スル。コノ n_0 = 對シテハ φ が isometric + ルコトヨリ

$$\begin{aligned}\|\varphi(x) - x\| &\leq \|\varphi(x) - \varphi(x_{\frac{1}{n_0}})\| + \|\varphi(x_{\frac{1}{n_0}}) - x_{\frac{1}{n_0}}\| \\ &\quad + \|x_{\frac{1}{n_0}} - x\| \\ &= \|x - x_{\frac{1}{n_0}}\| + \|\varphi(x_{\frac{1}{n_0}}) - x_{\frac{1}{n_0}}\| + \|x_{\frac{1}{n_0}} - x\| \\ &\leq \varepsilon + 2 \cdot \frac{1}{n_0} + \varepsilon \leq 4\varepsilon\end{aligned}$$

トナル。 $\varepsilon > 0$ ハ 任意デアツタカラ $\varphi(x) = x$ ガナレバナラナイ。コレヲ定理ノ証明が終ルノデアアルガ、コゝニ注意スベキハ、 E が metric デアルト云フコトが必ずしも必要デナイノコトデアアル。

即ち B が *biconvex* デアルト云フ 假定ガアレバ E が 第一可附着公理ヲ満足シテキル必要ハナイノデアル。(E が 第一可附着公理ヲ満足シテ居リ且ツ *locally convex* デアレバ *metric able* デアル。) 勿論コノ場合ハ *isometric* = 代ルコレト同等ノ条件が必要デアル。

[定義] E ヲ *locally convex + linear topological space*, φ ヲ E ヲ E ノ中へ寫像スル *affine transformation* トスル。今モシ任意ノ E ノ 原点ノ 近傍 U 及び E ノ 任意ノ 点 $x =$ 對シテ $\varphi(x) + U = \varphi(x + U)$ ⁽¹⁵⁾ が成立スレバ φ ハ *congruent* + 寫像デアルト云フ。

[定理] E ヲ *locally convex + linear topological space*, B ヲ *biconvex*, *convex* + E ノ 部分集合 (空デナイモ), Γ ヲ E ヲ E 全体へ *one-to-one* = 寫像スル *congruent + affine transformation* $\varphi(x)$ ⁽¹⁶⁾ ノ 作ル群トスレバ, スベテノ $\varphi \in \Gamma =$ 對シテ $\varphi(x) = x$ トナル如キ B ノ 点 x が存在スル。

証明ハ 先ノ *isometric* ナ場合ト殆ド同様ニヤルコトが出来る。

(15) $x + A$ ハ $x + a$, $a \in A$ ナル如キ形ノ 点全体ノ 集合ヲ表ハス。

(16) コノ場合モ *congruent* ト云フ 假定カラ *affin* ト云フコトが得ラレルコトが証明出来るカラ *affin* トイフ 假定ハイラナイ。

タゞ E が *metric* デナイタメニ種々ノ困難ヲ生ジル。
 先ガ E ハ *metric* デナイカラ B ノ直径ガ ε ノ超ハナ
 イ集合ニ分割シヨウトシテモ直径トイフモノガ考ヘラレナイ。

シカシ B ハ *bicompact* デアルカラ任意ノ原点ノ近傍
 $\bigcup^{(17)} =$ 對シテ E ノ有限個ノ互ニ共通点ノナイ集合 $B_i (i =$
 $1, 2, \dots, N)$ ニ分割シテ各々ノ B_i ガ適當ナ $x_i \in B_i$
 ニ對シテ $B_i \subset x_i + U$ トナルマウニスルコトが出来ル。 U
 ノ定メタトキ、カナル N ノ最小値ヲ N_U トシ、コレニ對シテ

前ト同様ニ $x_U = \frac{1}{N_U} \sum_{i=1}^{N_U} x_i$ ノ作ル。明カニ $x_U \in B = \tau$

且ツ U ガ *convex* ナルコトト $\varphi(x)$ 及ビ $\varphi^{-1}(x)$ ガ
congruent ナルコトヨリ *Maack's Lemma* ノ用フレ
 ビ任意ノ $\varphi \in \Gamma$ ニ對シテ $\varphi(x_U) - x_U \in 2U$ トナル。
 次ニカナル x_U ノ各々ノ U ニ對シテ作り $\{x_U\}$ ノ集積点ヲ考
 ヘルノデアアルガ一般ニハカナル U ハ可附番以上アルカラ(勿
 論 $U = -U = \tau$ 且ツ *convex* ナモノヲ考ヘル。シカモソ
 ノ近傍系ト同等ニナルガケヲ考ヘレバヨイノデア
 ルガ、コレハ一般ニハ可附番個デハ間ニ合ハナイ) 前ノ様ナ
 議論ハ成立シナイ。ヨツテコレハ次ノ如ク改メル。先ダ

(17) コレハ E が *locally convex* デアレト云フ假定ヨリ
convex ナモノガケヲ考ヘレバ十分デアル。又 $U = -U$
 トナルモノガケヲ考ヘレバ十分。(組シ $-U$ ハ $-x, x \in U$
 トナル如キ点 $-x$ 全体ノ集合)。ヨツテ今後ハカナル U
 ノミヲ考ヘルコトニスル。

$\mathcal{U}$ の $\mathcal{U}$ をとり、アタユル $\nabla \subset \mathcal{U}$ なる $\nabla = \text{對スル } \{x_\nabla\}$
 を考へル。コレハ $B = \text{含マレル無限集合}$ デアルカラ B が
bicompact ナルコトヨリ $B = \text{属スル集積点}$ rome. B
 $= \text{属スル } \{x_\nabla\} (\nabla \subset \mathcal{U})$ の集積点全体ノ集合ヲ $H_\mathcal{U}$ トス
 ル。 $H_\mathcal{U}$ ハ明カニ空集合デナク且 *bicompact* デアル。
 シカモ $\nabla \subset \mathcal{U}$ ナレバ $H_\nabla \subset H_\mathcal{U}$ デアル。

コレヨリ任意ノ $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 = \text{對シテ } H_{\mathcal{U}_1} \cdot H_{\mathcal{U}_2} \neq \Lambda$ デアル。
 何トナレバ $\nabla \subset \mathcal{U}_1 \cdot \mathcal{U}_2$ ナル ∇ が存在スルカラコノ
 $\nabla = \text{對シテ } H_\nabla$ を考へレバ $H_\nabla \neq \Lambda = \text{テ } H_\nabla \subset H_{\mathcal{U}_1} \cdot H_{\mathcal{U}_2}$
 デアル。

故ニ各々ノ $H_\mathcal{U}$ が *bicompact* ナルコトヨリ、スベ
 テノ $H_\mathcal{U}$ ハ少クとも一ツノ共通点 x rome. コノ共通点 x が
 求ムル不動点ナルコトヲ証明シヨウ。 $\mathcal{P}(x) \neq x$ ナル如キ
 $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$ が存在スルト假定シテ矛盾がオコルコトヲ証明シヨ
 う。 $\mathcal{P}(x) - x \in 4\mathcal{U}$ ナル如キ $\mathcal{U}$ をとレ、コノ $\mathcal{U} = \text{對シテ}$
 $x \in H_\mathcal{U}$ ナルコトヨリ、 $H_\mathcal{U}$ ノ定義ヲ考へレバ $x - x_\nabla \in \mathcal{U}$,
 $\nabla \subset \mathcal{U}$ ナル如キ x_∇ が存在スル。ヨツテ $\mathcal{P}(x)$ が *coher-*
grent ナルコトヨリ $\mathcal{P}(x) - x = (\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(x_\nabla))$
 $+ (\mathcal{P}(x_\nabla) - x_\nabla) + (x_\nabla - x) = \text{テ } \mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(x_\nabla)$
 $= \mathcal{P}(x - x_\nabla) \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, $\mathcal{P}(x_\nabla) - x_\nabla \in 2\nabla \subset 2\mathcal{U}$,
 $x_\nabla - x \in \mathcal{U}$ ナルコトヨリ $\mathcal{P}(x) - x \in 4\mathcal{U}$.

コレハ $\mathcal{P}(x) - x \in 4\mathcal{U} = \text{矛盾スルカラ } \mathcal{P}(x) = x$ デ
 ナレバナリ。即チ x ハ求ムル不動点デアル。

コレデ一般ノ場合ノ定理ノ証明が終ル。コレニ注意ス

でキハ不動点ノ uniqueness ハ必ずしも得ラレナイコト
デアル。コレハ例へバ I' が單位変換 $\varphi(x) \equiv x$ ノミヨリナ
ル時ヲ考へレバ明カデアル。