718. Jordan領域ノStabilitéトcapacité (I)

井上　正雄（阪大）

三次元空間 z ニ於ケル單一Jordan閉曲面ニテ囲マレタ有界領域ヲ $\mathfrak{D}$，ソノ境界ヲ Σ，$F(z)$ ヲ空間全体ニテ定義サレタ實連續函數トスル。ソシテ次ノ如キDirichletノ問題ニ關シテrégulierナ二ツノ領域列 $\{\mathfrak{D}_n^1\}$，$\{\mathfrak{D}_n^2\}$ ヲ考ヘル。

$$\mathfrak{D} \supset \cdots\cdots \supset \mathfrak{D}^1_{n+1} \supset \mathfrak{D}^1_n, \quad \lim_{n\to\infty} \mathfrak{D}^1_n = \mathfrak{D}$$

$$\mathfrak{D} \subset \cdots\cdots \subset \mathfrak{D}^2_{n+1} \subset \mathfrak{D}^2_n, \quad \lim_{n\to\infty} \mathfrak{D}^2_n = \overline{\mathfrak{D}}$$

次ニ一般ニ領域 Ω ニ於ケル境界値 f ナル調和函數ヲ

$$H(z, f, \mathfrak{D})$$

ニテ表ハスコトニスレバ

$$\{H(z, F, \mathfrak{D}_n^i)\} \quad (i=1,2)$$

ナル二ツノ調和函數列ハ夫々 $\mathfrak{D}$ 内デノ調和函數 $H^{(i)}(z,$

$F, \vartheta)$ $(i=1,2)$[1] ニ一様ニ收斂スルコトガ解ル。シカモコノ函數 $H^{(i)}(z, F, \vartheta)$ ハ F ノ Σ 上ニ於ケル値ニノミ關聯シ $\{\vartheta_n^i\}$ ノ撰ビ方ニハ無關係デアル。

此處デ當然問題ニナルノハ

$$H^{(1)}(z, F, \vartheta) = H^{(2)}(z, F, \vartheta)$$

トナルカ，ドウカノ問題デアル。本談話ハコレニ關スル考察デアル。

先ヅ，之ノ問題ヲ局所的見地ヨリ眺メテ行カウ。境界點 p ノ régularité ガ

$$\lim_{z \to p} H^{(1)}(z, F, \vartheta) = F(p)$$

ニテ定義サレタト同樣ニ境界點 p ノ stabilité ナルモノヲ次ノ如ク定義シヤウ。

定義: 連續函數 $F(z)$ ノ如何ニ拘ラズ常ニ

$$\lim_{z \to p} H^{(2)}(z, F, \vartheta) = F(p)$$

ナルトキ p ハ Stable (Dirichlet ノ問題ニ關シテ) ナ境界點ト云フ。[2]

---

(1) $H^{(1)}(z, F, \vartheta)$ ハ普通 ϑ ノ境界値ヲ $F(z)$ トスル Dirichlet ノ問題ノ solution généralisée ト呼バレテイルモノデアル。

(2) Keldych, Lavrentieff: Sur le problème de Dirichlet, C. R. 204, 1937. ニ於ケル point de stabilité トハ形式上異ルガ本質的ニハ全ク同一ナルコトガ後ヨリ解ル。又コノ報告ニハ更ニ色々ノ詳シイ定義ガアルガコノ談話デ問題ニスルノハコノ部分ダケデアル。

コノ定義ノ仕方ニヨリ *régularité* ニ関スル諸種ノ定理が領域ノ内部ヨリノ近似ヲ外部カラノ近似ニ置キ換ヘテ大体ソノマヽ得ラレルコトハ想像ニ難クナイ。事実之レハ大抵ノ場合成立スル。ソノコトヲ一々コヽニ詳シク御紹介シマセウ。

境界点 p ヲ中心トシテ半径 r ナル開球 C_r ヲ画キ，C_r ニ含マレ且ツ $\mathfrak{D}$ ニ含マレザル点集合（開集合）ヲ $\mathfrak{D}^*_r$ デ表ハス。p ヲ通ル任意ノ平面 P_r ヲ考ヘコノ上ニ $\mathfrak{D}^*_r$ ヲ正射影シテ得タル開集合ノ面積ヲ σ_r トスル。

シカルトキ充分條件ヲ與ヘル次ノ定理が成立スル。[3]

定理 1.

適当ニ $r_n \downarrow 0$，$\{P_{r_n}\}$ ヲ撰ビ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_{r_n}}{r_n^2} > 0$$

ナラシメ得ルナラバ，p ハ *stable* ナ境界点デアル。

（証明）

定理ノ條件ヨリスベテノ r_n ニ対シテ

$$\sigma_{r_n} > a r_n^2$$

ナル $a>0$ が存在スルトシテヨイ。

今 $\mathfrak{D}^*_{r_{i+1}}$ 内ニ適当ニ定理ノ條件ニヨリ $P_{r_{i+1}}$ ニ平行ナル有限個ノ互ニ重ナリ合ハヌ円列ヲ画キ，ソノ面積ノ和ヲシテ

(3) *Phillips, Wiener, Nets and the Dirichlet's problem, Journal of Math. and phys. Math Inst. of Tech. 1923, V.2, N.3.*

丁度 ar_{i+1}^2 ナラシメルコトガ出来ル。コノ円列ヲ br_{i+1} デ表シテオカウ。

サテコノ br_{i+1} 上ニ densité 1 ノ répartition de la masse ヲ考ヘ，コレニヨル potentiel newtonien $V_{i+1}(z)$ ヲ考ヘル。

シカラバ C_{r_i} ノ球面 $S(C_{r_i})$ 上デハ

$$V_{i+1}(z) \leqq \frac{ar_{i+1}^2}{r_i\left(1-\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)} = \frac{a\theta_i^2 r_i}{(1-\theta_i)}$$

但シ $\theta_i = \frac{r_{i+1}}{r_i}$，

$S(C_{r_{i+1}})$ 上デハ

$$V_{i+1}(z) \geqq \frac{ar_{i+1}}{2} = \frac{a\theta_i r_i}{2}$$

サテコノ potentiel ノ br_{i+1} 上ノ値ヲ考ヘルニ先ヅ第一ニ br_{i+1} ノ円列が互ニ相接近シタ方ガヨリ大ニナリ、更ニハコレラノ円列ガスベテ一平面上ニアル方ガ大デアルコトヲ考ヘ合スレバ br_{i+1} ニ於ケル $V_{i+1}(z)$ ノ値ハ面積 ar_{i+1}^2 ナル円ニ densité 1 ノ répartition de la masse ヲ考ヘコレニヨル Potentiel ノ中心ニ於ケル値ヲ越サナイコトガ判ル。實際ニコノ値ヲ計算スレバ

$$2\pi\int_0^{\theta_i r_i\sqrt{\frac{a}{\pi}}} \frac{1}{\rho}(\rho\, d\rho) = 2\theta_i r_i\sqrt{\pi a}$$

ソコデ

$$W_{i+1}(z) = \frac{V_{i+1}(z) - \frac{a\theta_i^2 r_i}{1-\theta_i}}{2\theta_i r_i\sqrt{\pi a} - \frac{a\theta_i^2 r_i}{1-\theta_i}}$$

トスレバ（但シコヽニ $\theta_i < \lambda < 1$, a ヲ充分小サクトリコノ分母ヲ正ナラシメテオク：コノコトハ何等一般性ヲ失ハナイ）

$$b\, r_{i+1} \text{ 上デハ } W_{i+1}(z) \leqq 1$$

$$S(C\, r_i) \text{ 上デハ } W_{i+1}(z) \leqq 0$$

$$S(C\, r_{i+1}) \text{ 上デハ } W_{i+1}(z) \geqq \frac{\dfrac{\sqrt{a}}{2} - \dfrac{\theta_i}{1-\theta_i}\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi} - \dfrac{\theta_i\sqrt{a}}{1-\theta_i}} = \alpha_i$$

若シ $\theta_i < \frac{1}{3}$ ナラバ $\alpha_i > 0$,

$\theta_i \leqq \frac{1}{4}$ ナラバ $\alpha_i \geqq \alpha > 0$ ナル α が存在スル。

サテ p が stable ナルコトヲ証明スルニハ $\mathfrak{D}$ ノ境界 Σ 上ニ連続函数ヲ與ヘ，ソノ連続接続ヲ $F(z)$ トスルトキ

$$\lim_{z \to p} H^{(2)}(z, F, \mathfrak{D}) = F(p)$$

ナルコトヲ云ヘバヨイ。

任意ニ $\varepsilon > 0$ ヲ與ヘタトキ $\delta > 0$ ヲ定メ $z \in C_\delta$ ナラバ

$$|F(z) - F(p)| \leqq \varepsilon$$

ナラシメ得ル。

$F(z)$ ノ最大値ヲ $\frac{M}{2}$（全空間ニ於ケル；之レハ有限トシテモヨイ）トシ

$$v_n(z) = \frac{H(z, F, \mathfrak{D}_n^2) + M}{F(p) + M - \varepsilon}$$

$$v_n'(z)=\frac{-H(z,F,\mathcal{D}_n^2)+M}{-F(p)+M-\varepsilon}$$

トスレバ $v_n(z)$, $v_n'(z)$ トモ $S(C_r)$ $(r<\delta)$ 上デハ

$$\geqq 0 \quad (\varepsilon ハ充分小サイトシテ)$$

C_r 内ノ $\mathcal{D}_n^2$ ノ境界上デハ

$$\geqq 1$$

次ニ定理ノ條件ニ於ケル $\{r_n\}$ ノウチカラ適當ニ部分系列（コレヲ簡單ノタメ矢張リ $\{r_n\}$ ト書ク）$\{r_n\}$ ヲ次ノ如ク撰ブコトガ出來ル。

$$\delta > r_1 > 4r_2 > 4^2 r_3 > \cdots\cdots > 4^n r_{n-1} > \cdots\cdots\cdots$$

即チ $\quad \dfrac{r_{i+1}}{r_i}=\vartheta_i<\dfrac{1}{4}$

n ヲ充分大キクトリ $\mathcal{D}_n^{2*}$（$\mathcal{D}_n^2$ ノ余集合）ガ b_{r_2} ヲ含ムヤウニシ，コノ n ニ對シテ $v_n(z)$, $v_n'(z)$ ヲ作リ，コノ函數ト (r_1, r_2) デ作ッタ函數 $W_2(z)$ トヲ比較スルコトニヨリ

$S(C_{r_2})$ 上デハ

$$v_n(z)\geqq\alpha ,$$

$$v_n'(z)\geqq\alpha .$$

故ニ，次ニ

$$\frac{v_n(z)-\alpha}{1-\alpha},\quad \frac{v_n'(z)-\alpha}{1-\alpha}$$

ヲ考ヘ n ヲ更ニ大キクトリ $\mathcal{D}_n^{2*}$ ガ b_{r_3} ヲ含ムヤウニシ，

此ノ函数ト（r_2, r_3）デ作ッタ函数 $W_3(z)$ ト比較スレバ

$S(C_{r_3})$ 上デハ

$$\frac{v_n(z)-\alpha}{1-\alpha} \geqq \alpha, \quad \frac{v'_n(z)-\alpha}{1-\alpha} \geqq \alpha$$

即チ　$v_n(z) \geqq 1-(1-\alpha)^2, \quad v'_n(z) \geqq 1-(1-\alpha)^2$

コノ方法ヲ繰リ返シテ行ケバ $\alpha < 2$ トシテヨイコトハ勿論ダカラ，充分大ナルスベテノ n ニ對シテ $(1-\alpha)^{K-1} \leqq \varepsilon$ ナル K ニ對シ

$S(C_{r_K})$ 上デ

$$v_n(z) \geqq 1-\varepsilon,$$

$$v'_n(z) \geqq 1-\varepsilon.$$

ナラシメ得ル。

即チ

$$\frac{H(z, F, \mathfrak{D}_n^2)+M}{F(p)+M-\varepsilon} \geqq 1-\varepsilon,$$

$$\frac{-H(z, F, \mathfrak{D}_n^2)+M}{-F(p)+M-\varepsilon} \geqq 1-\varepsilon.$$

コレヨリ

$$|H(z, F, \mathfrak{D}_n^2)-F(p)| \leqq \varepsilon(2M+1)-\varepsilon^2,$$

$\mathfrak{D}_n^2$ ノ $S(C_{r_K})$ 上ニアラザル境界上デハ

$$|F(z, F, \mathfrak{D}_n^2)-F(p)| \leqq \varepsilon$$

且ツ，コノ不等式ハ充分先ノスベテノ n ニツイテ成立スル

故

C_{r_K} ニ含マレル $\mathfrak{D}$ ノ領域内デ

$$\left| H^{(2)}(z, F, \mathfrak{D}) - F(p) \right| \leqq Max. \left\{ \varepsilon, \varepsilon(2M+1) - \varepsilon^2 \right\}$$

故ニコレヨリ

$$\lim_{z \to p} H^{(2)}(z, F, \mathfrak{D}) = F(p).$$

C.Q.F.D.

コノ定理ニヨリ Σ ガ p ニヨイテ解析的ナラバ或ハ更ニユルク p ヲ中心トスル円錐ガ $\mathfrak{D}$ ノ外部ニ画ケルナラバ p ハ stable ナ境界点デアルコトガ判ル。