OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	確率論ヘノ積分方程式ノ應用, V (Banach 空間ニ於ケル mean ergodic theorem)
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1938, 164, p. 394-397
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74649
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

720. 確率論ヘノ積分方程式ノ應用, V (Banach 空間ニ於ケル mean ergodic theorem)

吉田　耕作 (阪大)

談話 680 (p. 308) ニ於テ角谷君ヘ C. Visser ノ定理 (談話679) ヲ complex Banach 空間 $\mathfrak{L}$ ニ拡張サレタ。之レハ相當一般ナ結果デアルケレドモ, 具体的ナ問題ニ應用スルニハ弱收斂デハ弱スギル。考ヘ直シテミタラ、実ハ强收斂定理ガ得ラレルコトガワカリマシタ。証明モ大分簡單化サレタ様デス。

§10. $\mathfrak{L}$ ニ於ケル mean ergodic theorem

定理　$\mathfrak{L}$ ヲ $\mathfrak{L}$ 内ニ寒ク線型 operator T ガ次ノ二條件ヲ満足スルトスル。即チ

(1)　$\|T^n\| \leqq$ 常数 C　　$(n=1,2,\cdots\cdots)$

(2)　T ハ $\mathfrak{L}$ ノ単位球 $\|x\| \leqq 1$ ヲ $\mathfrak{L}$ 内ニ於テ weakly compact ナ集合ニ写ス。

然ラバ全テノ $x \in \mathfrak{L}$ ニ対シテ点列 $\{x_n\}$

$$x_n = \frac{T\cdot x + T^2\cdot x + \cdots\cdots + T^n\cdot x}{n}$$

ガ強収斂スル。

証明　$x_n = T\cdot\left\{\dfrac{x + T\cdot x + \cdots\cdots + T^{n-1}\cdot x}{n}\right\}$。右辺ノ括弧内ハ (1) ニヨリ其ノ絶対値 $C\|x\|$ ヲ越エナイ。故ニ (2) ニヨリ或ル部分列 $\{x_{n_i}\}$ ガ $\mathfrak{L}$ ノ点 $\overline{x}$ ニ弱収斂スル。即チ全テノ linear functional f ニ対シテ

(3)　$\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(\overline{x})$

所ガ (1) ニヨリ $\|Tx_{n_i} - x_{n_i}\| \leqq \dfrac{2C}{n_i}\|x\|$ ダカラ $T\cdot\overline{x} = \overline{x}$ ガワカル。

従ッテ $x_n = \overline{x} + z_n$, $z_n = \dfrac{T + T^2 + \cdots\cdots + T^n}{n}(x - \overline{x})$

ヲ得ル。故ニ結局 z_n ガ 0 ニ強収斂スルコトガ云ヘレバヨイ。

偖テ $(x - \overline{x})$ ガ $(y - T\cdot y)$ ノ形デアレバ (1) ニヨリ $\left\|\dfrac{T + \cdots\cdots + T^n}{n}(y - T\cdot y)\right\| \leqq \dfrac{2C}{n}\|y\|$ ダカラ z_n ハ 0 ニ強収

故ス。又 $(x-\bar{x})$ が $(y-T\cdot y)$ ノ如キ形ノ点ノ集積点デアレバ，任意ノ $\varepsilon>0$ ニ対シテ $\|(x-\bar{x})-(y-T\cdot y)\|\leqq\varepsilon$ ナル如キ $y\in\mathfrak{y}$ が存在ス。然ラバ (1) ニヨリ

$$\left\|z_n-\frac{T+\cdots\cdots+T^n}{n}(y-T\cdot y)\right\|\leqq C\varepsilon$$

トナル。ε ハ任意ダカラ上カラ結局 z_n が 0 ニ強収斂スル。

故ニ $(y-T\cdot y)$ ノ形ノ点ノ張ル線形閉集合ヲ $\mathfrak{y}_0$。トスルトキ $(x-\bar{x})\in\mathfrak{y}_0$ が云ヘルトヨイ。若シ然ラズトスレバ Banach ノ定理[1]ニヨリ次ノ如キ linear functional f_0 が存在スル:

$$f(z)=0 \text{ for all } z\in\mathfrak{y}_0,\quad f_0(x-\bar{x})=1.$$

然ラバ $(x-Tx)\in\mathfrak{y}_0$ カラ $f_0(x)=f_0(Tx)$. $(T\cdot x-T^2\cdot x)\in\mathfrak{y}_0$ カラ $f_0(Tx)=f_0(T^2x)$. 以下同様ニシテ $f_0(x)=f_0(T^n\cdot x)$ for $n=1,2,\cdots\cdots$.

故ニ $$f_0(x)=f_0\left(\frac{Tx+T^2x+\cdots\cdots+T^n\cdot x}{n}\right) \text{ for } n=1,2,\cdots.$$

依ッテ $\bar{x}$ ノ定義 (3) カラ $f_0(x)=f_0(\bar{x})$ ヲ得ル。之レハ $f_0(x-\bar{x})=1$ ニ反スル。以上。

系。写像 $x\to\bar{x}$ が線型 operator T_1; $\bar{x}=T\cdot x$ デ表ヘラレルコトハ明カ。$T\bar{x}=\bar{x}$ ニヨッテ $TT_1=T_1$, 依

---

(1) S. Banach: Theorie des operations linéaires. p. 57.

ッテ $T^n T_1 = T_1$. 之レヨリ $T_1^2 = T_1$ ヲ得ル。又

$$\left\| \frac{T+\cdots+T^n}{n} x - \frac{T+\cdots+T^n}{n} T\cdot x \right\| \leqq \frac{2C}{n}\|x\| = ヨッ$$

テ $T_1 T = T_1$. マトメテ

(4) $T_1^2 = T_1$, $TT_1 = T_1 T = T_1$.

T_1 ノ意味ハ次ノ通リデアル。任意ノ $x \in \mathfrak{H}$ ニ対シ $T(T_1 x) = (TT_1)x = T_1 \cdot x$。又 $T\cdot y = y$ トスレバ $T^n \cdot y = y$ 従ッテ $T_1 \cdot y = y$. 故ニ T_1 ハ $\mathfrak{H}$ テ, T ノ固有値 1 ニ属スル固有空間ニ. 寫ス projection operator デアル.

任意ノ λ, $|\lambda| = 1$, ニ對シテ $\frac{T}{\lambda}$ が定理ノ條件ヲ満スカラ strong limit $T_\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{ \sum_1^n \left(\frac{T}{\lambda}\right)^m \right\}$ が, 上述カラ

$$T_\lambda^2 = T_\lambda, \quad T T_\lambda = T_\lambda T = \lambda T_\lambda$$

ヲ満足スル訳デアル。此ノ系ハ角谷君ノ得ラレタノト同一デアリマス。

注意. von Neumann ノ mean ergodic theorem ハ, $\mathfrak{H}$ が Hilbert 空間, T が unitary ナ場合ノ強収斂定理デアルが, unitary デアレバ必然的ニ inverse T^{-1} が存在スルカラ, 一般ノ stochastic process ニハ使ヘナイ。本定理ハ此ノ点及ビ Hilbert 空間ヲ離レタコトニ於テ應用範囲ガズット廣イ訳デアリマス。