



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 一次変換群ガ有限群ナルタメノ條件                                                            |
| Author(s)    | 浅野, 啓三                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1938, 164, p. 398-407                                            |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74650">https://doi.org/10.18910/74650</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 721. 一次変換群が有限群ナルタノ条件

浅野 啓三 (阪大)

複素数ヲ係数トスル一次変換群が有限群ニナルタノ条件トシテ次ノ興味アル定理が成立スル。

定理. Grad  $r$ ノ Matrix<sup>(1)</sup>ヲ Element トスル群  $G$ ガアリ,  $G$ ニ属スル各 Matrixノ Elementarteiler<sup>(2)</sup>ガ linear デアリ, (即チ各 Matrixガ Diagonalform = transform サレ),  $G$ ノ Spurノ値, 中デ相異ルモノガ有限個ヨリ存在シナイナラバ,  $G$ ハ有限群デアル。

コレハ正田教授が大島, 高橋両君ヘノ書簡ノ中デーツノ Vermutung トシテ述べラレタモノデアル。

以下ニ於テ私ハ其ノ証明ヲ試ミタイト思フ。証明ノ大体ノ方針ハ先ヅ上記定理ヲ zyklische Gr.ノ場合ニ証明シ, ツイデコレヲ次ノ Burnsideノ定理ニ帰着セシメントスルノデアツテ, コノコトハ正田教授ノ既ニ注意サレテキル所デアル。

Burnsideノ定理<sup>(3)</sup> Matrixヲ Element トス

(1) 以下 Matrixノ組成分子ハ然テ複素数トシ,  $\Delta$ ノ行列式ハ  $0$ ニナラナイモノトスル。

(2) Matrix  $A$ ノ charakteristische Matrix  $\chi E - A$ ノ Elementarteilerノコトヲ單ニ  $A$ ノ Elementarteilerト云フコトニスル。

(3) Burnside, Proc. London Math. Soc. (2) 3, 1905.

、群  $G$  の各 Element の Ordering が有限で、凡そ一定ノ数ヲ超エナイナラバ  $G$  は有限群デアル。

先づ補助定理カラ始メル。

補助定理 1.  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  ヲ  $r$  個ノ実数トシ、少クトモ一ツハ無理数デアルトスル。然レトキハ任意ノ  $\varepsilon > 0$  に対シテ 常  $= |\alpha_k x_0 - x_k| < \varepsilon$ ,  $x_0 \neq 0$ ,  $k=1, \dots, r$  に適スル整数  $(x_0, x_1, \dots, x_r)$  が存在スル。

補助定理 2.  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  ヲ  $r$  個ノ有理数トシ、 $\vee$  レテ既約分数ノ形ヲ表ハストキ、少クトモ一ツノ分母ハ正数  $M > 1$  ヲリ大デアルトスル。然レトキハ

$$|\alpha_k x_0 - x_k| < \frac{2(A+1)^{(4)}}{[\sqrt[r]{M}]} \cdot 0 < |x_0| \leq M, A = \text{Max.}(|\alpha_1|, \dots, |\alpha_r|), k=1, \dots, r,$$

ニ適合スル整数  $(x_0, x_1, \dots, x_r)$  が存在スル。(5)

(証明)  $\varepsilon$  又ハ  $\frac{2(A+1)}{[\sqrt[r]{M}]}$  が  $\geq 1$  ノ場合ハ trivial デ

アレ。ヨツテコレヲノ値ハノリ小トスル。今  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  ヲ  $r$  個ノ実数トスル。

$y_k = \alpha_k x_0 - x_k$  トオキ、 $x_0, x_1, \dots, x_r$  ノ各ヲシテ  $0, 1, \dots, N^r$  ノ値ヲ勝手ニ取ツセルト  $(y) = (y_1, \dots, y_r)$  ノ値ハ  $(N^r+1)^{r+1}$  組生ズル。即チ  $r$  次元 Euclid

(4)  $[\sqrt[r]{M}]$  ハ  $\sqrt[r]{M}$  ヲ超エサル最大ノ整数ヲ示ス。

(5) 上記補助定理ニ於テ例ヘバ  $\alpha_i$  ヲ無理数又ハ分母ガ  $M$  ヲリ大ナル有理数トスレバ明カニ  $\alpha_i x_0 - x_i \neq 0$ 。

空間 = 於ケル  $(N^r+1)^{r+1}$  個ノ点カ得ラレル。今  $|y_k| \leq N^r(A+1) =$  ヲツテ定義サレル  $r$  次元ノ立方体  $W$  ヲ  $N^{r(r+1)}$  等分スレバ  $(N^r+1)^{r+1}$  個ノ点ハ凡テ  $W$  内ニ落チ、且ツ点ノ数カ等分サレタ小立方体ノ数ヨリ多イカラ、或ル一ツノ小立方体内ニハ少クトモ二個ノ点カ落チル。コレヲ  $(y')$ ,  $(y'')$  トシ、コレニ対スル  $(x)$  ヲ夫々  $(x')$ ,  $(x'')$  トシ  $x'_k - x''_k = x_k$  トスレバ  $(x) \neq (0)$  且ツ  $y_k = \alpha_k x_0 - x_k = y'_k - y''_k$  ナレ故

$$|y_k| < \frac{2N^r(A+1)}{N^{r+1}} = \frac{2(A+1)}{N}, \quad k=1, \dots, r$$

$N$  ヲ充分大ニシテ補助定理 1 ヲ得、 $N = [\sqrt{M}]$  トシテ補助定理 2 ヲ得ル。コノデ  $x_0 \neq 0$  トナルコトハ次ノマウニシテ知ラレル。若シモ  $x_0 = 0$  トスレバ少クトモ一ツノ  $x_k \neq 0$  ナアルカラ

$$1 \leq |\alpha_k x_0 - x_k| = |x_k| < 1$$

トナツテ矛盾ヲ生ズル。

補助定理 3.  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  ヲ任意値ノ  $r$  個ノ複素数トスル。  $Z_n = \alpha_1^n + \dots + \alpha_r^n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) トスルトキ、 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  ノ中少クトモ一ツカノ置根ガナケレバ  $Z_0 = r$  ハ集合  $\{Z_n\}$  ノ集積点デアアル。(従ツテ  $\{Z_n\}$  ハ無限集合)

(証明)  $\alpha_k = e^{2\pi i \alpha_k}$  トオケベ  $\alpha_k^n = e^{2\pi i n \alpha_k}$ .  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  ハ絶対値 1 ヨリ小ノ実数デ、少クトモ一ツハ無理数デアアル、補助定理 1 = ヲリ  $\delta > 0$  = 對シ

$|\alpha_k n_0 - n_k| < \frac{\delta}{2\pi} (n_0 \neq 0)$  とする整数  $n_0, n_1, \dots, n_r$  が存在するから

$$|z_k^{n_0} - 1| = |e^{2\pi i(\alpha_k n_0 - n_k)} - 1| < \delta \left( \sum_1 \frac{\delta^{n_1}}{n_1!} \right)$$

$\delta$  を充分小さくすれば,  $\varepsilon > 0$  を任意に與へると

$$|Z_{n_0} - Z_0| \leq \sum_k |z_k^{n_0} - 1| < r\delta \left( \sum_1 \frac{\delta^{n_1}}{n_1!} \right) < \varepsilon$$

且つ  $z_1^{n_0}, \dots, z_r^{n_0}$  の少くとも一つは  $1$  に等しくなひ、  
 $Z_{n_0} \neq Z_0$ .

補助定理 4.  $z_1, \dots, z_r$  を  $r$  個の  $0$  ではない複素数とし  $Z_n = z_1^n + \dots + z_r^n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) とする. 集合  $\{Z_n\}$  が有界ならば  $|z_k| = 1$  ( $k = 1, \dots, r$ )

(証明)  $z_k = |z_k| z'_k, |z'_k| = 1$ . 補助定理 3 =  $\exists$   $n_1 < n_2 < \dots \rightarrow \infty, z_k'^{n_\nu} \rightarrow 1$  ( $k = 1, \dots, r$ ) とする正の整数の Folge  $\{n_\nu\}$  が取れる. よつて  $|z_k|$  の中  $1$  より大であるものがあれば  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} Z_{n_\nu} = \infty$ .  $|z_k|$  の中  $1$  より小であるものがあれば Exponent を考へればよい.

補助定理 5. Ordnung が有限な grad  $r$  の Matrix の Element とする群  $G$  が無限群ならば Einheitsmatrix  $E$  の Spur  $S_p(E) = r$  の  $G$  の Spur の値の集合  $S_p(G)$  の集積点がある. (従つて  $S_p(G)$  は無限集合).

(証明) Burnside の定理 =  $\exists$   $G$  の元  $g$  の Ord-

$n$ ung は有界でハナイカラ  $M > 0$  を任意 = 大ナル正数ト  
 スルトキ  $Ordnung$  が  $M^r$  より大ナル  $Matrix$   $A$  が存  
 在スル.  $A$  の  $Normalform$  を  $\begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_r \end{pmatrix}$  トスレバ  
 $\omega_1, \dots, \omega_r$  は 1 の 冪根デ,  $\omega$  の  $Ordnung$  を夫々  
 $m_1, \dots, m_r$  トスレバ,  $\omega_k^{m_k} = 1$ ,  $A$  の  $Ordnung$   
 $m$  は  $m_1, \dots, m_r$  の 最小公倍数デアル. ヨツテ  $m_1, \dots$   
 $\dots m_r \leq m > M^r$ . 故 =  $\max_{1 \leq k \leq r} (m_k) > M$ .  $\omega_k = e^{2\pi i \alpha_k}$ ,  
 $|\alpha_k| < 1$ ,  $k = 1, \dots, r$  トオケバ  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  は有理  
 数デ,  $\omega$  の中少クトモ一ツ例ハバ  $\alpha_1$  は (既約分数デ表ハシ  
 ヲ場合, ) 分母が  $M$  より大デアル. ヨツテ補助定理 3 =  
 ヨリ

$$|\alpha_k n_0 - n_k| < \frac{4}{\lfloor \sqrt{M} \rfloor}, \quad 0 < |n_0| \leq M, \quad k = 1, \dots, r$$

= 適スル 整数  $n_0, n_1, \dots, n_r$  が存在スル. 前ト同様 =

$$\begin{aligned}
 |S_p(A^{n_0}) - S_p(E)| &= |\omega_1^{n_0} + \dots + \omega_r^{n_0} - r| \\
 &\leq \sum_{k=1}^r |\omega_k^{n_0} - 1| < r \delta \left( \sum_i \frac{\delta^{\pi-1}}{\pi!} \right), \quad \delta = \frac{\delta \pi}{\lfloor \sqrt{M} \rfloor}
 \end{aligned}$$

$M$  を 充分大 = トレバ, 任意 = 小ナル  $\varepsilon > 0$  = 對シテ  $|S_p(A^{n_0}) - S_p(E)| < \varepsilon$ . 又  $0 < |\alpha_1 n_0 - n_1| < 1$  デアルカラ  
 $\omega_1^{n_0} = e^{2\pi i (n_0 \alpha_1 - n_1)} \neq 1$ . 故 =  $S_p(A^{n_0}) \neq S_p(E)$ . 即チ  
 $S_p(E)$  は  $S_p(y)$  の 集積点デアル.

以上ノ補助定理ヲ用ヒテ我々ノ定理ハ今少シ一歩ナル  
 次ノ形デ容易 = 証明サレヌ.

定理: of Grad  $r$  Matrix 7 Element ト

スル群トシ、コレ=関シテ次ノ條件が成立スルモノトスル。

1.  $\phi_f$  = 属スル各 Matrix, Elementarteiler ハ linear デアル。
2.  $\phi_f$ , Spur ノ 値, 集合  $S_p(\phi_f)$  ハ beschränkt デアル。
3.  $S_p(E) = r$  ハ  $S_p(\phi_f)$  ノ 孤立点 デアル。

然ルトキ  $\phi_f$  ハ有限群デアル。

(証明)  $\phi_f$  が *unendliche Ordnung* ノ 元  $A$  有  
スレバ,  $\lambda$  ノ *Eigenwert* ヲ  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  トスルトキ  
 $S_p(A^x) = \lambda_1^x + \dots + \lambda_r^x$  デアルカラ補助定理 4 = コリ  
 $|\lambda_k| = 1$  ( $k=1, \dots, r$ ) デアリ, 又  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  ノ 中  
少クトモ一ツ  $\lambda$  ノ 冪根デハアリ得 + イカラ補助定理 3 = コ  
リ  $S_p(A^x)$  ハ  $S_p(E) = r$  = 乗積スル。ヨツテ  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$   
ハ凡テ 1 ノ 冪根デナケレバナラナイ。即チ各 Matrix ノ  
*Ordnung* ハ有限デアル。

又 =  $\phi_f$  が有限群デナケレバ補助定理 5 = コリ  $S_p(E)$  が  
 $S_p(\phi_f)$  ノ 乗積点 = ナツテ假定 = 及スル。故 =  $\phi_f$  ハ有限群  
此ノ 定理ノ 特別ノ 場合トシテ

定理 (E. Cartan)<sup>(6)</sup> *unitäre Matrix* ノ *Element*

- 
- (6) E. Cartan, *Comptes Rendus*, 198 (1934), p. 1742.  
Cartan ハ コノ 定理ヲ *continuous gr.* ノ 理論ヲ 應  
用シテ 簡潔 = 証明シク。尚次ノ 定理モ コノ 方法 = ヨツテ  
証明サレル。

トスル群の一族  $S_p(E)$  が  $S_p(\mathcal{O})$  の孤立点 + レベのハ有限群デアル。

(証明) unitäre Matrix, Elementarteiler  
ハ linear デアリ.  $\lambda$  の Eigenwert, 絶対値ハ 1 =  
等シイ、故ニ  $S_p(E)$  の絶対値ハ Matrix, grad  $p$  超  
エナイ。

定理. Matrix の Element トスル群のハ  
kompakt デ且  $S_p(E)$  が  $S_p(\mathcal{O})$  の孤立点 + レベのハ  
有限群デアル。

定理. Matrix の Element トスル群のハ  
beschränkt デ且  $S_p(E)$  が  $S_p(\mathcal{O})$  の孤立点 + レベのハ  
有限群デアル。

(証明) 
$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & 1 & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + F, \quad F^{p-1} \neq 0, \quad F^p = 0.$$

$$(\lambda E + F)^n = \lambda^n E + \binom{n}{1} \lambda^{n-1} F + \binom{n}{2} \lambda^{n-2} F^2 + \dots$$

( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

ヨリ  $\mathcal{O}$  のハ kompakt スハ beschränkt + ルタ  $\lambda =$   
ハ各 Matrix, Elementarteiler ハ linear デ且ツ  
Eigenwert, 絶対値ハ 1 = + ラ + ヲレベ + ラ + イコト  
ハ容易ニワカル。

定理 (A. Weil).<sup>(11)</sup> Matrix の Element トスル

(11) A. Weil, Comptes Rendus, 199 (1934), p. 180.

群理論の abstract gr. の表現 (Darstellung) と  
 考へコレヲ  $\mathbb{D}$  トスル。  $\mathbb{D}$  が有限群ヲナスタメ必要且ツ充  
 分ノ条件ハ適當ノ整係数ノ Polynom  $f(x) = \text{ツイテ}$   
 $f(\mathbb{D}) \sim 0$  ナル關係ガ成立スルコトアル。

( $f(\mathbb{D}) \sim 0$  / 意味ハ次ノ通り。先ツ  $\mathbb{D}^n$  ハ  $\overbrace{\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \dots \times \mathbb{D}}^{n\text{-mal}}$   
 ナル Kronecker / Produkt トスル。ニツ以上ノ表現  
 ノ和ハコレヲノ表現ヲ diagonal  $\rightarrow$  ナラベテ作ツテ表現  
 トスル。然ラベテ  $\mathbb{Z}$  / 整数ヲ係数トスル Polynom  $f(x) =$   
 對シテ  $f(\mathbb{D})$  ナル表現ガ定義サレル。

次ニ  $f(x)$  ヲ任意ノ整係数ノ Polynom トシ pos. term  
 ヲ棄メテ出来タ Polynom  $f_1(x)$ , negative term  
 ヲ棄メテ出来タ Polynom  $f_2(x)$  トスル;  $f = f_1 - f_2$ .  
 $f_1(\mathbb{D})$  ト  $f_2(\mathbb{D})$  ガ同値表現ヲ作ル場合 ( $f_1(\mathbb{D}) \sim f_2(\mathbb{D})$ )  
 $f(\mathbb{D}) \sim 0$  ト書ク.)

(証明) 定理ノ條件ガ必要ナコトハ有限群ニ關スル表現  
 論カラ容易ニ結論サレル。次ニ充分ナコトノ証明。  $\mathbb{D} = \gamma$   
 ナスル Matrix  $A$  / Spur ハ明カニ  $f(S_p(A)) = 0$  ナ  
 ル關係ヲ満足スルカラ  $S_p(A)$  / 中相異ル  $\epsilon$  / ハ有限個ヨリ  
 存在シナイ。アトハ  $A$  / Elementarteiler ガ linear =  
 ナルコトガ云ヘレバヨイ。

$x E - A$  / Elementarteiler  $f(x - \lambda_k)^{p_k}$  ( $k =$   
 $1, \dots, m$ ) ; シ Exponent  $p_k$  / Max.  $\rightarrow p$  トシ、今  
 $p > 1$  トスル。  $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$  トオキ  $f_1(\mathbb{D}) \sim$   
 $f_2(\mathbb{D})$  ナル  $\epsilon$  / トスル。又  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  / Grad  $\rightarrow$  夫

$n_1, n_2 (n_1 > n_2)$  トスル。

然ラバ  $f_1(\mathbb{D}), f_2(\mathbb{D}) =$  於テ Matrix  $A =$  對角スル Matrix / Elementarteiler / Exponent / Max. ハ夫々  $n_1(p-1)+1, n_2(p-1)+1$  トナルコトハ \* / lemma カラ容易ニ得ラレル。然ラバ  $n_1(p-1)+1 + n_2(p-1)+1$  トナツテ矛盾ヲ生ズル。

lemma. Matrix  $A, B$  / Minimal Polynom カ夫々  $(x-\lambda)^p, (x-\mu)^q (\lambda, \mu \neq 0)$  ナアルトスレバ Kronecker / 積  $A \times B$  / Minimal polynom ハ  $(x-\lambda\mu)^{p+q-1}$  ナアル。

(証明)  $A = \lambda E + F; B = \mu E_1 + F_1$  ( $E, E_1$  ハ單位行列) トオケバ  $F, F_1$  ハ nilpotent ナ夫々  $p$  又ハ  $q$  乗シテ始メテ  $0$  ナル。

$$A \times B = \lambda \mu E \times E_1 + \mu F \times E_1 + \lambda E \times F_1 + F \times F_1,$$

( $E \times E_1$  ハ單位行列)

$$(A \times B - \lambda \mu E \times E_1)^{p+q-1} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=p+q-1} \frac{(p+q-1)!}{\alpha! \beta! \gamma!} \mu^\alpha \lambda^\beta F^{\alpha+\gamma} \times F_1^{\beta+\gamma}$$

$= 0$

$$(A \times B - \lambda \mu E \times E_1)^{p+q-2} = F^{p-1} \times F_1^{q-1} \neq 0$$

[補遺] 原稿作成後氣はイタコトデスハ補助定理 1, 2 ヲ導クノニ用ヒタ証明法ニハマダイ所ガアツテ, ソレダテ結果モ良クナイヲケデ, 此ノ毎次ノ様ニマツタ方がヨカツタ次第デス。

$\alpha_1, \dots, \alpha_r$  ヲ  $r$  個ノ實数トシ,  $M > 1$  ヲ任意ノ正数トスルトキ  $|\alpha_k x_0 - \alpha_k| < \frac{1}{[rM]}$ ,  $0 < x_0 \leq M$ ,  $k=1, \dots, r$ .

=適スル整数  $(x_0, x_1, \dots, x_r)$  が存在スル。

(証明)  $x_0 = 0, 1, \dots, N^r$  ( $N = [\sqrt[r]{M}]$ ) +ル  $N^{r+1}$  個ノ値ヲ與ヘ  $x_k = [\alpha_k x_0]$  トスレバ  $0 \leq \alpha_k x_0 - x_k < 1$ ,  $y_k = \alpha_k x_0 - x_k$  トスレバ  $(N^{r+1})$  個ノ点  $(y) = (y_1, \dots, y_r)$  ハ原点ヲ頂点トスル單位立方体  $W$  ノ中ニ落チル  $W$  ヲ切リ、長サ  $\frac{1}{N}$  ノ小立方体  $= N^r$  等分スレバ (境界点ハ  $a \leq y_k < b$  +ル如クトル) シテトモ一ツ  $= 1$  個ノ点ガ落チル。ソレヲ  $(y'), (y'')$ , ソレニ對スル  $(x) \neq (x'), (x'')$  トシ  $x_k = x'_k - x''_k$  トスレバ  $(x) \neq 0$ . 且  $\alpha_k x_0 - x_k = y'_k - y''_k$  デアルカラ  $|\alpha_k x_0 - x_k| < \frac{1}{N}$ . コノデ  $x_0$  ハ 0ニナラナイ。從ツテ正トシテモヨイ。

實際ハ  $|\alpha_k x_0 - x_k| < \frac{1}{[ \sqrt[r]{M} ]}$  ハ  $|\alpha_k x_0 - x_k| < \frac{1}{\sqrt[r]{M}}$  デオキカヘラレルノデアリ、ソレハ Minkowskiノ定理ノ特殊ノ場合トシテ得ラレル事項デアツタ。