OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Kompaktum ノ Sphäreへノ Abbildungニツイテ
Author(s)	坂田, 良次
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 165, p. 408-423
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74651
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

722. Kompaktum ノ Sphäre ヘノ Abbildung ニツイテ

坂田　良次（阪大）

Kompaktum R ノ次元ト Sphäre S^n ヘノ stetige Abbildung トノ関係トシテ Alexandroff-Hurewicz ノ定理ガ知ラレテイル。

（Alexandroff-Hurewicz ノ定理）[1]

$\dim R \leqq n$ トルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ任意ノ閉集合 $A \subset R$ ノ S^n ヘノ stetige Abbildung ガ R ノ S^n ヘノソレニ erweitern デキルコトデアル。

Borsuk ハコノ定理ノ必要條件ノ方ヲ擴張シテ次ノ定理ヲ得テイル。

---

1) P. Alexandroff: Dimensionstheorie 1. Hauptsatz (Math. Ann. 106)

W. Hurewicz: Über Abbildungen topologischer Räume auf die n-dimensionale Sphäre (Fund. Math. 24)

Hurewicz ハ必要條件ノ時ニハ R ガ Kompaktum デアルコトヲ必ズシモ必要トシナイコト，即チ metrisierbar, separabel デヨイコトヲ示シタ。

(Borsuk ; 定理)[2]

Kompaktum R が $\dim R \leqq n$ ナラバ任意ノ閉集合 $A \subset R$ ノ S_k ヘノ stetige Abbildung f ニ對シテ閉集合 $E \subset R-A$ ガアッテ $\dim E < n-k$ デアリ f ハ $R-E$ ノ S_k ヘノ Abbildung ニ擴張デキル。($k=0, 1, \cdots\cdots$)

---

2) K. Borsuk: Un théorème sur les prolongements des transformations (Fund. Math. 29)

コノ場合モ R ハ metrisierbar, separabel デ充分デアル。實際ハ Borsuk ハ遙カニ一般ナ定理ヲ証明シテイルケレドモ、コゝデハ証明ハノベナイ。唯コノ定理ハソレ自身トシテヨリハ例ヘバ Borsuk ノ Homologietypenklasse ノ理論デ重要デアルト思ハレルノデ結果ダケカイテオキマス。(Homologie typenklasse ニツイテハ: Borsuk: Sur les groupes des classes de transformations continues (C. R. 202)).

$m+1$ 次元 Kugel ヲ Q_{m+1}, ソノ Sphäre ヲ S_m トスル。

X ノ各点 $x \in X$ ニ於テスベテノ近傍 $U(x)$ ニ對シテ適當ナ近傍 $V(x)$ ガアッテ $S_m \xrightarrow{f} V(x)$ ガ常ニ $Q_{m+1} \xrightarrow{f^*} U(x)$ ニ erweitern デキルトキ X ハ localement connexe en dimension m トイフ。

又 $\mathfrak{S}^m \xrightarrow{f} M$ ガスベテ $Q_{m+1} \xrightarrow{f^*} M$ ニ erweitern デキルトキ connexe en dimension m トイフ。

(Borsuk ノ定理)

X, Y metrisierbar ノ separabel
Y ハソノ上 localement connexe en dimensions $< n$, connexe en dimensions $< k$
$X_0 \subset X$ ハ $\dim(X-X_0) \leqq n$ ノ閉集合 ——— 次頁ヘツヅク。

コンデハ Hurewicz ノ方法ヲツカッテ Borsuk ノ定理ノ紹介ヲカネテ逆モ成立スルコトヲ述ベテミタイト思ヒマス。[3]

§1.

(Hauptsatz) Kompaktum R が $\dim R \leqq n$ ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ任意ノ閉集合 $A \subset R$ ニ於ケル $A \xrightarrow{f} S_k$ ガ $R-E \xrightarrow{f^*} S_k$ = erweitern デキルコトデアル。但シ $E \subset R-A$ ハ R ノ閉集合デ $\dim$ 三 $n-k$

n 次元ユークリッド空間 E_n ヘノ R ノ stetige Abbildung ノ全体ヲ $\mathfrak{F}_n(R)$ $(n=0,1,2,\cdots\cdots)$, E_n ノ原点 $P=(0,0,\cdots\cdots 0)$ トシ P ヲ Bild ニモツ R ノ集合ガ $\dim \underset{x\in R}{E}[f(x)=P] \leqq m$ ナル Abbildung f ノ集合ヲ $\mathfrak{F}_n^m(R) \subset \mathfrak{F}_n(R)$ デ表ハス。

Kompaktum R ニ對シテ

I. $\dim R \leqq n$

(脚註2ノツヅキ)

ソノトキ $X_0 \xrightarrow{f} Y$ ニ對シテ $\dim E < n-k$ ノ閉集合 $E \subset X-X_0$ ガアッテ

f ハ $X-E \xrightarrow{f^*} Y$ = erweitern デキル。

3) リノ Hurewicz ノ論文ハ $k=n$ ノ場合デ、コノ論文全体ヲ拡張シタ形デ紹介スルコトニナリマス。

ユークリッド空間ヘノ Abbildung ヲ Hilfsmittel トシテツカフ方法デアリマス。

II. R ノ任意ノ閉集合 A ニ於ケル $f \in S_k^{A}$ [4] ガ常ニ $f^* \in S_k^{R-E} = erweitern$ デキル。但シ $E \subset R-A$ ハ R ノ閉集合デ $\dim E < n-k$ $(k=0,1,\cdots\cdots)$

III. $\mathfrak{F}_k(R)$ ニ於テ $\mathfrak{F}_k^{n-k}(R)$ ガ dicht デアル。($k=0,1,\cdots\cdots$) ガ äquivalent デアルコトヲ次ノ順序デ証明スル。

I → II, II → III } (§2) コンデハ R ハ metrisierbar, separabel ト仮定シテ証明スル。[5]

III → I (§3) Abbildungsraum ト若ヘテ mengentheoretisch ナ問題ニ帰着サセル。

---

4) X^Y ハ Y ノ X ヘノ stetige Abbildung ノ全体カラデキル Abbildungsraum。

Abbildungsraum ニツイテハ §2 ヲミテイタダキタイ。

5) R ガ Kompaktum ノトキハ I → III ガモット精密ニワカッテイル：原点ヲカリデナク各点 p ノ Urbild ノ集合 $E_{x \in R}[f(x)=p]$ ノ次元カ $\leq n-k$ ナル Abbildung ガ $\mathfrak{F}_k(R)$ ヲ dicht デアル。(Hurewicz: über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmenge Cartesischer Räume (Sitzungsber Preussischen Akad. 34)) R ガ metrisierbar separabel ノトキニモ成立スルカモシレナイケレドモマダワカッテオラナイ。

コレヲツカヘバ I → II ハ非常ニ簡単デアル：Q_{k+1} ヲ半径1ノ $k+1$ 次元 Kugel S_k タソノ Sphäre トスル。

$f \in S_k^A$ ヲ erweitern シテ $f' \in Q_{k+1}^R$ トシ上ノ結果ノ証明ノ仕方カラ A デ $f(x)=f'(x)=f''(x)$ デ (次頁ヘツヅク)

§2.

Lemma 1. R metrisch, Separabel $A, A_i \subset R$ 閉集合 $(i=1,2)$ $A=A_1+A_2$, $\dim(R-A)\leqq n$ トスル。

ソウスレバ $R_i \supset A_i$, $R_1+R_2=R$, $\dim(R_1\cdot R_2-A_1\cdot A_2)\leqq n-1$ ナル閉集合が存在スル。

証明 $G_1=\underset{x}{E}\left[\rho(x,A_1)<\frac{1}{2}\rho(x,A_2)\,;\ x\in R\right]$

$G_2=\underset{x}{E}\left[\rho(x,A_2)<\frac{1}{2}\rho(x,A_2)\,;\ x\in R\right]$

トスレバ

$$G_1\supset A_1-A_1\cdot A_2$$

$$G_2\supset A_2-A_1\cdot A_2$$

$$\overline{G_1}\cdot\overline{G_2}\subset A_1\cdot A_2$$

$\overline{G_1}-A_1$, $\overline{G_2}-A_2$ ハ離レタ $R-A$ ノ中ノ閉集合デ $\dim(R-A)\leqq n$ ダカラ コレヲ高々 $n-1$ 次元ノ閉集合デ分ケルコトガデキル。

即チ $R-A=$ 於ケル閉集合 B_1, B_2 ガ存在シテ

$$R-A=B_1+B_2,\quad B_1G_2=B_2G_1=0,\quad \dim B_1,B_2\leqq n-1.$$

(脚註ヲハブク)

$\dim\underset{x\in R}{E}\left[f''(x)=P\right]<n-k$. $x\in Q_{k+1}-S_k$ ナル Abbildung f'' ガ存在スル。

今 $E=\underset{x}{E}\left[f''(x)=P\right]$ トスレバ $\dim E<n-k$.

$f^*(x)=\frac{f''(x)}{|f''(x)|}$ $x\in X-E$ トオケバ $f^*\in S_k^{X-E}$ ハ f ノ $\mathcal{E}$-weiterung ニナッテイル。(証明了)

ヨッテ

$$R_1 = B_1 + A_1, \quad R_2 = B_2 + A_2$$

トオケバ、R_1, R_2 ハ求ムル閉集合トナル。　（証明了）

I → II ハ次ノ Borsuk ノ定理ヲ証明スレバ充分デアル。

（Borsuk ノ定理）[5]

R metr. sep. $A \subset R$ 閉集合 $\dim(R-A) \leq n$ ナラバ $f \in S_k^A$ ニ對シテ $E \subset R-A$, $\dim E < n-k$ ナル閉集合 E ガアッテ f ハ $f^* \in S_k^{X-E}$ = erweitern デキル。（$k = 0, 1, \cdots\cdots$）（$n \leq k$ ノトキハ E ハ空集合ト考ヘル）

証明。k ニツイテノ Induktion.

1) $k = 0$　S_0 ハ二点 P_1, P_2 デアル。

$A_i = \underset{x \in A}{E}[f(x) = P_i]$ トオケバ離レタ閉集合。

$A = A_1 + A_2$　假定ヨリ $\dim(R-A) \leq n$

∴ Lemma 1 ニヨッテ $R_i > A_i$ $\dim R_1 R_2 \leq n-1$ ナル閉集合 R_i ガアル。

$E = R_1 R_2$　$f^*(x) = P_i$ $(x \in R_i - E)$

トオケバ f^* ハ求メル f ノ Erweiterung デアル。

2) $k' < k$ デ成立スルモノトスル。

S_k ヲ Hemisphäre Y_1, Y_2 ニワケル。

$Y_1 \cdot Y_2 = S_{k-1}$

$A_i = \underset{x \in A}{E}[f(x) \in Y_i]$ トオケバ 閉集合デ

$A = A_1 + A_2$, $\dim(R-A) \leq n$ トカラ Lemma 1 ニヨリ閉集合。

$R_i \supset A_i$ ガアッテ $\dim(R_1 \cdot R_2 - A_1 A_2) \leqq n-1$

$A_1 \cdot A_2$ ノ上ガケデ考ヘレバ f ハ $A_1 A_2 \xrightarrow{f} S_{k-1}$

Induktion ノ假定ニヨッテ R_1, R_2 ノ閉集合 E.

$E \subset R_1 \cdot R_2 - A_1 \cdot A_2$ $\dim E < (n-1)-(k-1) = n-k$

ガアッテ $\overline{f} \in S_{k-1}^{R_1 R_2 - E}$ = erweitern デキル。

$B_i = R_i + (R_1 R_2 - E)$ ハ $R_i - E$ ノ開集合.

$\therefore$ $R_i - E \xrightarrow{f_i} Y_i$ ヘ erweitern デキル。

E ハ R_1, R_2 ノ閉集合ダカラ勿論 R ノ閉集合.

$$f^*(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in R_1 - E \\ f_2(x) & x \in R_2 - E \end{cases}$$

トオケバ $f^* \in S_k^{X-E}$ ハ求ムルモノデアル。

—— 証明了 ——

P ヲ topologischer Raum, Q ヲ Kompraktum トスル。

$P \xrightarrow{f} Q$ stetige Abbildung ノ全体 Q^P ハ Abbildungsraum ト考ヘテ Metrik ハ

$$\rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in P} d(f_1(x), f_2(x)), \quad f_1, f_2 \in Q^P$$

デ與ヘラレル。[6]

Q^P ニ関シテハ beschränkt デ vollständig デアルコトガ容易ニワカル. (P, Q metr. デ Q ハ vollständig ナラ Q^P モ vollständig テ容易) 念ノタメニ Q デノ Metrik ヲ d デ表ハス。

---

6) Alexandroff-Hopf: Topologie I. Erster Teil.

$f_1, f_2 \in Q^P \quad \rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in P} d(f_1(x), f_2(x)) \leqq \sup_{x,y \in Q} d(x,y)$
$= \delta(Q)$

又 $f_n \in Q^P \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots)$

$$\lim_{n_i, n_j \to \infty} \rho(f_{n_i}, f_{n_j}) = 0 \quad \text{トスレバ}$$

スベテノ $x \in P$ ニ對シテ

$$\lim_{n_i, n_j \to \infty} d(f_{n_i}(x), f_{n_j}(x)) = 0$$

Q ハ Kompaktum デアッタカラ

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \in Q$$

$$d(f(x), f_n(x)) \leqq \sup_{m > n} d(f_m(x), f_n(x)) \leqq \sup_{m > n} \rho(f_m, f_n)$$

假定ニヨリ

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{m > n} \rho(f_m, f_n) = 0$$

f_n ハ gleichmässig ニ f ニ收斂スルカラ f モ stetige デ $f \in Q^P$. シカモ $\lim_{n \to \infty} \rho(f, f_n) = 0$ 故ニ Q^P ハ vollständig, Lemma 2. P モ Kompaktum トスレバ Q^P ガ separabel デアル。

証明: Q ヘノ P ノ Abbildung 全体[7](連続デナイモノモヒックルメテ)ヲ Γ デ表ハス。$Q^P \subset \Gamma$. Γ ノ Metrik ハ前ト同様ニ定義スル。

---

7) コノ Lemma ノ証明ガハ Abbildung ト唯云ッタダケデハ stetig デナイモノモ予想シテイル。コレ以外ノ所ガハ Abbildung ハスベテ stetige ナモノバカリヲ考ヘル。

P ノ Basis ヲ $\{R_i\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots)$ トスル。

$$P \subset R_{n_1}+R_{n_2}+\cdots\cdots+R_{n_k}$$

トルヤウナ有限ノ *Überdeckung* = 対シテ $(n_1, n_2, \cdots\cdots n_k)$ ヲ対応サセレバカニル集合 $\Sigma \underset{def}{=} \{(n_1, n_2, \cdots\cdots n_k)\}$ ハ可附番個デアル。

$\alpha=(n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k)$ =対シテ

$$S_\alpha^{(1)}=R_{n_1},\ S_\alpha^{(2)}=R_{n_2}-R_{n_1},\ \cdots\cdots,\ S_\alpha^{(k)}=$$

$$R_{n_k}-R_{n_1}-\cdots\cdots-R_{n_{k-1}}$$

ヲツクレバ *disjunkt* ナ集合ニナル。

Q = 於テ *dicht* ナ集合ヲ D トシ, Γ_α ヲ各 $S_\alpha^{(i)}(i=1, 2, \cdots\cdots k)$ デハ (D = 属スル) 同ジ値ヲトル $P \xrightarrow{\pm} D$ ナル *Abbildung* ノ全体トスル。

Γ_α ハ明ラカニ可附番個、従ッテ $\Gamma_\Sigma \underset{def}{=} \sum_{\alpha\in\Sigma} \Gamma_\alpha$ モ亦可附番個デアル。$Q^P \subset \overline{\Gamma_\Sigma}$ ヲイヘバ充分デアル。(Γ モ *metrischer Raum*!)

$g \in Q^P$, $\varepsilon>0$ ガ与ヘラレタトスル。

$$G_x = \underset{y}{E}\left[\alpha(g(x), g(y)) < \frac{\varepsilon}{2}\right] \qquad x \in P$$

ハ P ノ開集合。各点 $x \in P$ =対シテ $x \in R_{n(x)} \subset G_x$ ヲツクレバ P ガ *Kompaktum* デアルコトカラ有限個ノ *Überdeckung* ガツクレル。ソレ=対応シテ $\alpha=\left(n(x_1), n(x_2), \cdots\cdots n(x_m)\right) \in \Sigma$.

D ハ Q デ *dicht* デアッタカラ a_i ガアッテ

$$d(a_i, g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad a_i \in D$$

$f(x) = a_i$, $x \in S_\alpha^{(i)}$ デ定義サレタ Abbildung ハ Γ_Σ ニ属シ，$x \in P$ ニ対シテ

$$d(f(x), g(x)) \leqq d(a_i, g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) < \varepsilon$$

故ニ Γ ニ於ケル f, g ノ距離

$$\rho_P(f, g) = \sup_{x \in P} d(f(x), g(x)) \leqq \varepsilon$$

—— 証明了 ——

<u>II → III</u> モ metrisierbar, separabel ノトキノ証明ヲスル。

定理[5] 1. R met. sep. $\dim M \leqq n$ ナラバ $\mathcal{F}_k^{n-k}(R)$ ハ $\mathcal{F}_k(R)$ デ dicht デアル。

証明: 任意ノ $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{F}_k(R)$ ニ対シテ

$\dim E[f'(x) = P] \leqq n-k$ （P ハ k 次元ユークリッド空間ノ原点）

$$\rho(f(x), f'(x)) \leqq \varepsilon \qquad x \in M$$

ナル f' ($\in \mathcal{F}_k^{n-k}(R)$) ガアルコトヲイヘバヨイ。

$$Q_k = \underset{x}{E}\left(\rho(x, P) \leqq \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad S_{k-1} = \underset{x}{E}\left[\rho(x, P) = \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$X = \underset{x}{E}[f(x) \in Q_k], \qquad X_0 = \underset{x}{E}[f(x) \in S_{k-1}]$$

トオケバ Borsuk ノ定理カラ

X ノ閉集合 $E \subset X - X_0$, $\dim E \leqq n-k$

ガアリ X_0 デ考ヘタ f ハ

$$f^* \in S_{k-1}^{X-E}$$

ニ erweitern デキル。

$$f'(x)=\begin{cases} f(x) & x\in R-X \\ \dfrac{\rho(x,E)}{\rho(x,E)+\rho(x,X_0)}\cdot f^{*}(x) & x\in X-E \\ 0 & x\in E \end{cases}$$

トスレバ $f'\in \mathfrak{F}_k^{n-k}(R)$ デ $\rho(f,f')\leqq\varepsilon$

——— 証明了 ———

§3.

Lemma 3. A, B *metr. vollständig, separabel* } トスル。
$A\times B$ *Cartesisches Produkt*

$M\subset A\times B$ ガ G_δ デ $A\times B$ デ *dicht* ナラベ A デ *dicht* ナ $N\subset A$ ガ存在シテスベテノ $a\in N$ = 對シテ $(a,x)\in M$ ナル x ノ集合ガ B デ *dicht* = ナル。

証明: B ノ *Basis* ヲ R_i $(i=1,2,\cdots\cdots)$

$$M=\prod_{i=1}^{\infty} O_i \quad (O_i \text{ offen}) \quad O_i\supset M \text{ ダカラ } dicht.$$

$(a,Y_n)\subset O_i$ ナル $Y_n\in R_n$ ガ少クトモ一ツ存在スル $a\in A$ ノ集合ヲ E_{n_i} トスル。O_i ハ *offen* ダカラ a ノ充分小サイ近傍ガ E_{n_i} ニ屬シ、從ッテ E_{n_i} ハ *offen* デアル。

又 O_i ハ *dicht* ダカラ E_{n_i} ハ A デ *dicht*。Baire ノ

---

8) $A\times B$ ハ $c=(a,b)$ $a\in A$, $b\in B$ ナル *Paar* ノ集合全体デ *Metrik* ハ $\rho(c_1,c_2)=\sqrt{\rho^2(a_1,a_2)+\rho^2(b_1,b_2)}$ ト定義スル。

Vicitigkeitssatz[9] = ヨッテ $\prod_{i=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty} E_{ni} = N \subset A$ デ dicht。 従ッテ N ノ各点 x = 対シテ $(x, y) \subset O_i$ トル y ノ集合 G_i ハ B デ offen デ dicht.

モウ一度上ノ定理ヲ ツカヘバ $G=\prod_{i=1}^{\infty} G_i$ ハ B デ dicht.

ソレ故= $N \subset A$ ガ A デ dicht デ $(a, x) \in M$. $a \in N$ トル x ノ集合 G ハ B デ dicht. — 証明了 —

$\mathfrak{F}_n(R)$ ヲ唯ノヤウニ Kompaktum R ノ n 次元ユークリッド空間 E_n ヘノ Abbildung 全体トスル。明ラカニ

$\mathfrak{F}_n(R)$ ハ Cartesisches Product $\mathfrak{F}_m(R) \times \mathfrak{F}_{n-m}(R)$ ト若ヘラレル。

E_n ノ原点 P ノ f ニヨル Urbild ヲ $\underset{x}{E}[f(x)=P]$ トスルトキ $\mathfrak{F}^m_{n\varepsilon}(R)$ ヲ m+1 次元ノ Urysohn ノ Konstante[10] $d_{m+1}\underset{x}{E}[f(x)=P] < \varepsilon$ トルヤウナ Abbildung 全体トスル。

$$\mathfrak{F}^m_{n\varepsilon} \subset \mathfrak{F}_n(R)$$

---

9) R が vollständig metr. トラバ R ニ於ケル dicht デ offen ナ集合ノ高々可附番個ノ Durchschnitt モホ R デ dicht. (Alexandroff-Hopf. S. 108)

10) (= coefficient d'aplatissement de dimension m+1, 集合 M ニ対シテ $d_{m+1}(M)$ ハ M ノ有限個ノ開集合ニヨル η-überdeckung デドノ m+2 個ニ Durchschnitt ガ ナイヤウナ η ノ untere Grenze.

M が Kompaktum ノトキハ $\dim M \leqq n$ トルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ $d_{m+1}(M)=0$ (Urysohn: Sur les multiplicités Cantoriennes (Fund. Math. 8))

Urysohn ノ Konstante ノ性質カラ明ラカニ

$$\mathfrak{F}_n^m(R) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{n\frac{1}{\nu}}^m$$

$\mathfrak{F}_{n\varepsilon}^m(R)$ ガ $\mathfrak{F}_n(R)$ デ offen ニナルコト従ッテ $\mathfrak{F}_n^m(R)$ ハ G_δ ニナルコトヲ証明スル。

先ヅ $d_{m+1} \underset{x}{E}[f(x)=P] < \varepsilon$ ナラバ充分小サナ δ ニ対シテ $d_{m+1} \underset{x}{E}[f(x) \in K_\delta] < \varepsilon$ ナル。（但シ K_δ ハ radius δ デ中心ヲPトスル Kugel）

何故ナラバ $E[f(x)=P]$ ハ閉集合デ $d_{m+1} \underset{x}{E}[f(x)=P] < \varepsilon$ ダカラ開集合ニヨル ε-Überdeckung $\{G_1, G_2, \cdots\cdots, G_n\}$ ガアッテドノ $m+2$ 個ニ Durchschnitt ガナイ。

$$\sum_{i=1}^{n} G_i = U \supset \underset{x}{E}[f(x)=P] \text{ ナル } U \text{ ハ } d_{m+1}(U) < \varepsilon.$$

δ ヲ充分小サクトレバ $U \supset \underset{x}{E}[f(x) \in K_\delta]$ ニデキル。故ニコノ δ ヲトレバ $d_{m+1} \underset{x}{E}[f(x) \in K_\delta] < \varepsilon$.

Lemma 4. $\mathfrak{F}_{n\varepsilon}^m(R)$ ハ $\mathfrak{F}_n(R)$ デ offen. $\mathfrak{F}_n^m(R)$ ハ G_δ.

証明： $f \in \mathfrak{F}_{n\varepsilon}^m(R)$ δ ヲ上ノイミトスル。

$\mathfrak{F}_n(R)$ ノ中ノ $\rho(f, \varphi) < \delta$ ナル φ ヲトレバ $y \in \underset{x}{E}[\varphi(x)=P]$ ニ対シテ $\rho(f(y), P) < \delta$ 従ッテ $f(\underset{x}{E}[\varphi(x)=P]) \subset K_\delta$

$$\underset{x}{E}[\varphi(x)=P] \subset \underset{x}{E}[f(x) \in K_\delta]$$

$$d_{m+1} \underset{x}{E}[\varphi(x)=P] \leqq d_{m+1} \underset{x}{E}[f(x) \in K_\delta] < \varepsilon$$

$\therefore \quad \varphi \in \mathfrak{F}^{m}_{n\varepsilon}(R)$

——— 証明了 ———

III ⟶ I

定理2.[11] $\mathfrak{F}^{m}_{n}(R)$ が $\mathfrak{F}_{n}(R)$ で dicht ナラバ

$\dim R \leqq m+n$. R ハ Kompaktum.

証明: n ニツイテノ Induktion

1) $n=0$. E_0 ハ一点ト考ヘルカラ $\dim R > m$ デハアリ得ナイ。

2) $n'<n$ デ成立スルモノトスル。

$\mathfrak{F}_{n}(R)$ ヲ Cartesisches Produkt $\mathfrak{F}_{1}(R)\times\mathfrak{F}_{n-1}(R)$ ト考ヘテ $\mathfrak{F}_{n}(R)$ が vollständig, separabel ナコト及ビ Lemma 4 カラ $\mathfrak{F}^{m}_{n}(R)$ が G_δ デ假定カラ $\mathfrak{F}_{n}(R)$ デコレが dicht デアルコトヲ思出セバ Lemma 3 カラ $\mathfrak{F}_{1}(R)$ デ überall dicht ナ集合 $\mathfrak{N}$ が存在シテスベテノ $f\in\mathfrak{N}$ ニ対シテ $(f,\varphi)\in\mathfrak{F}^{m}_{n}(R)$ ナル φ ノ集合が

---

11) Lemma 3 ノ証明ノ仕方カラワカルヤウニ: A vollständig B sep. $A\times B\supset M$ が dicht デ offen ナラバ $A\supset N$ が存在シテ A デ dicht デ $(a,y)\in M$ ナル y ノ集合が B デ dicht. 初メハタベタノニ対シテ $\mathfrak{F}^{m}_{n\varepsilon}(R)$ が $\mathfrak{F}_{n}(R)$ デ dicht ナラバ $\dim R\leqq m+n$ ナルコトヲ ソノマヽ証明シマシタ。$\mathfrak{F}^{m}_{n}(R)$ が dicht ナラバ $\mathfrak{F}^{m}_{n\varepsilon}(R)$ が dicht ガカラコレカラ定理2ガデマス。Durchschnitt ヲ後デトルカ前デトルカノチガヒデ内容ニハカハリハナイノデスガ Lemma 3 ハソレ自身役ニ立ツカト思ヒマス。
尚 Lemma 3 ハ角谷氏ニ教ヘテ頂イタモノデアリマシテ深ク感謝致シマス。

$\mathcal{F}_{n-1}(R)$ デ dicht.

$f \in \mathcal{H}$, $\underset{x}{E}[f(x)=P] \underset{def}{=} E(f)$ トスレバ $(f,g) \in \mathcal{F}_n^m(R)$ トイフコトハ $\dim[\underset{x}{E}[g(x)=P]\cdot E(f)] \leqq m$.

但シコヽデハ P ハ E_{n-1} ノ原点ト考ヘル。

$E(f)$ が leer デナケレバ $\mathcal{F}_{n-1}^m(E(f))$ ガ $\mathcal{F}_{n-1}(E(f))$ デ dicht。何故ナラバ $g \in \mathcal{F}_{n-1}(E(f))$ ハ $g^* \in \mathcal{F}_{n-1}(R)$ = erweitern デキルカラ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ対シテ

$$\rho((f,g^*);(f,\varphi))<\varepsilon$$

ニナルヤウナ $(f,\varphi) \in \mathcal{F}_n^m(R)$ ガアル。$E(f)$ デ考ヘレバ

$$\rho(g,\varphi)<\varepsilon, \quad \varphi \in \mathcal{F}_{n-1}^m(E(f)).$$

Induktion ノ假定ニヨリ $E(f)$ ハ高々 $m+n-1$ 次元。ダカラ $\dim E(f) \leqq m+n-1$ ナル如キ Abbildung f が $\mathcal{F}_1(R)$ デ dicht.

A, B ヲ任意ノ共通点ノナイ R ノ閉集合トスレバ

$$\bar{f}(x)=\rho(x,B)-\rho(x,A)$$

ハ $\mathcal{F}_1(R)$ ニ属シ A, B デソレゾレ $\geqq \varepsilon>0$, $\leqq -\varepsilon<0$ トナル如キ $\varepsilon>0$ アリ。コノ性質ヲ失ハナイヤウナ $f \in \mathcal{H}$ カトレル。$E(f)$ ハ A, B ヲ分カツ高々 $m+n-1$ 次元ノ集合ダカラ

$$\dim R \leqq m+n$$

——— 証明了 ———

以上デ Kompaktum R ニ對シテ I, II, III ガ äquivalent デアルコト、従ッテ同時ニ〈Hauptsatz〉

ノ証明が完結スル。