



Title	Kompaktum ノ Sphäreヘノ Abbildungニツイテ
Author(s)	坂田, 良次
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 165, p. 408-423
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74651
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

722. Kompaktum, Sphäre $\rightarrow$ Abbildung ニツイテ

坂田 良次 (阪大)

Kompaktum R , 次元 n Sphäre $S_n \rightarrow R$, stetige Abbildung f の関係トシテ Alexandroff-Hurewicz の定理が知らレテイル。

(Alexandroff-Hurewicz, 定理)¹⁾

$\dim R \leq n$ ナルタメ必要且ツ充分ナ条件ハ任意ノ閉集合 $A \subset R$, $S_n \rightarrow A$ ノ stetige Abbildung が $R \rightarrow S_n$ へノ f へ $f|_A$ へ erweitern デキルコトデアイル。

Borsuk ハコノ定理ノ必要條件ノ方ヲ擴張シテ次ノ定理ヲ得テイル。

1) P. Alexandroff: Dimensionstheorie I. Hauptsatz
(Math. Ann. 106)

W. Hurewicz: Über Abbildungen topologischer Räume auf die n -dimensionale Sphäre (Fund. Math. 24)

Hurewicz ハ必要條件ノ時ニハ R が Kompaktum デアルコトヲ必ズレモ必要トシナイコト, 即チ metrisierbar, separabel デヨイコトヲ示レタ。

(Borsuk: 定理)²⁾

Kompaktum R が $\dim R \leq n$ とバ任意,
閉集合 $A \subset R$, $S_k \sim$, stetige Abbildung $f =$ 對
シテ閉集合 $E \subset R - A$ がアツテ $\dim E < n - k$ デアリ f ハ
 $R - E$, $S_k \sim$, Abbildung = 擴張デキル。($k = 0, 1, \dots$)

2) K. Borsuk: Un théorème sur les prolongements
des transformations (Fund. Math. 29)

コノ場合モ R ハ metrisierbar, separabel デ充ル
デアル。實際ハ Borsuk ハ邊カ = 一般ノ定理ヲ証明シテ
イルケレドモ、コノデハ証明ハノベナシ。唯コノ定理ハソレ
自身トシテヨリハ例ヘバ Borsuk ノ Homologietypenklasse
ノ理論ヲ重要デアルト思ハレルノデ結果ガケカイヲオキ
マス。(Homologie typenklasse = ツイテハ:

Borsuk: Sur les groupes des classes de trans-
formations continues (C. R. 202).

$m+1$ 次元 Kugel $\mathbb{Q}_{m+1}$, $\vee$: Sphäre S_m トスル。

X ノ各点 $x \in X$ = 於テスベテ、近傍 $U(x)$ = 對シテ適當ノ
近傍 $V(x)$ がアツテ $S_m \xrightarrow{f} V(x)$ が $\varphi = \mathbb{Q}_{m+1} \xrightarrow{f^*} U(x) =$ er-
weitern デキルトキ X ハ localement connexe en dimen-
sion m トイフ。

又 $S_m \xrightarrow{f} M$ がスベテ $\mathbb{Q}_{m+1} \xrightarrow{f^*} M =$ erweitern デキル
トキ connexe en dimension m トイフ。

(Borsuk: 定理)

$\left\{ \begin{array}{l} X, Y \text{ metrisierbar, separabel} \\ Y \text{ ハ } \vee, \text{ 上 localement connexe en dimensions } < n, \\ \text{connexe en dimensions } < k \\ X_0 \subset X \text{ ハ } \dim(X - X_0) \leq n, \text{ 閉集合 } \text{ ----- } \text{ 次頁ヘツテフ。} \end{array} \right.$

コ、デハ *Hurewicz* , 方法ヲツカツテ *Borsuk* , 定理ノ紹介ヲカネテ逆モ成立スルコトヲ述ベテミタイト思ヒマス。³⁾

§ 1.

(Hauptsatz) Kompaktum R が $\dim R \leq n$ ナルタメノ必要且ツ充分ノ条件ハ任意ノ閉集合 $A \subset R$ 於ケル $A \xrightarrow{f} S_k$ が $R-E \xrightarrow{f^*} S_k = \text{erweitern}$ デキルコトデアル。但シ $E \subset R-A$ ハ R ノ閉集合ガ $\dim E < n-k$

n 次元ユークリッド空間 E_n へ、 R ノ *stetige Abbildung* , 全体ヲ $\mathcal{F}_n(R)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) , E_n ノ原点 $P=(0, 0, \dots, 0)$ トシ P ヲ *Bild* = $\in \mathcal{F}_n(R)$ ノ集合ガ $\dim \bigcup_{x \in R} [f(x)=P] \leq m$ = ナル *Abbildung* f ノ集合ヲ $\mathcal{F}_n^m(R) \subset \mathcal{F}_n(R)$ デ表ハス。

Kompaktum R = 對シテ

I. $\dim R \leq n$

(脚註 2 ノツヅキ)

ソノトキ $X_0 \xrightarrow{f} Y$ = 對シテ $\dim E < n-k$ ノ閉集合

$E \subset X - X_0$ ガツツテ

f ハ $X-E \xrightarrow{f^*} Y = \text{erweitern}$ デキル。

3) リ、*Hurewicz* , 論文ハ $n=n$ ノ場合デ、コノ論文全体ヲ拡張シテ形ヲ紹介スルコトニナリマス。

ユークリッド空間へ、*Abbildung* ヲ *Hilfsmittel* トシテツカフ方法アリマス。

II. R , 任意, 開集合 $A =$ 於ケル $f \in S_n^A$ が常 =
 $f^* \in S_n^{R-E} = \text{erweitern}$ デキル。但シ $E \subset R - A$ ハ R ,
 開集合デ $\dim E < n - k$ ($k = 0, 1, \dots$)

III. $\mathcal{F}_k(R) =$ 於テ $\mathcal{F}_k^{n-k}(R)$ が *dicht* デアル, ($k = 0, 1, \dots$) が *äquivalent* デアルコトヲ次ノ順序デ証明スル。

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \rightarrow \text{II} \\ \text{II} \rightarrow \text{III} \end{array} \right\} (\S 2) \quad \begin{array}{l} \text{コトヲハ } R \text{ ハ } \text{metrisierbar, separabel} \\ \text{ト假定シテ証明スル。} \end{array} \quad 5)$$

$$\text{III} \rightarrow \text{I} \quad (\S 3) \quad \text{Abbildungsraum ト 著ヘテ mengen-} \\ \text{theoretisch + 問題 = 帰着サセル。}$$

4) X^Y ハ Y , X ハ, *stetige Abbildung*, 全体カテデキル *Abbildungsraum*。

Abbildungsraum = ツイテハ $\S 2$ テミテイタジキタイ。

5) R が *Kompaktum*, トキハ $\text{I} \rightarrow \text{III}$ がモット精密ニワカッテ

イル: 原点バカリデナク各点 p ノ *Urbild* ノ 集合

$E = \{f(x) = p\}$, 次元 $k \leq n - k = +\infty$ *Abbildung* が

$\mathcal{F}_k(R)$ デ *dicht* デアル。(Hurewicz: Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmenge Cartesischer Räume (Sitzungsber. Preussischen Akad. 34-)) R ハ *metrisierbar separabel*, トキニモ成立スルカモアレナイケレドモマダワカッタキナイ。

コレヲツカヘバ $\text{I} \rightarrow \text{II}$ ハ非常ニ簡單デアアル: Q_{k+1} テ半徑 1, $k+1$ 次元 *Kugel* S_k ヲノ *Sphäre* トスル。

$f \in S_n^A$ テ *erweitern* シテ $f' \in Q_{k+1}^R$ トシ上ノ結果ノ証明ノ仕方カラ A デ $f(x) = f'(x) = f''(x)$ デ (次頁ヘツツ)

§ 2.

Lemma 1. R metrisch, separabel $A, A_i \subset R$

閉集合 ($i = 1, 2$) $A = A_1 + A_2, \dim(R-A) \leq n$

トスル。

ソウスレバ $R_i \supset A_i, R_1 + R_2 = R, \dim(R_1, R_2 - A_1, A_2) \leq n-1$ + 閉集合が存在スル。

$$\text{証明 } G_1 = \bigcup_x \left[\rho(x, A_1) < \frac{1}{2} \rho(x, A_2) ; x \in R \right]$$

$$G_2 = \bigcup_x \left[\rho(x, A_2) < \frac{1}{2} \rho(x, A_1) ; x \in R \right]$$

トスレバ

$$G_1 \supset A_1 - A_1 \cdot A_2$$

$$G_2 \supset A_2 - A_1 \cdot A_2$$

$$\overline{G_1} \cdot \overline{G_2} \subset A_1 \cdot A_2$$

$\overline{G_1} - A_1, \overline{G_2} - A_2$ は離レタ $R-A$ 中ノ閉集合ヲ
 $\dim(R-A) \leq n$ カカテコレヲ高々 $n-1$ 次元ノ閉集合ヲ分
 ケルコトカデキル。

即チ $R-A =$ 於ケル閉集合 B_1, B_2 が存在シテ

$$R-A = B_1 + B_2, B_1 G_2 = B_2 G_1 = 0, \dim B_1, B_2 \leq n-1.$$

(附註 5 ノツビヤ)

$\dim \bigcup_{x \in R} [f''(x) = P] < n-k, x \in Q_{k+1} - S_k$ + 11 Abbildung

f'' が存在スル。

今 $E = \bigcup_x [f''(x) = P]$ トスレバ $\dim E < n-k$.

$f^*(x) = \frac{f''(x)}{|f''(x)|} \quad x \in X-E$ トオケバ $f^* \in S_k^{X-E}$ ハ f ノ E -

weiterung = ナツテイル。(証明了)

ヨツテ

$$R_1 = B_1 + A_1, \quad R_2 = B_2 + A_2$$

トオケバ、 R_1, R_2 ハ求ムル閉集合トナル。 (証明了)

I $\rightarrow$ II ハ次ノ Borsuk ノ定理ヲ証明スレバ充分ナル。

(Borsuk ノ定理)⁵⁾

R metr. sep. $A \subset R$ 閉集合 $\dim(R-A) \leq n$
トテバ $f \in S_k^A =$ 對シテ $E \subset R-A, \dim E < n-k$ ナル閉集合
 E ガアツテ f ハ $f^* \in S_k^{X-E} = \text{erweitern}$ デキル。
($k=0, 1, \dots$) ($2 \leq k$ ノトキハ E ハ空集合ト考ヘル)

証明. $k =$ ツイテ / Induktion.

1) $k=0$ S_0 ハ二点 P_1, P_2 デアル。

$$A_i = \bigcup_{x \in A} [f(x) = P_i] \quad \text{トオケバ離レタ閉集合.}$$

$$A = A_1 + A_2 \quad \text{假定 = ヨリ} \quad \dim(R-A) \leq n$$

$\therefore$ Lemma 1 = ヨツテ $R_i \supset A_i \quad \dim R_i \leq n-1$
ナル閉集合 R_i ガアル。

$$E = R_1 \cup R_2 \quad f^*(x) = P_i \quad (x \in R_i - E)$$

トオケバ f^* ハ求メタル / Erweiterung デアル。

2) $k' < k$ デ成立スルモノトスル。

$$S_k \supset \text{Hemisphere } Y_1, Y_2 = \nabla \text{ケル。}$$

$$Y_1 \cup Y_2 = S_{k-1}$$

$$A_i = \bigcup_{x \in A} [f(x) \in Y_i] \quad \text{トオケバ 閉集合}$$

$A = A_1 + A_2, \dim(R-A) \leq n$ トカテ Lemma 1
= ヨリ 閉集合。

$$R_i \supset A_i \text{ があって } \dim(R_1 \cdot R_2 - A_1 A_2) \leq n-1$$

$$A_1 \cdot A_2 \text{ 上から考えれば } f \text{ は } A_1 A_2 \xrightarrow{f} S_{k-1}$$

Induktion / 假定 = 有って R_1, R_2 / 閉集合 E .

$$E \subset R_1 \cdot R_2 - A_1 A_2 \quad \dim E < (n-1) - (k-1) = n-k$$

$$\text{が有って } \bar{f} \in S_{k-1}^{R_1 R_2 - E} = \text{erweitern できる。}$$

$$B_i = R_i + (R_1 R_2 - E) \text{ は } R_i - E \text{ / 閉集合。}$$

$$\therefore R_i - E \xrightarrow{f_i} Y_i \text{ へ erweitern できる。}$$

E は R_1, R_2 / 閉集合だから勿論 R / 閉集合。

$$f^*(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in R_1 - E \\ f_2(x) & x \in R_2 - E \end{cases}$$

$$\text{トオケバ } f^* \in S_k^{X-E} \text{ へ 求むるモノである。}$$

—— 証明了 ——

P は topologischer Raum, Q は Kompaktum

トスル。

$P \xrightarrow{f} Q$ stetige Abbildung, 全体 Q^P は Abbil-
dungsraum ト若へテ Metrik へ

$$\rho(t_1, t_2) = \sup_{x \in P} d(f_1(x), f_2(x)), \quad f_1, f_2 \in Q^P$$

6)
で導くラレル。

Q^P へ 関シテハ beschränkt である vollständig である
コトが容易 = ワカル。(P, Q metr. である Q は vollstän-
dig である Q^P へ vollständig である) 念 / クメ = ス
レバ: Q である, Metrik d である。

6) Alexandroff-Hopf: Topologie I. Erster Teil.

$$f_1, f_2 \in Q^P \quad \rho(f_1, f_2) = \sup_{x \in P} d(f_1(x), f_2(x)) \leq \sup_{x, y \in Q} d(x, y) \\ = \delta(Q)$$

$$\text{又 } f_n \in Q^P \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\lim_{n_i, n_j \rightarrow \infty} \rho(f_{n_i}, f_{n_j}) = 0 \quad \text{トスレバ}$$

スミテ, $x \in P$ = 對シテ

$$\lim_{n_i, n_j \rightarrow \infty} d(f_{n_i}(x), f_{n_j}(x)) = 0$$

Q の Kompaktum であるから

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in Q$$

$$d(f(x), f_n(x)) \leq \sup_{m > n} d(f_m(x), f_n(x)) \leq \sup_{m > n} \rho(f_m, f_n)$$

假定 = 3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m > n} \rho(f_m, f_n) = 0$$

f_n は gleichmäßig $= f$ = 収斂スルカラ $f \in$
 stetige $\forall f \in Q^P$. シカ $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f, f_n) = 0$ 故 =

Q^P は vollständig, Lemma 2. $P \in$ Kompaktum ト
 スレバ Q^P が separabel である。

証明: Q へ, P へ Abbildung 全体⁷⁾ (連続 $\forall \epsilon > 0$,
 ϵ ヒツクルメテ) Γ 表ハス。 $Q^P \subset \Gamma$. Γ へ Metrik
 ハ前ト同様 = 定義スル。

7) コノ Lemma, 証明ハ Abbildung ト 唯云ツタガケテハ
 stetig $\forall \epsilon > 0$ ϵ 子細シテイル。 コノ外ノ 所ハ
 Abbildung ハスベテ stetig $\forall \epsilon > 0$ バカリヲ考ヘル。

P , Basis $\gamma \{R_i\} (i=1, 2, \dots)$ トスル。

$$P \subset R_{n_1} + R_{n_2} + \dots + R_{n_k}$$

トルヤウナ有限ノ *Überdeckung* = 対シテ $(n_1, n_2, \dots, n_k)$

ヲ對應トセバカニル集合 $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{(n_1, n_2, \dots, n_k)\}$ ハ可

附番個デアアル。

$$\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_k) = \text{対シテ}$$

$$S_\alpha^{(1)} = R_{n_1}, S_\alpha^{(2)} = R_{n_2} - R_{n_1}, \dots, S_\alpha^{(k)} =$$

$$R_{n_k} - R_{n_1} - \dots - R_{n_{k-1}}$$

ヲツクレバ *disjunkt* ナ集合 = トスル。

$Q =$ 於テ *dicht* ナ集合ヲ D トシ, Γ_α ヲ各 $S_\alpha^{(i)} (i=1, 2, \dots, k)$ テハ ($D =$ 属スル) 同ク値ヲトル $P \xrightarrow{+} D$ ナル *Abbildung* ノ全体トスル。

$$\Gamma_\alpha \text{ ハ明ラカニ可附番個、從ツテ } \Gamma_\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha \in \Sigma} \Gamma_\alpha \in \text{亦}$$

可附番個デアアル。 $Q^P \subset \overline{\Gamma_\Sigma}$ ヲイヘバ充合デアアル。 (Γ *metrischer Raum*!)

$g \in Q^P$, $\varepsilon > 0$ ガ與ヘラレタトスル。

$$G_\varepsilon = \bigcup_{x \in P} \left[d(g(x), g(y)) < \frac{\varepsilon}{2} \right] \quad x \in P$$

ハ P ノ 開集合。各点 $x \in P =$ 對シテ $x \in R_{n(x)} \subset G_\varepsilon$

ヲツクレバ P ハ *Kompaktum* デアルコトカラ有限個ノ

Überdeckung カツクレル。 γ ~~ニ~~ 對シテ $\alpha = (n(x_1),$

$n(x_2), \dots, n(x_n)) \in \Sigma$ 。

D ハ Q テ *dicht* デアツタカラ Q_i ガアツテ

$$d(a_i, g(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad a_i \in D$$

$$f(x) = a_i, \quad x \in S_\alpha^{(i)} \quad \text{定義される Abbildung}$$

$$\wedge \Gamma_\Sigma = \text{局所}, \quad x \in P = \text{対して}$$

$$d(f(x), g(x)) \leq d(a_i, g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) < \varepsilon$$

故に $\Gamma =$ 於ける f, g の距離

$$\rho_\Gamma(f, g) = \sup_{x \in P} d(f(x), g(x)) \leq \varepsilon$$

—— 証明了 ——

II $\rightarrow$ III $\in$ metrisierbar, separabel, トキ

証明する。

定理⁵⁾ 1. R metr. sep. $\dim M \leq n$ ならば

$\mathcal{F}_k^{n-k}(R)$ は $\mathcal{F}_k(R)$ に dicht である。

証明: 任意, $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{F}_k(R)$ に対して

$$\dim E[f'(x) = P] \leq n - k \quad (P \text{ は } k \text{ 次元ユーク}$$

リッド空間, 原点)

$$\rho(f(x), f'(x)) \leq \varepsilon \quad x \in M$$

かつ $f' \in \mathcal{F}_k^{n-k}(R)$ があるコトヲイへばよい。

$$Q_k = E_x \left(\rho(x, P) \leq \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad S_{k-1} = E_x \left[\rho(x, P) = \frac{\varepsilon}{2} \right]$$

$$X = E_x [f(x) \in Q_k], \quad X_0 = E_x [f(x) \in S_{k-1}]$$

トオケバ Borsuk の定理カラ

$$X \text{ の開集合 } E \subset X - X_0, \quad \dim E \leq n - k$$

があり X_0 を考へた f は

$$f^* \in S_{k-1}^{X-E}$$

= erweitern する。

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & x \in R - X \\ \frac{\rho(x, E)}{\rho(x, E) + \rho(x, X_0)} \cdot f^*(x) & x \in X - E \\ 0 & x \in E \end{cases}$$

トスレバ $f' \in \mathcal{F}_k^{n-k}(R)$ テ $\rho(f, f') \leq \varepsilon$

—— 証明了 ——

§3.

Lemma 3. A, B metr. vollständig, separabel } トスル。
 $A \times B$ Cartesisches Produkt

$M \subset A \times B$ が G_δ テ $A \times B$ テ dicht + ラバ A テ
dicht + $N \subset A$ が存在シテ スベテ $\alpha \in N =$ 数シテ
 $(\alpha, x) \in M$ + ル x / 集合 α B テ dicht = + ル。

証明: B / Basis $\tau R_i (i=1, 2, \dots)$

$$M = \bigcap_{i=1}^{\infty} O_i (O_i \text{ offen}) \quad O_i \supset M \text{ 故カラ dicht.}$$

$(\alpha, \gamma_n) \in O_i$ + ル $\gamma_n \in R_n$ が 1 つ トモ ー ツ 存在スル
 $\alpha \in A$ / 集合 τE_{n_i} トスル。 O_i / offen 故カラ α / 充
分小ハイ近傍 $\tau E_{n_i} =$ 属シ、従ッテ E_{n_i} / offen デアル。

又 O_i / dicht 故カラ E_{n_i} / A テ dicht. Baire /

2) $A \times B$ / $C = (\alpha, b)$ $\alpha \in A, b \in B$ + ル Paar / 集合
全体デ Metrik / $\rho(c_1, c_2) = \sqrt{\rho^2(\alpha_1, \alpha_2) + \rho^2(b_1, b_2)^2}$
ヲ定義スル。

Dichtigkeitssatz⁹⁾ = $\exists$ ツテ $\prod_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{\infty} E_{n_i} = N \in A$ テ
 dicht. 従ツテ N の各点 $x = x_i$ テ $(x, y) \subset O_i$ ナル
 y , 集合 G_i ハ B テ offen ン dicht.

モウ一度上ノ定理ヲツカヘバ $G = \prod_{i=1}^{\infty} G_i$ ハ B テ dicht.

ソレ故ニ $N \subset A$ カ A テ dicht⁹⁾ ナ $(a, x) \in M$. $a \in N$
 ナル x , 集合 G ハ B テ dicht. — 証明了 —

$\mathcal{F}_n(R)$ ナリ, $x, y = \text{Kompaktum } R$, n 次元ユークリッド空間 E_n へ, Abbildung 全体トスル。明カカ

$\mathcal{F}_n(R)$ ハ Cartesisches Product $\mathcal{F}_m(R) \times \mathcal{F}_{n-m}(R)$
 ト若ヘラレル。

E_n ノ原点 P ノ $f = \exists$ ル Urbild $\rightarrow \bigcup_x [f(x) = P]$
 トスルトキ $\mathcal{F}_{n-\varepsilon}^m(f)$ ナ $m+1$ 次元, Urysohn, Konstante¹⁰⁾
 $d_{m+1} \bigcup_x [f(x) = P] < \varepsilon$ ナル x, y ナ Abbildung 全体トスル。

$$\mathcal{F}_{m-\varepsilon}^m \subset \mathcal{F}_n(R)$$

- 9) R 〆 vollständig metr. ナラバ $R = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ dicht ナ
 offen ナ集合ノ高々可降番個ノ Durchschnitt $\cap$ 〆 R テ
 dicht. (Alexandroff-Hopf. S. 108)
- 10) (= coefficient d'aplatissement de dimension $m+1$,
 集合 $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} d_{m+1}(M_i)$ ハ M ノ有限個ノ閉集合ニヨル
 η -Überdeckung ナドノ $m+2$ 個ノ Durchschnitt ガ
 ナイヤウナ η ノ untere Grenze.

M 〆 Kompaktum, トキハ $\dim M \leq n$ ナルタメノ必要且ツ充分ノ條件ハ
 $d_{m+1}(M) = 0$ (Urysohn: Sur les multiplicités Cantoriennes
 (Fund. Math. 8))

Urysohn / Konstante / 性質カラ明カ =

$$\mathcal{F}_n^m(R) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \mathcal{F}_{n \cdot \nu}^m$$

$\mathcal{F}_{n\varepsilon}^m(R)$ が $\mathcal{F}_n(R)$ 中 "open" = + ルコト 従ッテ $\mathcal{F}_n^m(R)$ ハ G_δ = + ルコトヲ証明スル。

先ッ $d_{m+1} \int_x [f(x) = P] < \varepsilon$ + ラバ 充分小サナ $\delta =$ 對シテ $d_{m+1} \int_x [f(x) \in K_\delta] < \varepsilon$ + ル。 (但シ K_δ ハ radius δ 中 心ヲ P トスル Kugel)

何故ナラバ $E[f(x) = P]$ ハ 閉集合デ $d_{m+1} \int_x [f(x) = P] < \varepsilon$ ガカラ 閉集合 = ヨル ε -Überdeckung $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ がアツテド、 $m+2$ 個 $\in$ Durchschnitt が +1。

$$\sum_{i=1}^n G_i = U \supset E[f(x) = P] \text{ + ル } U \text{ ハ } d_{m+1}(U) < \varepsilon.$$

δ ヲ 充分小サクトレバ $U \supset E[f(x) \in K_\delta] =$ デキル。
故 = コノ δ ヲトレバ $d_{m+1} \int_x [f(x) \in K_\delta] < \varepsilon$ 。

Lemma 4. $\mathcal{F}_{n\varepsilon}^m(R)$ ハ $\mathcal{F}_n(R)$ 中 "open". $\mathcal{F}_n^m(R)$ ハ G_δ .

証明: $f \in \mathcal{F}_{n\varepsilon}^m(R)$ δ ヲ上ノイミトスル。

$\mathcal{F}_n(R)$ 中、 $\rho(f, g) < \delta$ = + ル g ヲトレバ
 $y \in E[g(x) = P] \Rightarrow$ 對シテ $\rho(f(y), P) < \delta$
従ッテ $f(E[g(x) = P]) \subset K_\delta$

$$E[g(x) = P] \subset E[f(x) \in K_\delta]$$

$$d_{m+1} \int_x [g(x) = P] \leq d_{m+1} \int_x [f(x) \in K_\delta] < \varepsilon$$

$$\therefore \varphi \in \mathcal{F}_{n \in \mathbb{N}}^m(R)$$

—— 証明了 ——

III $\rightarrow$ I

定理 2¹¹⁾ $\mathcal{F}_n^m(R)$ が $\mathcal{F}_n(R)$ で *dicht* + ラベ

$\dim R \leq m+n$, R は Kompaktum.

証明: $n = \infty$ は Induktion

1) $n=0$. E は一点ト考へルカラ $\dim R > m$ が
ハアリ得ナイ。

2) $n' < n$ が成立スルモノトスル。

$\mathcal{F}_n(R)$ は Cartesianisches Produkt $\mathcal{F}_1(R) \times \mathcal{F}_{n-1}(R)$

ト考へテ $\mathcal{F}_n(R)$ が *vollständig*, *separabel* + コト及

ビ Lemma 4 カラ $\mathcal{F}_n^m(R)$ が G_δ が假定カラ $\mathcal{F}_n(R)$ がコ

レが *dicht* ナアルコトヲ思出セバ Lemma 3 カラ

$\mathcal{F}_1(R)$ は *überall dicht* + 集合 $\mathcal{K}$ が存在シテスベテ

$f \in \mathcal{K} = \exists \varphi (f, \varphi) \in \mathcal{F}_n^m(R)$ ナル φ の 集合 が

11) Lemma 3 の 証明、仕方カラワカルヌウ =: A *vollständig*
 B *sep.* $A \times B \subset M$ が *dicht* ナ *offen* + ラベ $A \subset N$ が存在
シテ A が *dicht* ナ $(a, b) \in M$ ナル b の 集合 が B が *dicht*.
初メハスベテ $\varepsilon = \exists \varphi \mathcal{F}_{n \in \mathbb{N}}^m(R)$ が $\mathcal{F}_n(R)$ で *dicht* + ラベ
 $\dim R \leq m+n$ ナ コノコトヲ ツカツテ 証明シマシタ。 $\mathcal{F}_n^m(R)$ が
dicht + ラベ $\mathcal{F}_{n \in \mathbb{N}}^m(R)$ が *dicht* ナカラ コレカラ 定理 2 がデ
マス。 *Durchschnitt* ナ 後ヲトルカ 前ヲトルカノチガヒデ
内容ニハカハリハナイ、デスガ Lemma 3 ハ ソレ自身役ニ立ツカト
思ヒマス。

尚 Lemma 3 の 角谷氏ニ 教ヘテ 頂イタメ、デアリマシタ 深ク
感謝致シマス。

$\mathcal{F}_{n-1}(R)$ は *dicht*.

$f \in \mathcal{H}$, $\bigcup_x [f(x) = P] \stackrel{\text{def}}{=} E(f)$ トスレバ $(f, g) \in \mathcal{F}_n^m(R)$

トイフコトハ $\dim [\bigcup_x [g(x) = P] \cdot E(f)] \leq m$.

但シコトデハ $P \in E_{n-1}$ ノ原点ト考ヘル.

$E(f)$ が *leer* デイヤレバ $\mathcal{F}_{n-1}^m(E(f))$ が $\mathcal{F}_{n-1}(E(f))$ へ *dicht*. 何故トスレバ $g \in \mathcal{F}_{n-1}(E(f))$ ハ $g^* \in \mathcal{F}_{n-1}(R)$ = *erweitern* デキルカラ任意ノ $\varepsilon > 0$ = 対シテ

$$\rho((f, g^*); (f, g)) < \varepsilon$$

= ナルヤウナ $(f, g) \in \mathcal{F}_n^m(R)$ ガアル. $E(f)$ デ考ヘルバ

$$\rho(g, g) < \varepsilon, \quad g \in \mathcal{F}_{n-1}^m(E(f)).$$

Induktion ノ假定 = ヨリ $E(f)$ ハ高々 $m+n-1$ 次元. ガカラ $\dim E(f) \leq m+n-1$ ナル如キ *Abbildung* f が $\mathcal{F}_1(R)$ へ *dicht*.

A, B 任意ノ共通点ノナシ R ノ閉集合トスレバ

$$\bar{f}(x) = \rho(x, B) - \rho(x, A)$$

ハ $\mathcal{F}_1(R)$ = 属シ A, B デソレゾレ $\geq \varepsilon > 0$, $\leq -\varepsilon < 0$ トナル如キ $\varepsilon > 0$ アリ. コノ性質ヲ失ハナイヤウナ $f \in \mathcal{H}$ カトレル. $E(f)$ ハ A, B ヲ含カツ高々 $m+n-1$ 次元ノ集合ガカラ

$$\dim R \leq m+n$$

—— 証明了 ——

以上デ *Kompaktum* R = 對シテ I, II, III が *äquivalent* デアルコト、從ツテ同時 = *(Hauptsatz)*

、証明が完結スル。