OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	一次変換群ガ有限群ナルタメノ條件 II
Author(s)	浅野, 啓三
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 165, p. 423-429
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74652
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1723. 一次変換群が有限群ナルタメノ條件 II.

淺野　啓三 (阪大)

先日 Burnside ノ定理ヲシラベテ見テ，ソノ結果分ッタコトデシタガ、此ノ証明ヲ少シ modify スレバ本誌前号 1721 デ述ベタ最初ノ定理ハスグ証明サレテシマウノデシタ。ツイ不精ヲシテ始メニ Burnside ノ論文ヲシラベルコトヲ怠ッタタメ、前論文 I ハ要領ノ悪イ所バカリ多クテ甚ダ面目ナイ次第デスガ、今一度順序ヲ立テヽ述ベテ見タイト思ヒマス。(多少重複スル部分モアリマスガ前論文 I ハ参照シナイデ始メカラヤリ直シマス)。

以下 K ヲ Charakteristik Null ノ Körper トスル。又 $\mathfrak{o}_f$ ヲ K ノ元ヲ組成分子トスル grad r ノ正規行列(行列式ノ0ナラザル行列)ヲ元トスル群トスル。

定理 1. $\mathfrak{o}_f$ が($\mathfrak{o}_f$ 自身ノ表現ト考ヘテ)完全可約(vollständig reduzibel)デアリ、$\mathfrak{o}_f$ ニ属スル行列，Spur 全体ノ集合 $Sp(\mathfrak{o}_f)$ が有限集合ナラバ $\mathfrak{o}_f$ ハ有限群デアル。

(証明) 表現 $\mathfrak{o}_f$ ハ K ノ適当ナ拡大体 L ノ中デ考ヘ

テ既約表現ニ分解サレル。今 $\mathfrak{o}_f$ ハ始メカラ既約表現ニ分解サレテヰルト考ヘテ差支ヘナイ。然ラバ

$$A=(\overbrace{A_1,\cdots\cdots,A_1}^{m_1},\cdots\cdots,\overbrace{A_t,\cdots\cdots,A_t}^{m_t})^{(*)},\quad A\in\mathfrak{o}_f$$

コヽニ $A\to A_i$ $(i=1,\cdots\cdots,t)$ ヽ $\mathfrak{o}_f$ ノ同値トラザル既約表現デアル。今ソノ $grad$ ヲ r_i トスル。

L ノ元ヲ係数トシテ $\mathfrak{o}_f$ カラ生成サレル L- $Modul$ ヲ作レバ、$Algebra$ ノ表現論カラヨク知ラレテヰル如ク、L ニ関スル $Rang$ $R=\sum_{i=1}^{t} r_i^2$ ノ $(halbeinfacher)Ring$ ヲ得ル。換言スレバ $\mathfrak{o}_f$ ノ中ニハ R 個ノ一次独立ナ行列が存在スル。コレヲ

$$A^{(\nu)}=(A_1^{(\nu)},\cdots\cdots,A_1^{(\nu)},\cdots\cdots,A_t^{(\nu)},\cdots\cdots,A_t^{(\nu)}),\quad \nu=1,\cdots\cdots,R$$

トスル。$X=(X_1,\cdots\cdots,X_1,\cdots\cdots,X_t,\cdots\cdots,X_t)$ ヲ $\mathfrak{o}_f$ ノ任意ノ元トスレバ

$$S_p(A^{(\nu)}X)=\sum_{i=1}^{t} m_i S_p(A_i^{(\nu)}X_i)=\sum_{i=1}^{t} m_i \sum_{j,k=1}^{r_i} a_{ijk}^{(\nu)} x_{ikj}.$$

$$\nu=1,\cdots\cdots,R$$

即チ R 個ノ係数 x_{ikj} ニ R 個ノ聯立一次方程式ノ解ヲナス。

(*) $A,B,C,\cdots\cdots$ ヲ行列トシ $\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & B & \\ & & C\cdots \\ 0 & & \end{pmatrix}$ ナル形ノ行列ヲ $(A,B,C,\cdots\cdots)$ デ表ハスコトニスル。

係数ノ行列式が 0 ニナラナイコトハ $(A_1^{(\nu)}, A_2^{(\nu)}, \cdots\cdots, A_t^{(\nu)})$ 従ッテ $(m_1 A_1^{(\nu)}, m_2 A_2^{(\nu)}, \cdots\cdots, m_t A_t^{(\nu)})$ $(\nu = 1, \cdots\cdots, R)$ ガ一次独立ナルコトカラ知ラレルカラ解ハ唯一ツデアル。$S_p(A^{(\nu)} X)$ ハ全体トシテ有限個ヨリ存在シナイカラ X ノ係数ハ有限個ノ聯立一次方程式ノ解ヨナシ、従ッテ X ハ有限個ヨリ存在シナイ。

定理2. *$\mathfrak{o}_f$ が単位行列 E 以外ニ $(X-E)^p = 0$ ヲ満足スル元 X ヲ有セズ且ツ $S_p(\mathfrak{o}_f)$ が有限ナラバ $\mathfrak{o}_f$ ハ有限群デアル。*

(証明) $\mathfrak{o}_f$ ハ（適当ナ拡大体ノ中デ考ヘテ）既ニ *ausreduzieren* サレテヰルト考ヘテ差支ヘナイ。即チ $\mathfrak{o}_f$ ノ元ハ

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{t1} & A_{t2} & \cdots\cdots & A_{tt} \end{pmatrix}$$

ナル形ヲ取ルモノトスル。コヽニ $A \to A_{ii}$ ハ既約表現デアル。假定ニヨリ

$$A \to \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{tt} \end{pmatrix}$$

トスレバ此ノ對應ハ *isomorph* デアル。ヨッテ定理1ニヨリ $\mathfrak{o}_f$ ハ有限群。

定理3. *(Burnside) g ノ元ノ Ordnung が beschränkt ナラバ $\mathfrak{o}_f$ ハ有限群デアル。*

(証明) $X = E + S$ ($S \neq 0$, $S^\rho = 0$) ナル行列ノ Ordnung ハ明カニ無限デアルカラ $\mathfrak{A}$ ノ中ニハ存在シナイ。$Sp(\mathfrak{A})$ カ有限ナルコトハ $\mathfrak{A}$ ガクスル行列ノ固有値ガ全体トシテ有限個ヨリ存在シナイコトカラ當然デアル。

定理 8. (A. Weil) $\mathfrak{A}$ が有限群ナルタメノ必要且充分ナル條件ハ整係数ノ polynom $F(x)$ ガ存在シテ $F(\mathfrak{A}) \sim 0$ トナルコトデアル。(コヽニ $\mathfrak{A}^n$ ハ $\overbrace{\mathfrak{A} \times \cdots \times \mathfrak{A}}^{n}$ ナル Kronecker 積(但シ $\mathfrak{A}^0$ ハ単位表現)ヲ示シ、二ツ以上ノ表現ノ和ハコレヲ diagonal ニ並ベテ出来ル表現トスル。然ラバ正ノ整数ヲ係数トスル Polynom $f(x)$ ニ對シテ $f(\mathfrak{A})$ ナル表現ガ定義サレル。

次ニ $F(x)$ ヲ整係数ノ Polynom トシ、正係数又ハ負係数ノ項ヲ集メテ出來ル Polynom ヲ夫々 $f(x)$, $-g(x)$ トスル; $F(x) = f(x) - g(x)$. $f(\mathfrak{A})$ ト $g(\mathfrak{A})$ ガ同値 ($f(\mathfrak{A}) \sim g(\mathfrak{A})$) ナレトキ $F(\mathfrak{A}) \sim 0$ ト書ク)

Lemma. A, B ヲ夫々 Grad m, n ノ行列トシ、Minimalpolynom ガ夫々 $(x-1)^\rho$, $(x-1)^\sigma$ ニナルモノトスル。然ラバ Kronecker ノ積 $A \times B$ ノ Minimal-polynom ハ $(x-1)^{\rho+\sigma-1}$ デアル。

(証明) ρ 又ハ σ ガ 1 ニ等シイトキハ明白デアル。$\rho > 1$, $\sigma > 1$ トスル. $A = E_m + S$, $B = E_n + T$, ($S^{\rho-1} \neq 0$, $S^\rho = 0$, $T^{\sigma-1} \neq 0$, $T^\sigma = 0$)

$$A \times B = E_{mn} + S \times E_n + E_m \times T + S \times T$$

$$(A\times B-E_{mn})^k=\sum_{\alpha+\beta+\gamma=k}\frac{k!}{\alpha!\beta!\gamma!}S^{\alpha+\gamma}\times T^{\beta+\gamma}$$

$$(A\times B-E_{mn})^{\rho+\sigma-2}=S^{\rho-1}\times T^{\sigma-1}\neq 0$$

$$(A\times B-E_{mn})^{\rho+\sigma-1}=0$$

(定理ノ証明) $\mathfrak{g}$ ガ有限群ナラバ $\mathfrak{g}$ ノ同値ナラザル凡テノ既約表現ヲ $D_1,\cdots\cdots,D_l$ トスルトキ $\mathfrak{g}^n\sim\alpha_{n1}D_1+\cdots\cdots+\alpha_{nl}D_l$. ($\alpha_{nk}\geqq 0$)、コレヨリ容易ニ $F(\mathfrak{g})\sim 0$ トナル Polynom $F(x)$ ノ存在ガ分ル。

逆ニ $F(\mathfrak{g})\sim 0$ トスル. $F(x)=f(x)-g(x)$, $f(\mathfrak{g})\sim g(\mathfrak{g})$, 又 $f(x)$, $g(x)$ ノ grad ヲ夫々 m, n トスル. $m\neq n$. $\mathfrak{g}$ ニゾクスル行列 A ノ Spur $S_p(A)$ ハ $F(S_p(A))=0$ ヲ満ス. ヨッテ $S_p(\mathfrak{g})$ ハ有限集合。

次ニ A ヲ $\mathfrak{g}$ ニゾクスル Minimalpolynom $(x-1)^\rho$ ナル行列トシ, $A=E+S$ トスル. $S^\rho=0$. $\overbrace{A\times\cdots\cdots\times A}^{k}$ ノ Minimalpolynom ハ Lemma ニヨリ $(x-1)^{k(\rho-1)+1}$ 従ッテ $f(\mathfrak{g})$, $g(\mathfrak{g})$ ニ於テ A ニ対応スル行列ノ Minimalpolynom ハ明カニ夫々 $(x-1)^{m(\rho-1)+1}$, $(x-1)^{n(\rho-1)+1}$ ニ等シイ. $f(\mathfrak{g})\sim g(\mathfrak{g})$ デアルカラ両者ハ一致シ $m(\rho-1)+1=n(\rho-1)+1$. 故ニ $\rho=1$. ヨッテ定理2ニヨリ $\mathfrak{g}$ ハ有限群。

コレカラ特ニ K ハ複素数体トスル。

定理5. $\mathfrak{g}$ ガ完全可約デ, $S_p(\mathfrak{g})$ ガ beschränkt ナラバ $\mathfrak{g}$ ハ beschränkt デアル。

証明ハ定理1ノ証明ト同様デアル。

定理6. $\mathfrak{G}$ が完全可約で、$Sp(\mathfrak{G})$ が beschränkt, 且ツ $Sp(E)$ が $Sp(\mathfrak{G})$ ノ孤立点ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。(※)

(証明) $\mathfrak{G}$ = 属スル行列ハ凡ベテ diagonalform = transform サレ且ツソノ Eigenwert ノ絶対値ハ1ニ等シイ。サモナケレバ $\mathfrak{G}$ が beschränkt ニナラナイ。今 $\mathfrak{G}$ = ゾクスル行列ノ Eigenwert 全体 $\{\omega\}$ が無限集合ヲ作ルモノトシ、N ヲ任意ニ大ナル整数トスル。$\omega = e^{2\pi\alpha i}$ $(0 \leqq \alpha < 1)$ ト表ハサレル。今 α ノ中無理数ニナルモノガアレバ、ソノ一ツヲ $\omega_1 = e^{2\pi\alpha_1 i}$ トスル。α が全部有理数ニナル場合ニハ、コレヲ既約分数ノ形デ表ハストキ分母が N^r ヨリ大ニナルモノガ存在スレカラ、ソノ一ツヲ $\omega_1 = e^{2\pi\alpha_1 i}$ ニ取ル。ω_1 が Eigenwert トシテ現ハレル行列ノ一ツヲ A トシ、A ノ他ノ Eigenwert ヲ $\omega_k = e^{2\pi\alpha_k i}$ $(k = 2, \cdots\cdots, r)$ トスル。A ハ $\begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_r \end{pmatrix}$ ト ähnlich デアル。

サテ $0 < n_0 \leqq N^r$, $|\alpha_k n_0 - n_k| < \frac{1}{N}$ (※※) ニ適合スル整数 $n_0, n_1, \cdots\cdots, n_r$ が存在スル。然ラバ $0 < |\alpha_1 n_0 - n_1| < 1$

(※) $\mathfrak{G}$ が beschränkt デアルカラ unitäre Matrizen ヨリ成ル群ト同値デアル。コノ事実ヲ使ヘバ定理6ハ Cartan ノ定理ニ帰着セシメラレル。

(※※) コレハ Minkowski ノ定理ノ特殊ノ場合トシテ得ラレル事項デアルガ、Dirichlet ノ方法デ非常ニ簡単ニ証明サレル。

$S_p(A^{n_0}) = \omega_1^{n_0} + \cdots\cdots + \omega_r^{n_0}$. $S_p(E) = r$. $\omega_1^{n_0} = e^{2\pi n_0 \alpha_1 i}$

$= e^{2\pi(n_0\alpha_1 - n_1)i} \neq 1$.

$S_p(A^{n_0}) \neq S_p(E)$.

$$\left|S_p(A^{n_0}) - S_p(E)\right| \leqq \sum_k \left|\omega_k^{n_0} - 1\right| = \sum_k \left|e^{2\pi(n_0\alpha_k - n_k)i} - 1\right| < r\delta \sum_1^\infty \frac{\delta^{n-1}}{n!},$$

$$\delta = \frac{2\pi}{N}$$

$\varepsilon > 0$ ニ対シテ N ヲ適當ニ大ニ取ルコトニヨリ

$$|S_p(A^{n_0}) - S_p(E)| < \varepsilon, \quad S_p(A^{n_0}) \neq S_p(E)$$

ヨッテ $S_p(E)$ が $S_p(\mathfrak{G})$ ノ集積点ニナッテ假定ニ反スル. 故ニ $\{\omega\}$ ハ有限集合デアリ, 定理 2 ニヨッテ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。

定理 17. <u>$\mathfrak{G}$ が單位行列 E 以外ニ $(X-E)^\rho = 0$ ヲ満足スル元ヲ有セズ且ツ $S_p(\mathfrak{G})$ が有界デ $S_p(E)$ が $S_p(\mathfrak{G})$ ノ孤立点ナラバ $\mathfrak{G}$ ハ有限群デアル。</u>

(証明) 定理 2 ノ証明ト同様。