



Title	一次変換群ガ有限群ナルタメノ條件 II
Author(s)	浅野, 啓三
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 165, p. 423-429
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74652
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1723. 一次変換群が有限群ナルタメノ 条件 II.

浅野 啓三 (阪大)

先日 *Burnside* の定理ヲシラベテ見テ、ソノ結果ハ
ツタコトデシタガ、此ノ証明ヲ少シ *modify* スレバ本誌前
号 721 デ述ベタ最初ノ定理ハスガ証明サレテシマウノデシ
タ。ツイ不精ヲシテ始め = *Burnside* ノ論文ヲシラベレ
コトヲ急ツタタメ、前論文 I ハ要領ノ悪イ所バカリ多ク甚ダ
面目ナイ次第デスガ、今一度順序ヲ立テ述ベテ見タイト思
ヒマス。(多少重複スル部分ニアリマスガ前論文 I ハ参照シ
ナイデ始めカラやり直シマス)。

以下 K ヲ *Charakteristik Null* ノ *Körper* ト
スル。又 σ ヲ K ノ元ヲ組成分子トスル *Grad* r ノ正規
行列 (行列式 $\neq 0$ ナラザル行列) ヲ元トスル群トスル。

定理 I. σ が (σ 自身ノ表現ト考ヘテ) 完全可
約 (*vollständig reduzibel*) デアリ、 $\sigma =$ 属
スル行列ノ *Spur* 全体ノ集合 $S_p(\sigma)$ が有限集合ナラバ
 σ ハ有限群デアル。

(証明) 表現 σ ハ K ノ適當ナ拡大体 L ノ中デ考ヘ

テ既約表現 = 分解サレル。今 $\mathcal{O}$ ハ始メカラ既約表現 = 分解サレテキルト考ヘテ差支ヘナイ。然ラバ

$$A = (\overbrace{A_1, \dots, A_1}^{m_1}, \dots, \overbrace{A_t, \dots, A_t}^{m_t}) \quad (*) \quad A \in \mathcal{O}$$

コ、 $= A \rightarrow A_i (i=1, \dots, t)$ 、 $\mathcal{O}$ ノ同値ナラサル既約表現デアール。今ソノ $\text{grad} \rightarrow r_i$ トスル、

L ノ元ヲ係数トシテ $\mathcal{O}$ ヲ生成サレル L -Modul ヲ作レバ、Algebraノ表現論カラヨク知ラレテキル如ク、

$$L = \text{閉スル Rang } R = \sum_{i=1}^t r_i^2 \text{ ; (halbeinfacher) Ring}$$

ヲ得ル。換言スレバ $\mathcal{O}$ ノ中ニハ R 個ノ一次独立ナ行列が存在スル。コレヲ

$$A^{(\nu)} = (A_1^{(\nu)}, \dots, A_1^{(\nu)}, \dots, A_t^{(\nu)}, \dots, A_t^{(\nu)}) \quad \nu=1, \dots, R$$

トスル。 $X = (X_1, \dots, X_1, \dots, X_t, \dots, X_t)$ ヲ $\mathcal{O}$ ノ任意ノ元トスレバ

$$S_p(A^{(\nu)} X) = \sum_{i=1}^t m_i S_p(A_i^{(\nu)} X_i) = \sum_{i=1}^t m_i \sum_{j,k=1}^{r_i} a_{ijk}^{(\nu)} x_{ikj}.$$

$$\nu=1, \dots, R$$

即チ R 個ノ係数 x_{ikj} ハ R 個ノ聯立一次方程式ノ解ヲナス。

(*) $A, B, C, \dots$ ヲ行列トシ $\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & B & \\ 0 & & C & \dots \end{pmatrix}$ ナル形ノ行列ヲ $(A, B, C, \dots)$ デ表ハスコトニスル。

係数ノ行列式が $0 \neq$ ナイコトハ $(A_1^{(\nu)}, A_2^{(\nu)}, \dots, A_t^{(\nu)})$
 従ッテ $(m_1 A_1^{(\nu)}, m_2 A_2^{(\nu)}, \dots, m_t A_t^{(\nu)})$ ($\nu=1, \dots, R$)
 が一次独立ナルコトカラ知ラレルカラ解ハ唯一ツデアル。
 $S_p(A^{(\nu)} X)$ ハ全体トシテ有限個ヨリ存在シナイカラ X ノ
 係数ハ有限個ノ聯立一次方程式ノ解ヲナシ、従ッテ X ハ有
 限個ヨリ存在シナイ。

定理 2. ϕ が単位行列 E 以外 $= (X-E)^p = 0$
 ヲ満足スル元 X ヲ有セズ且ツ $S_p(\phi)$ が有限ナラバ ϕ ハ
 有限群デアル。

(証明) ϕ ハ (適當ニ拡大体ノ中ヲ考ヘテ) 既ニ
ausreduzieren サレヲキレト考ヘテ差支ヘナイ。即チ
 ϕ ノ元ハ

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{t1} & A_{t2} & \dots & A_{tt} \end{pmatrix}$$

ナル形ヲ取ルモノトスル。コノ $A \rightarrow A_{ii}$ ハ既約表現デア
 ル。假定ニヨリ

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{tt} \end{pmatrix}$$

トスレバ此ノ對應ハ *isomorph* デアル。ヨッテ定理 1ニ
 ヨリ ϕ ハ有限群。

定理 3. (Burnside) ϕ ノ元ノ Ordnung が
 beschränkt ナラバ ϕ ハ有限群デアル。

(証明) $X = E + S$ ($S \neq 0, S^p = 0$) とル行列,
 Ordnung の明カ = 無限デアルカラ α の中へ存在シ
 +イ。 $S_p(\alpha)$ が有限ナルコトハ $\alpha = \gamma$ クスル行列, 固有
 値が全体トシテ有限個ヨリ存在シ+イコトカラ當然デ
 アル。

定理 4. (A. Weil) α が有限群ナルタメノ必要且
 充分ナル条件ハ整係数ノ Polynom $F(x)$ が存在シテ
 $F(\alpha) \sim 0$ トナルコトデアル。 (コト = α^n ハ $\overbrace{\alpha \times \dots \times \alpha}^n$
 ナル Kronecker-積 (但シ α^0 ハ単位表現) ヲ示シ。ニ
 ツ以上ノ表現ノ和ハコレヲ diagonal = 並ベテ出来ル表
 現トスル。然ラバ正ノ整数ヲ係数トスル Polynom $f(x)$
 = 有シテ $f(\alpha)$ ナル表現ヲ定義サレル。

$\chi = F(x)$ ヲ整係数ノ Polynom トシ, 正係数又ハ
 負係数ノ項ヲ集メテ出来ル Polynom ヲ夫々 $f(x), -g(x)$
 トスル; $F(x) = f(x) - g(x)$. $f(\alpha)$ ト $g(\alpha)$ が同値
 ($f(\alpha) \sim g(\alpha)$) ナルトキ $F(\alpha) \sim 0$ ト書ク)

Lemma. A, B ヲ夫々 Grad m, n ノ行列トシ,
 Minimalpolynom が夫々 $(x-1)^p, (x-1)^q = +$ ルモノ
 トスル。然ラバ Kronecker ノ積 $A \times B$ ノ Minimal-
 polynom ハ $(x-1)^{p+q-1}$ デアル。

(証明) p 又ハ q が 1 = 等シイトハ明白デアル。
 $p > 1, q > 1$ トスル。 $A = E_m + S, B = E_n + T, (S^{p-1} \neq 0,$
 $S^p = 0, T^{q-1} \neq 0, T^q = 0)$

$$A \times B = E_{mn} + S \times E_n + E_m \times T + S \times T$$

$$(A \times B - E_{mn})^k = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=k} \alpha! \beta! \gamma! S^{\alpha+\gamma} X T^{\beta+\gamma}$$

$$(A \times B - E_{mn})^{p+\alpha-2} = S^{p-1} X T^{\alpha-1} \neq 0$$

$$(A \times B - E_{mn})^{p+\alpha-1} = 0$$

(定理, 証明) ϕ が有限群 + ラベ ϕ の同値 + ラザル
 凡テ, 既約表現ヲ $D_1, \dots, D_\ell$ トスルトキ $\phi^n \sim \alpha_{n1} D_1 + \dots$
 $\dots + \alpha_{n\ell} D_\ell$. ($\alpha_{n\ell} \geq 0$), コレヨリ容易 = $F(\phi) \sim 0$ ト
 + ル *Polynom* $F(x)$ ノ存在ガ合ル。

逆 = $F(\phi) \sim 0$ トスル. $F(x) = f(x) - g(x)$, $f(\phi) \sim$
 $g(\phi)$, 又 $f(x)$, $g(x)$ ノ *grad* ヲ夫々 m, n トスル.
 $m \neq n$. $\phi = \gamma$ ツスル行列 A , *Spur* $S_p(A)$ ハ $F(S_p(A))$
 $= 0$ ヲ満ス. ヨツテ $S_p(\phi)$ ハ有限集合.

$K = A \neq \phi = \gamma$ ツスル *Minimalpolynom* $(x-1)^p$
 + ル行列トシ, $A = E + S$ トスル. $S^p = 0$. $\overbrace{A \times \dots \times A}^k$
 ノ *Minimalpolynom* ハ *lemma* = $\exists$ $(x-1)^{k(p-1)+1}$
 従ツテ $f(\phi)$, $g(\phi) =$ 於テ $A =$ 対象スル行列, *Minimal-*
polynom ハ明カ = 夫々 $(x-1)^{m(p-1)+1}$, $(x-1)^{n(p-1)+1}$
 $=$ 等シイ. $f(\phi) \sim g(\phi)$ デアルカラ両者ハ一致シ
 $m(p-1)+1 = n(p-1)+1$. 故ニ $p=1$. ヨツテ定理 2
 $=$ ヨリ ϕ ハ有限群.

コレカラ特ニ K ハ複素数体トスル.

定理 5. ϕ が完全可約デ, $S_p(\phi)$ ガ *beschränkt*
 + ラベ ϕ ハ *beschränkt* デアル.

証明ハ定理 1 ノ証明ト同様デアル.

定理 6. ϕ が完全可約で、 $S_p(\phi)$ が beschränkt, 且つ $S_p(E)$ が $S_p(\phi)$ の孤立点ならば ϕ は有限群である。^(*)

(証明) ϕ = 属スル行列ハ凡ベテ diagonalform = transform ナレ且つ、Eigenwert の絶対値ハ 1 = 等シイ。サモナケレバ ϕ が beschränkt = ナラナ 1. 今 ϕ = ヲク スル行列、Eigenwert 全体 $\{\omega\}$ が無限集合ヲ作ルモノトシ、 N ヲ任意ニ大ナル整数トスル。 $\omega = e^{2\pi\alpha i}$ ($0 \leq \alpha < 1$) ト表ハサレシ。今 α ノ中無理数ニナルモノガアレバ、ソノ一ツヲ $\omega_1 = e^{2\pi\alpha_1 i}$ トスル。 α が全部有理数ニナル場合ニハ、コレヲ既約分数ノ形デ表ハストキ分母ガ N^r ヨリ大ニナルモノガ存在スレカラ、ソノ一ツヲ $\omega_1 = e^{2\pi\alpha_1 i}$ = 取ル。 ω_1 が Eigenwert トシテ現ハレル行列ノ一ツヲ A トシ、 A ノ他ノ Eigenwert ヲ

$$\omega_k = e^{2\pi\alpha_k i} \quad (k=2, \dots, r) \text{ トスル。 } A \text{ ハ } \begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_r \end{pmatrix}$$

ト ähnlich デアル。

サテ $0 < n_0 \leq N^r$, $|\alpha_k n_0 - n_k| < \frac{1}{N}$ ^(**) = 適合スル整数 $n_0, n_1, \dots, n_r$ が存在スル。然ラバ $0 < |\alpha_k n_0 - n_k| < 1$

(*) ϕ が beschränkt デアルカラ unitäre Matrizen ヨリ成ル群ト同値デアル。コノ事実ヲ使ヘバ定理 6 ハ Cartan ノ定理ニ帰着セシメラレル。

(**) コレハ Minkowski ノ定理ノ特殊ノ場合トシテ得ラレル事項デアルガ、Dirichlet ノ方法ヲ非常ニ簡単ニ証明サレル。

$$S_p(A^{n_0}) = \omega_1^{n_0} + \dots + \omega_r^{n_0}, \quad S_p(E) = r. \quad \omega_i^{n_0} = e^{2\pi n_0 d_i i} \\ = e^{2\pi(n_0 d_i - n_i) i} \neq 1.$$

$$S_p(A^{n_0}) \neq S_p(E).$$

$$|S_p(A^{n_0}) - S_p(E)| \leq \sum_k |\omega_k^{n_0} - 1| = \sum_k |e^{2\pi(n_0 d_k - n_k) i} - 1| < r\delta \sum_1^\infty \frac{\delta^{n-1}}{n!}, \\ \delta = \frac{2\pi}{N}$$

$\varepsilon > 0$ = 対シテ N ヲ適當ニ大ニ取ルコトニヨリ

$$|S_p(A^{n_0}) - S_p(E)| < \varepsilon, \quad S_p(A^{n_0}) \neq S_p(E)$$

ヨツテ $S_p(E)$ が $S_p(\mathcal{O})$ ノ集積点ニナツテ假定ニ反スル。

故ニ $\{\omega\}$ ハ有限集合デアリ。定理 2 = ヨツテ $\mathcal{O}$ ハ有限群デアイル。

定理 17. $\mathcal{O}$ が単位行列 E 以外ニ $(X - E)^p = 0$ ヲ満足スル元ヲ有セズ且ツ $S_p(\mathcal{O})$ が有限デ $S_p(E)$ が $S_p(\mathcal{O})$ ノ孤立点ナラバ $\mathcal{O}$ ハ有限群デアイル。

(証明) 定理 2 ノ証明ト同様。