OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	確率論ヘノ積分方程式ノ應用, VI（終リ）
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 165, p. 429-441
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74653
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

724. 確率論への積分方程式の應用, VI, (終り)

吉田　耕作 (阪大)

最近注目すべき文献が三つ出ました。

I. J. L. Doob: Stochastic processes

with an integral-valued parameter, Trans. Amer. Math. Soc. 44, 1 (1938) p. 87—150.

II. W. Doeblin: Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples, Bult. math. de la soc. Roumaine des sc. 39, 2 (1937) p. 3—61.

III. M. Fréchet: Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilites second livre (1938).

Iハ homogeneous ト stochastic process ヲ可附番無限次元空間ノ測度ノ見地カラ見直シテ G.D. Birkhoff, ergodic theorem ヲ武器トシテ取扱ハウト云フノデアリマス。正攻法 —— orthodox デアリ堂々タル論文デアリマス。併シ其ノ一般論カラ導クタメニ、Markov chain ニ関シテ得ラレタ結果ハ，極メテ巧ミナ議論ラシテヲルII ノ方ガズット良イ様デアリマス。

IIIハ「状態ノ数ガ有限ナ場合ノ Markov chain ニ関シテ最新ノ研究迄ヲ，数学ヲ専門トシナイ人ニモワカル様ニ平易」ニ百頁ヲ費シテ書イテアリマス。色々ナ細イコトヲ知ルコトガ出来テ便利デスガ、百科全書的デ良書デハアリマセウガ決シテ名著トハ思ヘマセン。

以下ニハ I, II ヲ参考シテ，前談話ノ定理ニヨリ状態ノ

数が無限大場合ノ Markov chain ヲ少シ調ベラミマス。
次ニハ Fréchet ノ書物ニ於ケル essential ト結ビト
談話 679 ノ定理トノ関係ヲ述ベマス。
尚角谷氏ハ Doeblin ノ論法ヲ一般ニシテ Kryloff ト
Bogoliouboff ノ所論 (Ann. of Math. 38, 1 (1937)) ヲ「流レ」ノミナラズ Markov process ヲ
モ含ムヨリモヨリ直セルコトヲ見出サレマシタ。線型 operator 及ビ之ノ見地カラ取扱ヘル homogeneous stochastic process ノ大事ナ文献モ Birkhoff ノ
ergodic theorem ニ関スルモノヲ除ケバ大体悉シタ
積デスカラ談話ハ一先ヅ之デ打切リマス。(1)

最後ニ談話ニ一方ナラヌ御助力ヲ受ケタ角谷靜夫氏ニ
厚ク感謝致シマス。

§11. レッノ収斂定理
(Markov 定理ノ extension)

定理. $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ ニ於ケル可測ナ函数 $p(x, y)$ ガ i) $p(x, y) \geqq 0$ 且ツ $\int_0^1 p(x, y)\,dy \equiv 1$
ii) $\bar{\varepsilon}_i \supset \bar{\varepsilon}_{i+1}$, $\lim_{i\to\infty} mes(\bar{\varepsilon}_i) \to 0$ ナル任意ノ可測集
合ノ系列 $\{\bar{\varepsilon}_i\}$ ニ対シ, 又ニ関シテ一様ニ $\lim_{i\to\infty} \int_{\bar{\varepsilon}_i} p(x, y) = 0$

---

(1) A. Khintchine 又 A. Kolmogoroff ノ, Birkhoff ergodic theorem ノ研究ハ又機会ニ報告シタイト
思ッテヲリマス。

ヲ満足スルトスル。然ラバ（0, 1）ニ於テ積分可能ナ任意ノ $f(x)$ ニ対シ

$$f_n(y)=\int_0^1 f(x)\frac{p(x,y)+p^{(2)}(x,y)+\cdots+p^{(n)}(x,y)}{n}dx \quad (1)$$

ガ（L ノ意味デ）強収斂スル。即チ $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f^*(x)-f_n(x)|dx$ トル如キ積分可能ナ $f^*(x)$ ガ存在スル。(2)

注意 1. 簡単ノタメ＝（0,1）デ考ヘタノデアルガ，之ハモット一般ニ出来ルコトハ明カデアル。

注意 2. Doob（loc. cit.）ハ $\frac{1}{n}\{p(x,y)+\cdots\cdots+p^{(n)}(x,y)\}=p_n(x,y)$ ガ x ヲ fix シタトキ y ノ函数トシテ弱収斂スルコト，即チ任意ノ可測集合 ε ニ対シテ $\lim_{n\to\infty}\int_\varepsilon p_n(x,y)dy$ ノ存在ヲ云ッテヲリマス。上定理ハズット precise デアリマス。(3)

---

(1) $p^{(n)}(x,y)=\int_0^1 p^{(n-1)}(x,z)p(z,y)dz$, $p^{(1)}(x,y)=p(x,y)$.

(2) 條件 ii) ハ点 x ガ点 y ニ移ル遷移確率ガ x ニツイテ〻一様〃ナコトヲ要求シテヲルノデアル。

(3) Doeblin（loc. cit.）ハ ii) ヨリ ユルイ條件（§12 ヲミラレヨ）ノモトニ $\lim_{n\to\infty}\int_\varepsilon p_n(x,y)dy$ ノ収斂速度ヲデ出シテヲリマス。我々ノ定理トハ互ニ含ミ合ッテヲリマセン。Doeblin ノ論文ヲ又精シク検討スベキ仕事ガ我々ニ残サレテヲル訳デス。

証明: 区間 $(0,1)$ ニ於ケル積分可能ナ函数全体 L ハ絶対値 $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ ノ意味デ Banach 空間ヲ作ル。Fubini ノ定理ニヨリ

$$\int \left| \int f(x)\,p(x,y)\,dx \right| dy \leqq \int |f(x)| \left\{ \int p(x,y)\,dy \right\} dx$$

$$= \int |f(x)|\,dx = \|f\|$$

ヲ得ルカラ線型函数変換 $T\cdot f(x) = g(y) = \int_0^1 f(x)\,p(x,y)\,dx$ ハ L ヲ L 内ニ写シ且ツ $\|T\| \leqq 1$ デアル。実ハ $\|T\|$ ナルコトハ $f(x) \equiv 1$ トスレバスグワカル。ヨッテ $\|T^n\| \leqq 1$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$。

Steinhaus ノ定理[1]ニヨリ L ハ weakly complete デアルカラ，単位球 $\|f\| \leqq 1$ ノ T ニヨル像が weakly compact ナコトヲ云フニハ，$\|f_i\| \leqq 1$ ヲ満足スル系列 $\{f_i\}$ ノ T ニヨル像が weakly convergent ナ部分列 $\{f_{i'}\}$ ヲ含ムコトガ云ヘレバヨイ。L ノ conjugate space ハ M（$(0,1)$ デ有界ナル可測ナ函数ノ全体）ダカラ[2]，結局 $\underset{0 \leqq x \leqq 1}{\text{l. u. b.}} |\alpha(x)| \leqq 1$ ナル如キ全ノ可測函数ニ対シ

$$\int \alpha(y) \left\{ \int f_{i'}(x)\,p(x,y)\,dx \right\} dy$$

ガ $i' \longrightarrow \infty$ ト共ニ収斂スル。

---

(1) S. Banach: Theorie des operations linéaires.

(2) S. Banach: loc. cit. p.

ナル如キ $\{f_{i'}\}$ ガ撰ベルトヨイ。所ガ再ビ Fubini ノ定理ヲ使フト上ノ積分ハ $\int f_{i'}(x)\{\int \alpha(y)\,p(x,y)\,dy\}\,dx$ ト書ケルカラ $\int \alpha(y)\,p(x,y)\,dy$ ノ全体ガ M ノ絶対値（函数ノ絶対値ノ maximum）ノ意味デ separable ナコトガ云ヘレバヨイ。何者，ソウスレバ $\{f_i(x)\}$ = diagonal verfahren ヲヤッテ $\{f_{i'}(x)\}$ ガ得ラレル。偖

$\beta(x) = \int \alpha(y)\,p(x,y)\,dy$ ノ形ノ函数全体ノ separability ノ証明。

l.u.b. $|\alpha(y)| \leqq 1$ ダカラ，$\alpha(y)$ ハ全テ，$(0,1)$ 内ノ有理数ヲ端点トスル区間デ絶対値ノ1ヲ越エナイヤウナ有理数値ヲトル階段函数 $\gamma(y)$ デ L ノ絶対値ノ意味デ，如何程デモ近似ヲ得ル。$\gamma(y)$ ノ全体ハ明カニ可附番デアル。故ニ $\alpha(y)$ ニ対シ $\lim_{n\to\infty}\int|\alpha(y)-\gamma_n(y)|\,dy = 0$ ナル如キ系列 $\{\gamma_n(y)\}$ ガ存在スル。

偖テ正整数 i ニ対シ上カラ $\int|\alpha(y)-\gamma_n(y)|\,dy \leqq \frac{1}{2^{2i}}$ for $n \geqq n_i$ ナル如キ n_i ガ定マル。$|\alpha(y)-\gamma_{n_i}(y)| > \frac{1}{2^i}$ ナル如キ y ノ集合ヲ ε_i トスレバ $mes(\varepsilon_i) \leqq \frac{1}{2^i}$。

今 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\cdots$ ナル如ク n_i ヲ定メタトスレバ，

$\bar{\varepsilon}_i = \sum_{j=i}^{\infty}\varepsilon_j$ = 属サナイ y デハ $|\alpha(y)-\gamma_{n_i}(y)| \leqq \frac{1}{2^i}$。

且ツ $\bar{\varepsilon}_i$ ノ点 y デハ $|\alpha(y)-\gamma_{n_i}(y)| \leqq |\alpha(y)|+|\gamma_{n_i}(y)| \leqq 2$。

$\bar{\varepsilon}_i \supseteq \bar{\varepsilon}_{i+1} \supseteq \cdots$ 且 $mes(\bar{\varepsilon}_i) \leqq \sum_{j=i}^{\infty} mes(\varepsilon_j) \leqq \frac{1}{2^{i-1}} \to 0$

$i \to \infty$。 故ニ定理ノ假定 i), ii) ニヨリ

$$\left| \int \alpha(y) p(x,y)\, dy - \int \gamma_{n_i}(y)\, p(x,y)\, dy \right|$$

$$\leq \int \left| \alpha(y) - \gamma_{n_i}(y) \right| p(x,y)\, dy$$

$$\leq \int_{\bar{\varepsilon}_i} 2p(x,y)\, dy + \frac{1}{2^i} \int_{(0,1)-\bar{\varepsilon}_i} p(x,y)\, dy \to 0 \quad \text{as } i \to \infty.$$

斯クシテ $\beta(x)$ 全体ノ中デ，$\beta'(x) = \int \gamma(y) p(x,y)\, dy$ ノ形ノ可附番個ノ函数ガ M ノ意味デ überall dicht ナコトガワカッタ。 —— 以上 ——

前談話ノ定理ニヨレバ $T_\infty \cdot f(x) = \int_0^1 f(x) p_\infty(x,y)\, dx$ ナル線型 operator ハ，T ノ固有値 1 ニ属スル固有空間ヘノ projection デアル。ヨッテ次ノ如キ確率論的解釈ガ下サレル：

允単位時間ノ後ニ x ガ y ニ移ル遷移確率密度ガ $p^{(n)}(x,y)$ デ與ヘラレル如キ Markov process ヲ考ヘル。$f(x) \geqq 0$, $\int_0^1 f(x)\, dx = 1$ ナル如キ密度分布 $f(x)$ ハ，time ニ関スル Césaro 平均ノ意味デ，stable ナ密度分布 $f^*(x)$ ニ收斂スル。即チ

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) p_n(x,y)\, dx = \int_0^1 f(x) p_\infty(x,y)\, dx = f^*(y),$$

$$\int_0^1 f^*(x) p(x,y)\, dx = f^*(y).$$

又明ニ $\int_0^1 p_\infty(z,x) p(x,y)\, dx = p_\infty(z,y)$ ガ成立スルカ

ラ，之ヲ fix シタトキ $p_\infty(z,x)$ ハ x ノ函数トシテーツノ stable ト密度分布ヲ与ヘル。projection ト云フコトカラ，任意ノ stable ＋密度分布 $f(x)$ ハ $\int_0^1 f(x)p_\infty(x,y)dx = f(y)$ ヲ満足スル。之レハ任意ノ stable ＋密度分布 $f(y)$ が special ＋ $p_\infty(x,y)$ ノ x ニ関スル convex closure トシテ得ラレルコトヲ示ス。

§12. Doeblin ノ條件ノ導入

以下 $p(x,y)$ ハ ii) ノ代リニモツトユルイ次ノ條件ヲ満足スルモノトスル：

Doeblin ノ條件　正数 ε, η が存在シテ，$mes(E) \leq \eta$ ナラ x ニ関シテ一様ニ

$$\int_E p(x,y)dy \leq 1-\varepsilon.$$

然ラバ

定理　T ノ固有値 1 ハ其ノ multiplicity 有限デアル。

証明：　若シ然ラズトスレバ，§3 ト全ク同様ニシテ[1]

$$(*)\begin{cases} \varphi_i(x) \geq 0, \ \int_0^1 \varphi_i(x)dx = 1, \ \int_0^1 \varphi_i(x)p(x,y)dx = \varphi_i(y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{fast überall} = \text{等シイ}) \\ \varphi_i(x)\varphi_j(x) \equiv 0 \quad (i \neq j) \end{cases}$$

---

(1)　§3 ニハ誤リガアッタ．談話 679 ニ訂正シテヲキマシタ．

ナル如キ可附番個ノ函数列 $\{\varphi_i(x)\}$ ガ得ラレル。之ガ不合理ナコトヲ云フトヨイ。

$\varphi_i(x)>0$ ナル x ノ集合ヲ ε_i トスルト，ε_i ト ε_j $(i\neq j)$ ハ共通点ヲモタヌ。然ルニ $mes(\varepsilon_i)\leq\eta$ トスルト，

$$1=\int_{\varepsilon_i}\varphi_i(y)\,dy=\int_{\varepsilon_i}dy\left\{\int_{\varepsilon_i}\varphi_i(x)\,p(x,y)\,dx\right\}$$ カラ

Fubini ノ定理ニヨリ $1\leq\int_{\varepsilon_i}(1-k)\varphi_i(x)\,dx=1-k$ ナル矛盾ヲ得ル。故ニ $mes(\varepsilon_i)>\eta$ デナケレバナラヌ。然ラバ $\{\varphi_i(x)\}$ ガ可附番無限個デハ困ル。ヨッテ実ハ上ノ如キ φ ハ $\varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots,\varphi_k$ ト有限ノ所デ切レル可キデアル。

系. §3 ノトキト同様ニシテ下ノ $f(x)=f(y)$, $f(x)\geqq 0$ ナル任意ノ $f(x)$ ハ $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots\cdots,\varphi_k(x)$ ノ non-negative ナ係数ニヨル一次結合トシテ表ハサレル。之ヲ fix スルト $p_\infty(z,x)$ ハ明カニ斯ル $f(x)$ ダカラ $p_\infty(z,x)=\sum_{i=1}^{k}c_i(z)\varphi_i(x)$, $c_i(z)\geqq 0$. 所ガ

$\int_0^1 p_\infty(z,x)\,dx\equiv 1$ ダカラ $\sum_{i=1}^{k}c_i(z)\equiv 1$. 故ニ §3 ト同ジク次ノ如キ解釈ガ下サレル：

最初 ε_i ニアッタ点ハ何時迄モ<u>確実ニ</u> ε_i 内ニ止ル。$(0,1)$ 上ノ任意ノ点ヘ，Césaro 平均ノ意味デ時間ノ増スト共ニ $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\cdots,\varepsilon_k$ ノ何レカニ<u>確実ニ</u>入ル。

今ーッ§1ノ Lemma 2ト同ジ様ニシテ

定理 Mノ点ヲMノ点ニ移ス線型 operator T: $Tf(y)=\int_0^1 p(x,y)f(y)\,dy=g(x)$ ヲ考ヘル。然ラバ T ノ絶對値1ノ固有値 λ ハ $\lambda^n=1$ （n整數）ヲ滿足スル。

尚 $p^{(n)}(x,y)$ ノ收斂ト T ノ絶対値1且ツ1ニ等シクナイ固有値ノ不存在トノ関係モ Doeblin ノ集合論的論法ヲ踏襲スレバ出セマスガ，論法が積分方程式トーす離レルノデ止メテヲキマス。當然積分方程式流（?）ノ証明ガデキル筈デス。デキタラ又御報告シマス。

§13. Fréchet ノ書物カラ

$p_{ij}\geqq 0$ 且ツ $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ滿足スル行列 (p_{ij})，m乘 $(p_{ij})^m=(p_{ij}^{(m)})$，$m\to\infty$ ニ於ケル asymptotic ナ狀態ヲ考ヘマス（§10 參照セラレメシ。）上記 Fréchet ノ書物ニハ次ノマヲナ分類ガ與ヘラレテアリマス。

1) $\lim_{m\to\infty}(p_{ij})^m$ ノ存在スル場合。コノタメノ必充條件ハ (p_{ij}) ガ1以外ニ絶対値1ノ固有値ヲモタヌコトデアル。

2) regular case 上ニ於テ $\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)}$ $(i,j=1,2,\cdots\cdots,n)$ ガイヅレモ最初ノ suffisc i ニ independent ナ場合。コノタメノ必充條件ハ1）ニ於ケルモノノ他ニ，1ガ (p_{ij}) ノ simple ナ固有値ナル

コトデアル。

3) positive regular case. 上ニ於テ $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j$ ガ全テ >0 ナル場合。コノタメノ必充條件ハ 2) ニ於ケルモノノ他ニ，(p_{ij}) ノ固有値 1 ニ屬スル固有ベクトルノ成分ガ全ベテ $\neq 0$ ナルコトデアル。

4) the most regular case. 2) ニ於テ $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ ガ全ベテ i ニモ j ニモ independent ナ場合。コノタメノ必充條件ハ 2) ニ於ケルモノノ他ニ，

$\sum_{i=1}^{n} p_{ik} = 1$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, n)$ ノ成立スルコトデアル。

以上ノ條件ハ全テ談話 679 ノ定理カラタヤスク出セマス。念ノタメニ定理ヲ今一度述ベマスト，

complex Banach 空間 $\mathfrak{L}$ ノ線型 operator T ガ (i) $\|T^n\| \leqq 1$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$，(ii) 整数 k 及ビ vollstetig ナ線型 operator V ガ存在シ $\|T^k - V\| < 1$. 然ラバ vollstetig ナ線型 operator $T_1, T_2, \cdots\cdots, T_l$ 及ビ線型 operator S ガ

$$\begin{cases} T = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i T_i + S, \quad T_i^2 = T_i, \ T_i T_j = 0 \ (i \neq j), \\ T_i S = S T_i = 0 \\ \|S^n\| \leqq \beta/(1+\varepsilon)^n \quad (\beta, \varepsilon \text{ 正数};\ n = 1, 2, \cdots\cdots) \end{cases}$$

ナル如ク存在スル。コニ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_l$ ハ T ノ絶対値 1 ノ固有値。

証明: $T=(p_{ij})$ トヲクト，任意ノ m ニ對シ

$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(m)}=1$, $p_{ij}^{(m)}\geqq 0$ ヘ明カダカラ T ハ條件 (i), (ii) ヲ満足スル。[1] ヨッテ定理ヘソノマヽ使ヘル。

故= 1) ハ明カ。 2) ハ次ノヤウニシテワカル。$x=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ ヲ任意ノヴェクトルト假定カラ

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(m)} x_j$$

ハ i = independent. 今ハ勿論 1) ノ case ダカラ之ハ，T ノ固有値 1 ニ屬スル固有空間ガ 1 次元ト云フコトニナル。何者，入,=1 トスルト上式ハヴェクトルト的ニ書クト $(\lim_{m\to\infty} T^m)\cdot x = T_1 x$ トナリ。T_1 ハ定理カラ明カニ T ノ固有値 1 ニ屬スル固有空間ヘノ projection ダカラ。從ッテ 3) モ亦明カ。

4) ハ次ノコトカラワカル。$\lim_{m\to\infty} p_{ij}^{(m)}=\frac{1}{n}$ ハ假定カラ明カ。然ラバ $p_{ik}^{(m+1)}=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(m)} p_{jk}$ ニ於テ $m\to\infty$ ナラシメルト $\frac{1}{n}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n} p_{jk}$ 即チ $\sum_{j=1}^{n} p_{jk}=1$ ヲ得ル。逆ニ 2) ノ條件ノ他ニ $\sum_{j=1}^{n} p_{jk}=1$ ガ成立シタトスルト Transposed matrix $T'=(p'_{ij})$, $p'_{ij}=p_{ji}$, ガ亦定理ノ條件ヲ満足スル。T ガ 2) ノ條件ヲ満足スルト T' ガ亦 2) ノ條件ヲ

---

(1) 有限次元ノ行列ハ勿論 vollstetig.

満足スルカラ $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ モ $\lim_{n\to\infty} p'^{(n)}_{ij}$ モ最初ノ saffix i = independent. 即チ $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ ハ i モ j モ independent.

— 以上 —

注意. Fréchet ハ尚 Césaro 平均 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}$ ヲ問題ニシテ semi-regular, semi-positive-regular, semi-most-regular 等ノ case ヲ定義シソレラ case ノタメノ條件ヲ與ヘテヲリマスガ，之レモ定理ニヨリ上ト同ジヤウニシテ求メラレマス。尚定理ニヨレバ積分 operator $\int p(x,y) f(x)\,dy$ ($p(x,y) \geq 0$, $\int p(x,y)\,dy \equiv 1$) ノ iteration ノ場合モ上ノ如キ分類並ビニ條件ノ出セルコトハ明カデス（談話 679 參照）。同ジ樣ニナキマスカラ繰リ返シマセン。

原稿ヲ書イテカラ J. Hadamard et M. Fréchet: Sur les probabilités discontinues des événements "en chaine", Zeitsch. für angew. Math. und Mech. 13 (1933) p. 92–97 ノ存在ヲ知リマシタ。少シ古イデスガ狀態ノ數ノ有限ナ場合ノ Markov chain ニ關スル，簡ニシテ要ヲ得タ名綜合報告デス。