OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Jordan 領域ノ Stabilité トCapacité, (III)
Author(s)	井上, 正雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 165, p. 442-450
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74654
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

125. Jordan 領域ノ stabilité ト Capacité, (III)

井上 正雄 (阪大)

Capacité ハ勿論 Frostman, de la Vallée Poussin ノ意味ニトル。

Jordan 領域 Θ ノ境界点 p ヨリノ距離ガ λ^{n+1}, λ^n ノ間ニアリ且ツ $\overline{\Theta}$ ニ含マレザル点集合 (閉) ノ capacité ヲ γ_n トスルトキ次ノ定理ガ成立スル。(1)

定理 I.

p ガ stable ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda^n}$$

ガ発散スルコトデアル。

(注) 充分條件トシテハ, アルーツノ入ニツイテ発散スレバヨイシ, 必要條件トシテハ、スベテノ入ニツイテ成立スル。Keldych, Laurentieff ハ $\lambda=\frac{1}{2}$ ノ場合ヲ C.R. (loc. cit) ニ証明ナシニ述ベテイル。

(証) 先ヅ $0<\lambda<1$ ナルアルーツノ入ニ對シテ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda^n}=+\infty$ トシヤウ。p ヨリノ距離ガ $\lambda^{\frac{n+1}{2}}$, $\lambda^{\frac{n}{2}}$ ノ間

---

(1) 証明ハ O.D. Kellogg. Fondation of Potential theory, P. 331–P. 334 ニアル方法ヲ用ヒタ。依ッテマタリ感心シタ証明デハナイヤウデアル。

=アリ且ツ $\overline{\mathfrak{D}}$ = 含マレザル点集合ヲ $e(\lambda^{\frac{n+1}{2}}, \lambda^{\frac{n}{2}})$ デ表ハスコトニレ，$\sigma_n = C(e(\lambda^{\frac{n+1}{2}}, \lambda^{\frac{n}{2}}))$ トスルトキ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\lambda^{\frac{n}{2}}} = \infty$$

トナルコトヲ先ヅ証明シマウ。

$e(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ = 含マレル régulier 且ツ $\lim_{i\to\infty} e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ナル領域列 $\{e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)\}$ ヲ考フレバ

$$C(\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)) \leqq C(\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n) \cdot \overline{C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}}) + C(\overline{\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n) - \overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n) \cdot C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}})$$

各境界点ガ定理1ノ條件ヲ満足スル如ク $e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ヲ撰ンデオケバ定理2及ビ領域ノ境界点ガ全部 stable ナラバ領域モ stable トナルコトヨリ。

$$\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n) \cdot \overline{C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}},\quad \overline{\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n) - \overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n) \cdot e_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}}$$

=含マレ且ツ之レニ近似スル régulier ナ領域列

$\{\Delta_j^{(1)}\}$, $\{\Delta_j^{(2)}\}$ ヲ夫々撰ビ，

$$\lim_{j\to\infty} C(\overline{\Delta_j^{(1)}}) = C(\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n) \cdot \overline{C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}})$$

$$\lim_{j\to\infty} C(\overline{\Delta_j^{(2)}}) = C(\overline{\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n) - \overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n) \cdot C_{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}}})$$

ナラシメ得ル。故ニ $\varepsilon_n > 0$ ヲ與ヘタトキ，j ヲ適当ニ撰ビ

$$C(\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)) - \varepsilon_n \leqq C(\overline{\Delta_j^{(1)}}) + C(\overline{\Delta_j^{(2)}})$$

ナラシメ得ル。

$$\therefore\quad C(\overline{e}_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)) - \varepsilon_n$$

$$\leqq c\left(e\left(\lambda^{\frac{2n+2}{2}}, \lambda^{\frac{2n+1}{2}}\right)\right)+c\left(e\left(\lambda^{\frac{2n+1}{2}}, \lambda^{\frac{2n}{2}}\right)\right).$$

即チ $\gamma_n - \varepsilon_n \leqq \sigma_{2n+1} + \sigma_{2n}$

$$\therefore \quad \frac{\gamma_n - \varepsilon_n}{\lambda^n} \leqq \frac{\sigma_{2n+1}}{\lambda^{\frac{2n+1}{2}}} + \frac{\sigma_{2n}}{\lambda^{\frac{2n}{2}}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{\lambda^n} < \infty$ ナル如ク最初ニ $\{\varepsilon_n\}$ ヲ撰ブコトガ出来ルカラ，結局

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\lambda^{\frac{n}{2}}} = \infty$$

ヲ得ル。

依ッテ $1 > \varepsilon > 0$ ヲ任意ニ與ヘタトキ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\lambda^n} = \infty$ 且 $1 > \lambda > 1-\varepsilon$ ナル如ク λ ヲ撰ブコトガ出来ル。更ニ K ヲ $\lambda^{K-1} < \varepsilon$ ナル如ク撰ブ。シカルトキ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{Ki}}{\lambda^{Ki}}, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{Ki+1}}{\lambda^{Ki+1}}, \cdots\cdots, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{K(i+1)-1}}{\lambda^{K(i+1)-1}}$$

ノウチ何レカ少クトモ一ツノ級数ガ発散シナケレバナラヌ。故ニ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{Ki}}{\lambda^{Ki}}$ ガ発散スルモノトシテヨイ。（他ノ級数ニツイテモ同様）。

次ニ任意ニ $\rho > 0$ ヲトリ $\lambda^K < \rho$ ナル如ク K ヲ定メル。$e_j(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ヲ大々ノ n ニ対シテ適當ニトリ，$\gamma_n^* = c\left(\overline{e_j}(\lambda^{n+1}, \lambda^n)\right)$ トスルトキ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{Ki}^*}{\lambda^{Ki}} = \infty$ ナ

ラシメ得ル。

サテ次ニ一般ニ $e_j(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ノ potentiel conducteur ヲ v_n トシ

$$\nabla_{m,m'} = \sum_{i=m}^{m'} v_{ki} \quad (m' \geqq m \text{ ニシテ } m' \text{ ハ後ニ定ム})$$

トスレバ，コノ函数ハ $c_{m,m'} = \sum_{i=m}^{m'} \overline{e}_j(\lambda^{k_i+1}, \lambda^{k_i})$ ノ点ヲ除イテ調和且ツコノ境界ノコメテ連続トナル。

更ニ $\overline{e}_j(\lambda^{k_n+1}, \lambda^{k_n})$ ノ境界上デハ，$v_{kn} = 1$，且ツ $i \neq n$ ナラバ

$$v_{ki} \leqq \frac{1}{\lambda(1-\lambda^{k-1})} \cdot \frac{\gamma^*_{ki}}{\lambda^{ki}}$$

トナル。(2)

故ニ $e_{m,m'}$ ノ境界上デハ

$$\nabla_{m,m'} \leqq 1 + \frac{1}{\lambda(1-\lambda^{k-1})} \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma^*_{ki}}{\lambda^{ki}} < \frac{1 + \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma^*_{ki}}{\lambda^{ki}}}{\lambda(1-\lambda^{k-1})}$$

$$\nabla'_{m,m'} = \frac{\lambda(1-\lambda^{k-1})\nabla_{m,m'}}{1 + \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma^*_{ki}}{\lambda^{ki}}}$$

トオケバコノ調和函数ハ $e_{m,m'}$ ノ境界上デ常ニ $\leqq 1$ デアル。

---

(2) 一般ニ閉集合 F ノ potentiel conducteur ヲ ∇ トスルトキ

$$\frac{c(F)}{\underset{z \in F}{0.g.d(p,z)}} \geqq \nabla(p) \geqq \frac{c(F)}{\underset{z \in F}{n.G.d(p,z)}}$$

ガ成立スル。

(O.D. Kellogg. loc. cit p. 331)

次ニ $\{\mathfrak{D}^2_{n,\rho}\}$[3] ヲ考ヘルヲ充分大キクトレバ $\overline{C_\rho}$ 内ノ $\mathfrak{D}^2_{n,\rho}$ ニ含マレナイ閉集合 $\mathfrak{D}^{2*}_{n,\rho}$ ガ $e_{m,m'}$ ヲ含ムヤウニスルコトガ出来ル。コノ閉集合 $\mathfrak{D}^{2*}_{n,\rho}$ ノ potentiel conducteur ヲ $\nabla_{n,\rho}$ トスレバ

$$\nabla_{n,\rho} \geqq \nabla_{m,m'}$$

次ニ p ヲ中心トシテ半径 r 内ノ $\mathfrak{D}$ ノ点ニ對シテハ（但シ $r < \lambda^{Km+1}$）

$$\nabla_{m,m'} \geqq \sum_{i=m}^{m'} \frac{\gamma^*_{Ki}}{r+\lambda^{Ki}} \qquad (2)$$

従ッテ

$$\nabla_{n,\rho} > \lambda(1-\lambda^{K-1}) \frac{\sum_{m}^{m'} \frac{\gamma^*_{Ki}}{r+\lambda^{Ki}}}{1+\sum_{m}^{m'} \frac{\gamma^*_{Ki}}{\lambda^{Ki}}}$$

トナル。

$$\sum_{m}^{m'} \frac{\gamma^*_{Ki}}{\lambda^{Ki}} = D(m',m) \text{ トスレバ}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sum_{m}^{m'} \frac{\gamma^*_{Ki}}{r+\lambda^{Ki}}}{1+\sum_{m}^{m'} \frac{\gamma^*_{Ki}}{\lambda^{Ki}}} = \frac{D(m',m)}{1+D(m',m)}$$

$\lim_{m'\to\infty} D(m',m) = \infty$ ナル故，m' ヲ充分大キクトッテオキ（例ヘバ $\frac{D(m',m)}{1+D(m',m)} > 1-\varepsilon$ ナル如ク），次ニ r ヲ充分小サクトレバ

---

(3) $\mathfrak{D}^2_{n,\rho} = \mathfrak{D}^2_n \cdot C_\rho$

カクテ

$$\frac{\sum_{m}^{m'} \frac{r_{\kappa i}^{*}}{r+\lambda^{\kappa i}}}{1+\sum_{m}^{m'} \frac{r_{\kappa i}^{*}}{\lambda^{\kappa i}}} > 1-\varepsilon$$

ナラシメ得ル。

依ッテ $\nabla_{n,\rho} > (1-\varepsilon)^3$

$\therefore \quad \nabla_{\rho} \geqq (1-\varepsilon)^3 \qquad$ (但シ $|z-p| < r(\varepsilon)$ ナル z = 対シテ)。

ε ハ任意デアッタカラ，結局

$$\lim_{z \to p} \nabla_{\rho}(z) = 1$$

故ニ，系（前号，p.391）ニヨリ，p ハ stable + 境界点デアル。

次ニ必要ナルコトヲ証明スル代リニ，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{\lambda^n}$ が収斂スレバ p ハ stable デナイコトヲ証明シヨウ。

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{\lambda^n}$ が収斂スレバ，任意ノ λ（$0 < \lambda < 1$）ニ対シテ，m ヲ充分大キクトレバ $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{r_n}{\lambda^n} < \frac{\lambda}{4}$ ナラシメ得ル。サテ若シ p が stable ナラバ系ニオイテ $\rho = \lambda^m$ ト考ヘテ得ラレル極限函数ヲ $\nabla_m(z)$ トスレバ

$$\lim_{z \to p} \nabla_m(z) = 1.$$

故ニ p ヲ中心トシテ一ツノ球 $C_{\rho(m)}$ ヲ画キ $\mathfrak{D}$ ニ属スレコノ球面 $S(C_{\rho(m)})$ 上デ $\nabla_m(z) > \frac{3}{4}$ ナラシメ得ル。又一方 $m' > m$ ナル m' ヲ適当ニ大キクトリ，$S(C_{\rho(m)})$ 上

デハ $\nabla_{m'+1}(2) < \frac{1}{4}$ ナラシメ得ル（コレハ m' ヲ充分大キクトレバヨイ —— $\nabla_{m'+1}(2)$ ハ系＝オイテ $\rho = \lambda^{m'+1}$ トシテ得ラレル極限函数）。

サテ $\overline{e_i}(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ノ potentiel conducteur ヲ $v_{n,i}$ トスレバ

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{n=m}^{m'} v_{n,i} = \nabla_{m,m'}$$ トスレバ

$$\nabla_m \leqq \nabla_{m'} + \nabla_{m,m'}.$$

コレハ次ノ如クニシテ証明サレル。

$\nabla_m = \lim_{i\to\infty} \nabla_{m,i}$; $\nabla_{m,i}$ ハ $\overline{\vartheta^{2*}_{i,\lambda^m}}$ ノ potentiel conducteur ; ϑ^2_n ＝充分ノ régularite（各境界点デ定理ノ条件ヲ満足スル如キ）ヲ挟ヘテオイタモノトシ，$\{\nabla_{m'+1,i,j}\}, \{v_{n,i,j}\}$ $(n = m, \cdots\cdots, m')$ ヲトモニ $\vartheta^{2*}_{i,\lambda^{m'+1}}, \{e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)\}$ ノ夫々トッタ régulier 領域ノ potentiel conducteur ニシテ，$\lim_{j\to\infty} \nabla_{m'+1,i,j} = \nabla_{m'+1,i}$, $\lim_{i\to\infty} \nabla_{m'+1,i} = \nabla_{m'+1}$; $\sum_{n=m}^{m'} \lim_{j\to\infty} v_{n,i,j} = \nabla_{m,m',i}$, $\lim_{i\to\infty} \nabla_{m,m',i} = \nabla_{m,m'}$ ナル如ク取ルコトガ出来ル。

シカラバ $\nabla_{m,i} \leqq \lim_{j\to\infty} \nabla_{m',i,j} + \sum_{n=m}^{m'} \lim_{j\to\infty} v_{n,i,j}$,

依ッテ

$$\nabla_m \leqq \nabla_{m'} + \nabla_{m,m'}.$$

故= $S(C_{\rho(m)})$ 上デハ

$$\frac{3}{4} \leqq \frac{1}{4} + \nabla_{m,m'}$$

$$\therefore \quad \nabla_{m,m'} \geqq \frac{1}{2}.$$

サテ $\rho(m) \neq \lambda^i$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ ナル如ク最初ニ撰ンデオケバ，$e_i(\lambda^{n+1}, \lambda^n)$ ノ境界上デハ 1，$\nabla_{m,m'} \geqq \frac{1}{2}$ ナル $S(C_{\rho(m)})$ 上デハ $\frac{1}{2}$，$S(C_{\rho(m)})$ 上ノ他ノ点デハ 0 ナル値ヲトル $C_{\rho(m)}$ 内デノ調和函数ヲ Φ_i トスレバ p ノ極ノ小サイ近傍デハ

$$\nabla_{m,m'} \geqq \lim_{i\to\infty} \Phi_i \geqq \frac{1}{2},$$

従ッテ $\nabla_{m,m'} \geqq \frac{1}{2}$ トナル（ヨッテ勿論 $\nabla_{m,m'}(p) \geqq \frac{1}{2}$）．

何故ナラバ，Φ_i が境界上デ 0 ナル点集合ノ測度ハ $i \to \infty$ トトモニ $\to 0$ トナリ，定理3ノ証明ノトキト同様ニシテ $\Phi_i \geqq \frac{1}{2}$ ヲ導クコトガ出来ルカラデアル。

シカルニ $\nabla_{m,m'}$ ノ p ニ於ケル値ハ

$$\nabla_{m,m'}(p) = \lim_{i\to\infty} \sum_{m}^{m'} v_{n,i}(p) \leqq \sum_{n=m}^{m'} \frac{r_n}{\lambda^{n+1}} \qquad (2)$$

$$\leqq \frac{1}{\lambda} \sum_{m}^{m'} \frac{r_n}{\lambda^n}$$

$$< \frac{1}{4}$$

トナッテ予盾トナル．故ニ p ハ stable デナイ。

即チ p ガ stable ナラバ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{\lambda^n} = \infty$ デアル。 C.Q.F.D.

Keldych, Laurentieff ノ point de stabilité ノ定義ハ〝イカナル F = 対シテモ，$\varliminf_{z\to p} H^{(1)}(z, F, \Theta) = \varliminf_{z\to p} H^{(2)}(z, F, \Theta)$ トナルトキ p ヲ point de stabilité ト呼ブ〟ト云フノデアルガ，以上デ談話(I)ニ於ケル stable ノ定義モ本質的ニハ何等ノ変リノナイコトガ分ッタ。勿論 stable ト云フ言葉ノ意味ヲ理解スルニハ K.L ノ定義ノ方ガ良イダロウ。以上デ大体ノ話ヲ一先ヅ打切ラウ。

最後ニ〝régulier デアッテ stable デナイ境界点ノ存在〟或ハ〝stable デナイ Jordan 領域ノ存在〟ノ証明ガ未発表デアルコトヲ附加シテオカウ。

〔前号ノ訂正〕

tribial ト誤リヲ除イテハ，P.385 ニ於ケル計算中 $+4\pi U_n(0)$ トアルノハ皆 $-4\pi U_n(0)$ ノ誤リデアル。