



Title	確率法則ノ分解問題, I
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 165, p. 450-455
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74655
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

726. 確率法則ノ分解問題, I

北 川 敏 男 (阪大)

§1. 本誌 682 号ニ於テ彷徨函数 (random functions) ノ紹介ヲ試ミタ。ソノ「結び」ニ於テ附言シタ如ク、彷徨函数ノ理論ハコレヲ、モット一般ノ確率現象ノ特別ノ場合トミルコトニヨリソノ意味ガハツキリシテ來ル。ソノ

確率現象トイフノハ, Lévy, Khintchine ノ 盛ン = 研究シテ居ル無限 = 分解可能 + 確率法則 (Lois indéfiniment divisibles) デアル。更ニコノ數年来ノ傾向トシテ、無限 = 分解可能 + 確率法則ノ研究カラ進ンデ、一般ノ確率法則ノ分解問題ニ漸近論及シツツアルノガ、コノ方面ノ現状デアル。以下、ソノ概略ヲ紹介シヨウト思フ。

§2. 基本的 + 準備事項 以下特別ノ断リノナイ限リ、專ラ、一次元ノ確率変數, 即チソノトル値ガ實數デアルヤウ + 確率変數ノミヲ問題トスル。確率変數ヲ X, Y 等デ表ハス。

(I) 分布函數 $P_X[X \leq x] = F(x) = \text{ヨリ}$. 或ハソノ特性函數 (fonction caractéristique)

$$(1) \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

= ヨリ、 X ノ確率法則 $\mathcal{L}$ ヲ定義スル。 X_1, X_2 ノ特性函數ヲ夫々 $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ トスレバ、 X_1, X_2 ガ独立ナトキニハ、 $X_1 + X_2$ ノ特性函數ハ $\varphi_1(t) \varphi_2(t)$ デアルカラ、 $X_1, X_2, X_1 + X_2$ ノ確率法則ヲベ $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}$ トスルト、標記的ニ

$$(2) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \quad (\equiv \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2)$$

ナル記法ヲ用ヒテモ宜シカロウ。コノトキ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1$ ト書イテモヨイ。[$\varphi_1(t) \varphi_2(t) = \varphi_2(t) \varphi_1(t)$ ガカチ]。凡ベテノ確率法則ノ集合 $\mathcal{L}$ ハ、ソノ任意ノ二ツノ元ニ對シテ上記ノ意味ノ乘法ガ定義サレ、ソノ乘法ハ可換デアル。

吾々ハ / ナル記号ニヨリ、スベテ、 $\mathcal{L} = \text{対シテ } \mathcal{L} \times /$
 $= \mathcal{L}$ トナル確率法則ヲ意味スル。カナル / ヲ確率法則ト
 スル確率変数ハ、 0 ノミヲバ唯一ツノ可能値トスルモノ、
 即チ $\Sigma \equiv 0$ デアルコトガ容易ニワカル。

次ニ、 $\mathcal{L}$ ガ単位法則 (*loi unité*) トイフノハ、
 $\mathcal{L}\mathcal{L}' = 1$ トナルヤリナ確率法則 $\mathcal{L}'$ ノ存在スルトキニイフ。
 カナル単位法則ノ特性函数ハ e^{mit} ナル形ヲトルコトガイ
 ヘル。〔ソニテ証明スルニハ、 $\mathcal{L} = \text{從フ確率変数 } \Sigma$ ガ
 ニ個以上ノ相異ル値ヲトルトスルト、 $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ スソウデナケレ
 バナラヌ、コレハ $\mathcal{L}\mathcal{L}' = 1$ ニ反スル〕ソコデユノ法則ヲ
 $\mathcal{U}^m$ デ表ハサリ。($\mathcal{U}$ ハ $m=1$ ニ對應スルモノト考ヘ
 テ)。

一般ニ、 $\mathcal{L}$ ノ特性函数ヲ $\varphi(t)$ トスルトキ、若シ
 $\varphi^\lambda(t)$ ヲ特性函数ニスル確率法則が存在スレバ、コレヲ
 $\mathcal{L}^\lambda$ ヲ以テ表ハス。

(II) 平均散縮度 (*dispersion moyenne*) 任意ノ
 確率分布 $F(x)$ ニ對シテ

$$(3) \quad Q(l) = \text{Max.} \left[F(x+l+0) - F(x-0) \right] \\ -\infty < x < \infty$$

$$(0 < l < \infty)$$

が存在スル。コレハ長さ l ノ閉區間ニ對應スル密度ノ最大値
 デアル。ソノ逆函数 $l = w(\mu)$ ヲ稱シテ *dispersion* (假
 使リニ散縮度ト訳サリ) トイフ、コレハ $0 < \mu < 1$ ニ定義サ
 レテ居ツテ、明カニ單調非減少デアルガ $w(1-0) = +\infty$ ト

ナルカ $\in$ 知レナイカラ、必ズシモ $\int_0^1 \omega(x) dx$ ハ存在シナイ
 恐レガアル。ヨツテ、 $\omega(x)$ [$0 < x < 1$]ノ平均値即チ、
 平均散縮度トイフベキモノトシテ、Lévyハ、 $\lambda(\omega)$ ト
 イフ、 $\omega > 0$ ヲ定義サレ、連続、單調純増加デ且ツ $\omega(0+)$ 、
 $\omega(+\infty)$ ガ共ニ有限ナキヲ函数ヲ導入シテ、〔例ヘバ、
 $\omega/\sqrt{1+\omega^2}$ 、又ハ $\omega/(1+\omega)$ トドヲトレバヨイ〕、コレ=ヨ
 ツテ

$$(4) \quad \delta_\lambda(\mathcal{L}) = \lambda^{-1} \left\{ \int_0^1 \lambda[\omega(x)] dx \right\}$$

ヲ定義シ、ユノ $\delta_\lambda(\mathcal{L})$ ヲ以ツテカク稱シヌ。コノ $\delta_\lambda(\mathcal{L})$
 ハ補助=用キテ函数 λ =ヨリ、一般=コトナル値ヲトルケ
 レドモ、スベテノ確率法則=対シテ、同じ λ ヲ用キルコト
 =スレバ、以下ノ議論=ハ、 λ ハ上記ノ條件ヲ充スカザリ
 何デアツテモヨイ。ソコデ $\delta_\lambda(\mathcal{L})$ トハ書カズ、單= $\delta(x)$
 又ハ δ ト書カウ。

平均散縮度ハ次ノ重要ナ性質ヲモツ： $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \mathcal{L}'' =$ シ
 テ、 $\mathcal{L}''$ ガ單位法則デナケレバ、 $\delta(\mathcal{L}) > \delta(\mathcal{L}')$ 。コノ
 事實ヲ換言スレバ、独立ナ確率変数ヲ加フル度=、平均散
 縮度ハ、trivialナ場合（單位法則ヲモツ確率変数ヲ加
 フル場合）ヲ除イテハ、確カ=増加スル。コレヲ平均散縮度
 増加ノ原理ト呼ブ。

独立ナ確率変数ヲ加フル度=、ソノ結果増加スルモノ
 トシテハ、標準偏差ガアル。シカシ、コレハスベテノ分布函
 数=ツイテ存在スルト限ヲナイモノデアル。Liapounoff,

Kolmogoroff 等、盛シ=用キタ=モ係ラズ標準偏差
ハコノ点=缺點ガアル。コレヲ、上ノ如キ平均散縮度デオ
キカヘタノハ Lévy ノ功トイッテ宜シカロウ。

(Ⅲ) 独立ナ確率変数ノ系列 $\{X_n\}$ = 於テ $\sum_{k=0}^n X_k$ ノ法
則 $L, L_2, \dots, L_n$ ガ $n \rightarrow \infty$ ノトキ如何ナル behaviour
ヲナスカ=就イテハ, Lévy ノ研究ガアル。

適當ナ常数列 $\{a_k\}$ ヲトツテキテ $\sum_{k=1}^n (X_k - a_k)$ ヲツ
クルト、コノ確率変数ノ法則ガ $n \rightarrow \infty$ ノトキ、或ル確率
法則=收斂スルヲバ, $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ (又ハ $\prod_{k=1}^n L_k$) ハ法則收斂
=歸セシメウルト云ヒ、如何= $\{a_k\}$ ヲトツテ来テモ上記
ノコトガ不可能ヲバ, $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ (又ハ $\prod_{k=1}^n L_k$) ハ法則收斂
=歸セシメ得ナイト云フ。或ハ、夫々 *quasi-convergente*,
essentiellement divergente トモイフ。コレヲハ
次ノ如ク特徴付ケラレル:

$$(5) \quad \begin{cases} (1^\circ) & \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(L, L_2, \dots, L_n) < \infty \text{ ヲバ } \textit{quasi-conv.} \\ (2^\circ) & \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(L, L_2, \dots, L_n) = \infty \text{ ヲバ } \textit{essent. div.} \end{cases}$$

以上ヲ先ガ準備トシテ述ベテ置ク。

§3. Kノ構造=關スル Khintchineノ基本定理.

或ル確率法則 L ガ分解不可能 (*indécomposable*)
トイフノハ、共=單位法則デナイ L' , L'' = 依ッテ、 $L' \cdot L'' =$
 L トシテ表ハス事ガ不可能ナイトヲ意味スル。

或ル確率法則 L ガ無限=分解可能 (*indef.*)

divisible) トイフハ、 $\varepsilon > 0$ ナ如何ニ與フルトモ、次ノヤリナ確率法則 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n$ カ選ベルコトヲイフ:

$$(6) \quad \begin{cases} (1^\circ) & \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \dots \mathcal{L}_n \\ (2^\circ) & \delta(\mathcal{L}_{l_k}) < \varepsilon \quad (l_k = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

コレヲノ概念ノ重要ナコトハ次ノ定理ニ窺ハレヌ:

定理 1. (Khintchine) 凡ベテノ確率法則 $\mathcal{L}$ ハ必ズ次ノ形ニ表ハシ得ル: $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \mathcal{L}''$, 但シ、茲ニ $\mathcal{L}'$ ハ或ル分解不可能ナ確率法則ノ有限個又ハ無限個ノ積ヲ $\mathcal{L}''$ ハ無限ニ分解可能ナル確率法則ヲ表ハス。

コノ定理ノ証明ニ先立テ、次号ニ於テハ分解不可能ナ確率法則、又無限ニ分解可能ナル法則トハ如何ナルモノカヲ調べヨウ。

—— (続ク) ——