



Title	W. Doeblinノ論文紹介 I
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 166, p. 459-476
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74658
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

728. W. Doeblin / 論文紹介 I

角 谷 静 夫 (阪大)

本号ニテハ W. Doeblin / 論文 Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certaines types de chaînes simple, Bulletin mathématique de la Soc. Roumaine des Sciences, 39 (1937) ヲ紹介スル。コレハ表題ノ示ス如ク simple + probability / 方則ニ従フ場合ノ点ノ運動ヲ論ジタモ、デアル。論文ハニツノ部分ニ分レ、第一ノ論文ハ有限個 (又ハ可附番個) ノ事象ノ場合 —— 所謂 Markoff / chain —— ヲ論ジ。第二ノ論文ハ一般ノ continuum / 場合ヲ論ジテキル。ココニ紹介スル、ハ第二ノ論文ノ最初ノ一部デ、曩ニ吉田氏ガ紹介サレタ Fréchet 及ヒ Kryloff - Bogoliouboff^{*}ノ結果ノ擴張デアル。コレハ原論文デハ僅カ 10 頁ニ足ラ

* 紙上談話會 160 号, 161 号。

M. Fréchet: Sur l'allure asymptotique des densités itérées dans le problème des probabilités en chaîne, Bull. de la Soc. math. France, 62 (1934).

N. Kryloff et N. Bogoliouboff: Sur les propriétés ergodiques de l'équation de Smoluchovsky, Bull. de la Soc. math. France, 64 (1936)

又部分ダイヤルが書き方が非常 = *concise* デアル上 =、
証明 = 不完全ナ所モ多少アルノデコレヲ余リ易ク書きナ
ホシテ紹介スルコト = シタ。

§1. 問題ノ説明

Ω ヲ與ヘラレタ点集合トセヨ。⁽¹⁾ Ω ノ点ヲ $x, y, z,$
-----ニテ表ハシ、 Ω ノ部分集合ヲ $E, F, G, \dots$ ニテ
表ハス。 Ω ノ部分集合ヲ全部考ヘルノデハナク、我々 = 必
要ナノハソノウチノ一部分ダイヤル。コレヲ *Borel* 集合⁽²⁾ト
ヨブコト = シ、コレヲ $\mathcal{L}$ ニテ表ハス。 $\mathcal{L}$ ハ次ノ性質ヲモツ
テキルモノトスル。

(i) $\Omega \in \mathcal{L}, \Lambda \in \mathcal{L}$ (Λ ハ空集合)

(ii) $E \in \mathcal{L}$ ナラバ $\Omega - E \in \mathcal{L}$

(iii) $E_n \in \mathcal{L}$ ($n = 1, 2, \dots$) ナラバ

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{L}, \quad \prod_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{L}.$$

今 Ω 内ノ点ガ或ル確率ノ法則ニ従ツテ運動スルモノト
スル。即チ最初 = $x \in \Omega$ = アツタ点ガ單位時間ノ後 = ^(2a)

(1) Ω = 關スル *topology* ハ今ハ考ヘナイ。後デ必要 = ナルケ
レドモ。

(2) Ω = *topology* ガアルトキニハコレハ Ω ノ普通ノイミノ
Borel 集合ト考ヘル。

(2a) 時ガ連続的ニ変化スル必要ハナイ。即チ單位時間ハソレ
以上ニ分割不可能デアツテモ差支ナイ。

$E \in \mathcal{L}$ = ハイッテ來ル確率が $P(x, E)$ デアルトセヨ。
 コノ $P(x, E)$ ハ、次ノ條件ヲ満足スルモノトスル。

(1) $P(x, E)$ ハ、運動點ガ x = 來ル前 = ドコ = マッタ
 カト云フコト = ハ 無關係デアル。コノトキ確率ノ法則ハ
simple デアルト云フ。

(2) $P(x, E)$ ハ 時刻 = ハ 無關係デアル。コノトキ確率
 ノ法則ハ *temporally homogeneous* デアルト云
 フ。

(3) $P(x, E)$ ハ x ヲ *fix* スルト E = 関シテ
totally additive, non-negative + 集合函數
 ナリツ $P(x, \Omega) = 1$ 。

(4) $P(x, E)$ ハ E ヲ *fix* スルト x = 関シテ
Borel-measurable デアル。即チ任意ノ *real*
number α, β = 對シテ $\int_{\Omega} [\alpha < P(x, E) < \beta] \in \mathcal{L}$
 デアル (但シ E ハ 固定)。

此ノ如ク $P(x, E)$ ガ 與ヘラレルトキ、單位時間ノ n
 倍ノ經過ノ後、最初 = x = マッタ 點ガ E = ハイッテ來
 ル確率 $P^{(n)}(x, E)$ ハ、次ノ式 = ヨッテ歸納的 = 定義サ
 レル。

$$P^{(n)}(x, E) = \int_{\Omega} P^{(n-1)}(y, E) \cdot P(x, de_y);$$

$$P^{(1)}(x, E) \equiv P(x, E) \quad (4)$$

脚註 (4) ハ 次頁ヘ

$P^{(n)}(x, E)$ は又明か = (1) - (4) を満足スル函数ナル。又一般 =

$$P^{(m+n)}(x, E) = \int_{\Omega} P^{(n)}(y, E) P^{(m)}(x, de_y)$$

が成立スルコトも明かデアロウ。

我國ノ目的トスルノハ $n \rightarrow \infty$ ナルトキノ $P^{(n)}(x, E)$ ノ状態デアル。コレが何カ = 収斂シテ呉レレバ非常ニ都合ガヨイガ。ソレハ一般ニハ緊目デアル。ヨツテ又

$$\Pi^{(n)}(x, E) \equiv \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^{(m)}(x, E) \text{ トオイテ } \Pi^{(n)}(x, E)$$

ノ $n \rightarrow \infty$ ナルトキノ状態ヲモシラベル必要ガアル。シカシコレモ條件ナシデハ一般ニハ成立シナイ。Kolmogorov ハコゝニ次ノ條件ヲ入レテキル。

(*) Ω デ定義サレタ measure $m(E)$ ヲ適當ニトレバ、コレニ對シテ integer N , positive number

(4) Ω デ定義サレタ totally additive + 集合函数 $\varphi(E)$ 及ビ Borel-measurable + 有界 + 函数 $f(x)$ = 對シテ積分 $\int_{\Omega} f(x) \varphi(de_x)$ ハ次ノ如ク定義サレル。

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(de_x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k}{m} \varphi(E_{m,k}).$$

$$E_{m,k} = E_x \left[\frac{k}{m} \leq f(x) < \frac{k+1}{m} \right]. \quad (f(x) \text{ ハ有界デア})$$

ルカラ $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}$ ハ實ハ有限個ノ和トナル。

$b, \eta > 0$ が存在シテ $x = \text{関シテ uniformly} =$
 $m(E) < \eta$ ナラバ $P^{(N)}(x, E) < 1 - b.$

トナル。

コノ $m(E)$ が Ω で定義サレタ measure デアル
 ト云フノハ、 $m(E)$ が任意ノ $E \in \mathcal{L}$ = 對シテ定義サ
 レタ *totally additive, non-negative* ナ
 集合函数デ且ツ $m(\Omega) = 1$ トナルコトデアル。

コノ條件が *Fréchet* ノ條件ヨリ一般デアルコトハ容
 易ニワカル。實際 *Fréchet* ハ、アル measure $m(E)$
 = 對シテ

$$P(x, E) = \int_E P(x, y) m(dy)$$

ト書き得テ、且ツ $P(x, y)$ が有界トナルコトヲ假定シテ
 キルカラ、 $P(x, y) \leq M$ トスレバ $\eta < \frac{1-b}{M}$ 對シテ

$$m(E) < \eta \rightarrow P(x, E) \leq \eta M < 1 - b$$

トナル。

Doebelin ハコノ條件ノ下ニ $P^{(n)}(x, E)$ 、 $n \rightarrow \infty$
 ナルトキノ状態ニ関シテ色々面白い結果ヲ得テキル。
Doebelin ノ結果ガ、コノ方面ノ結果トシテハ現在ノ所一
 バン詳シイ結果デアリ、且ツソノ條件ガ他ノモノニ比シテ緩
 イモノデアルコトハ注目ニ値スル。

Doob ⁽⁵⁾ ハ最近、同様な問題ヲ取り扱ッテ色々ナ結
 果ヲ得テキルガ *Doob* ノ條件ハ *Doebelin* ノ條件ヨ
 リハ強いデアル。即チ *Doob* ハ任意ノ $E, \sup E, \sup \dots$

$\cdots \supset E_n \supset \cdots$, $\prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0$ ナル如キ系列 $\{E_n\}$
 $(E_n \in \mathcal{L}, n=1, 2, \cdots) =$ 對シテ $P(x, E_n) \rightarrow 0$
 が $x =$ 關シテ一様ニ成立スルコトヲ要求シテキルが、コ
 レハ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\eta > 0$ が定マツテ $m(E)$
 $< \eta \rightarrow P(x, E) < \varepsilon$ トナルト云フコトト同等デアアルカ
 ラ *Doebelin* ノ條件ヨリ遙カニ強イノデアアル。シカシ、
Doob ノ論文ハ *infinite product space* ヲ考
 ヘル方法が旨イノデアアルカラ、ソレダケデ十分興味ガア
 ルノデアアル。

尚ホツイデナガラ、*Doob* ノ論文デハ *determi-*
nistic デナイ場合、*Birkhoff* ノ *ergodic*
theorem ヲ論ジテキルノデアアルが、コレハ既ニ
Khinchine-Koemogoroff = ヨツテ論ジラレ
 テキルモノデアツタ (本号、吉田氏ノ談話參照)。 *Doob*
 ノ自イ所ハ原ノ空間 Ω ノ *measure* ト *product*
space $\prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ ノ *measure* トノ關係ヲツケル所
 デアロウ。

最後ニ、*Doebelin* ノ條件ハ、マダ強スギルマウナ
 氣ガスル。

- 15) J. L. Doob: Stochastic processes with
 an integralvalued parameter, transaction
 Amer. Math. Soc. 44 (1938).

例へば、コレデハ Kryloff-Bogoliouboff, 場合⁽⁶⁾ヲ含マナイノデアル。(勿論 Kryloff-Bogoliouboff, 場合ハ topology = 関スル條件ハアルカ。

§ 2. 結 果

條件 (米) カラ ドレダケノ結果が得ラレルカ。Doebelin / 得々結果ヲカサゲル。ソノタメニ先ツ final set (ensemble finale) ヲ定義スル。

定義 $G \in \mathcal{L}$ ハ次ノ條件ヲ満足スルトキ final set デアルト云フ。

(i) $x \in G$ ナラベ $P(x, G) = 1$ スハ $P(x, \Omega - G) = 0$. 即チ $x \in G$ ナル点ガ G カラ 外ヘ出ル確率ハ 0 デアル。

(ii) 任意ノ $x \in G$ 及ビ $E \subset G$ ($E \in \mathcal{L}$) = 對シテ若シ $m(E) > 0$ ナラベ $n = n(x, E)$ ガ定マツテ $P^{(n)}(x, E) > 0$. 大ザツパニ云ヘバ G , 各点ハ G 中ヲ到ルトコロヲウロツクノデアル。

カナル final set が存在スルコトハ証明ヲ要スル

(6) N. Kryloff et N. Bogoliouboff: La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire, Annals of Math., 38(1937)

が、若シ存在シテモ有限個シカナイコトハ容易ニワカル。何
トナレバ條件(i)ヨリ $x \in G$ ナラバ $P^{(n)}(x, G) = 1$
ナルカラ (※) = ヨツテ $m(G) \geq \eta$ ナラケレバナリ。
 $m(E) = 0$ ナル集合 E ハ無視スルコトニスレバ相異ナ
ル final set ハ互ニ共通点ヲモツナイカラ、final
set ハ有限 ($\leq [\frac{1}{\eta}]$) 個シカ存在シナイ。

定理 条件(※)ノ下ニ次ノコトガ成立スル： Ω 内
ニ有限個ノ final set G_α ($\alpha = 1, 2, \dots, p$) ガ
存在シテ

$$(i) \text{ 任意ノ } x \in \Omega \text{ ニ對シテ } P^{(n)}(x, \Omega - \sum_{\alpha=1}^p G_\alpha) \rightarrow 0$$

ナル。シカモコレハ x = 関シテ一様デ且ツ exponential
order ナル。即チ x = 無関係ニ常数 M 、 τ
($0 < \tau < 1$) ガ存在シテ任意ノ $x \in \Omega$ = 對シテ

$$P^{(n)}(x, \Omega - \sum_{\alpha=1}^p G_\alpha) < M \cdot \tau^n, \quad n = 1, 2, \dots \text{ガ成立ス}$$

ル。

(ii) $\bar{\Omega} = \Omega^{(6a)}$ ガ Euclid 空間内ノ集合デ $m(E)$
ガ普通ノ Lebesgue measure ナレバ各々ノ
 G_α = ハ次ノ如キ integer $d_\alpha \geq 1$ ガ對應スル：

$$d_\alpha = 1 \text{ ナルトキ, } \text{コノ時ハ任意ノ } x \in G_\alpha, E \subset G_\alpha$$

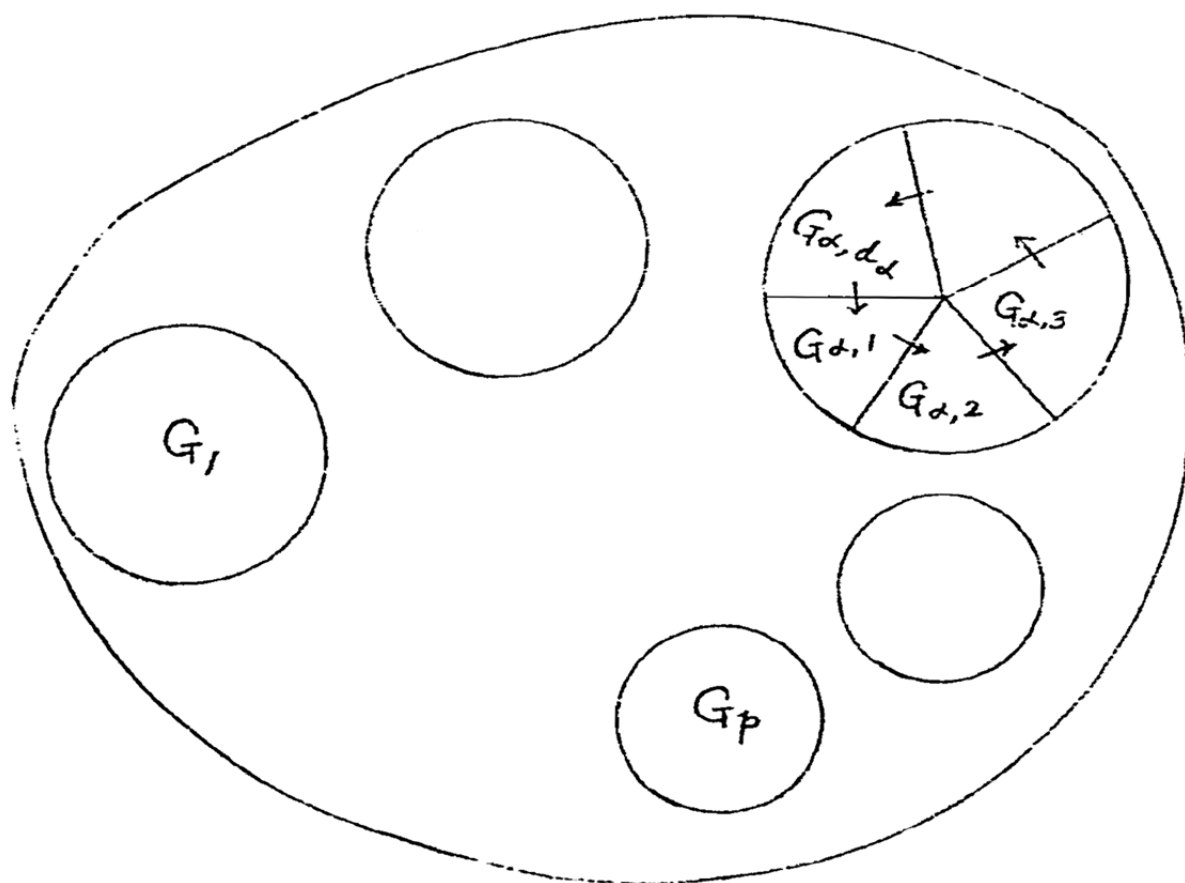
$$(E \in \mathcal{L}_G) = \text{對シテ } \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(x, E) = P(E) \text{ガ}$$

(6a) コノ條件ハ必ずしも必要デナク一般ノ measure ノ場合デモ
或ル程度ノ條件ガアレバヨイ。§4. 参照。

存在スル。且ツコノ收斂ハ x = 関シテ 一様 = シテ
 $exponential$, $order$ デアル。即チ $|P^{(n)}(x, E) - P(E)| < M \cdot \tau^n$, $n = 1, 2, \dots$ が成立スル如キ 常数
 M , τ ($0 < \tau < 1$) が存在スル。

$d_\alpha > 1$ ナルトキ コノ時ハ G_α ハ d_α 個ノ部分 (互
 = 共通点ノ +1) $G_{\alpha,i}$ ($i = 1, 2, \dots, d_\alpha$) = 7 カレ
 テ、任意ノ $x \in G_{\alpha,i}$ = 對シテ $P(x, G_{\alpha,i+1}) = 1$ トナル。
 ($i = 1, 2, \dots, d_\alpha$; 但シ $i = d_\alpha$ ナルトキハ $i+1 = 1$
 ト考ヘル)。即チ $x \in G_{\alpha,i}$ ナラバ x ハ 單位時間ノ終
確實 = $G_{\alpha,i+1}$ = ハイルノデアル。

大ザツパ = 云ヘバ G_α ノ中テ x ハ $cyclic$ (period
 d_α) ノ運動ヲシテキル。ヨツテ單位時間ノ d_α 倍ノ後ヲ考
 ヘレバ各 i ノ $G_{\alpha,i}$ ノ点ハソレ自身ノ中ヘ 確實 = ハイ ヲテ



亦ル。ヨツテ $P^{(d_\alpha)}(x, E) = \text{閉シテ各 } i \text{ の } G_{\alpha, i} \text{ の}$
 $\text{final set トナリ、シカモ } d=1 \text{ の case トナル。}$

即チ任意ノ $x \in G_\alpha = \text{對シテ}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(nd_\alpha)}(x, E)$ ハ存在シテ、シカモソノ收斂ハ
 $\mu = \text{閉シテ一様、且ツ exponential, order } \neq$
 アル。

ヨツテ又コレヨリ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod^{(n)}(x, E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n P^{(m)}(x, E)$$

カ任意ノ $x \in G_\alpha$, $E \subset G_\alpha (E \in \mathcal{L}_\alpha) = \text{對シテ } x = \text{閉シ}$
 $\text{テ一様} = \text{成立スルコトガワカル。}$

§3. final set

定理ノ証明ヲスルタメ先ツ final set ノ存在ヲ証明
スル。任意ノ $x \in \Omega = \text{對シテ } P(x, E) \text{ ハ、} E \text{ ヲ variable}$
 $\text{ト考ヘレバ totally additive, non-negative}$
 $\text{ノ集合函数ガ且ツ } P(x, \Omega) = 1 \text{ ナル。ヨツテ } P(x, E)$
 $= 1, E \in \mathcal{L} \text{ ナル集合 } E = \text{テ } m(E) \text{ ノ最小ナルモノガ}$
 $\text{存在スル。コレヲ } E_1(x) \text{ トセヨ。}^{(17)} E_1(x) \text{ ハ一般ニハ}$

(17) $P(x, E) = 1, E \in \mathcal{L} \text{ ナル } E = \text{閉スル } m(E) \text{ ノ下限ヲ } \alpha$
 $\text{トシ } P(x, E_n) = 1, m(E_n) < \alpha + \frac{1}{2^n} \text{ ナル } E_n \in \mathcal{L} \text{ ヲ取}$
 $\text{リ } E_1(x) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} E_n} \equiv \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} E_n \text{ トオケ。 } m(E_1(x)) = \alpha$
 $= \text{テ且ツ } P(x, E_1(x)) = 1 \text{ ナル。}$

unique = ハ定マラナイガ $m(E)=0$ ナル集合ヲ除イテ
 unique = 定マル。同様ニ集合ハ $P^{(n)}(x, E)$ = 對シテモ
 定マル。コレヲ $E_n(x)$ トセヨ。 $E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(x)$ トオ
 ケバ $E(x) \in \mathcal{L}$ デアツテ且ツ $E(x)$ ハ 次ノ性質ヲモ
 ツ。

$$(i) P^{(n)}(x, E(x)) = 1, \quad n=1, 2, \dots$$

(ii) 任意ノ $E \subset E(x)$, $E \in \mathcal{L}$, $m(E) > 0$ ナル集合
 E = 對シテ $n = n(E)$ ガ定マリ $P^{(n)}(x, E) > 0$ ト
 ナル。

(i) ハ明カデアレ。 (ii) ハ 次ノ様ニシテ証明サレル。

先ヅ $m(E) > 0$ ナルコトヨリ、 n = 對シテ
 $m(E \cdot E_n(x)) > 0$. ヨツテ $E_n(x)$ ノ 定義ヨリ
 $P^{(n)}(x, E_n(x) - E \cdot E_n(x)) < 1$. シタガツテ

$$P^{(n)}(x, E) \geq P^{(n)}(x, E \cdot E_n(x)) > 0$$

此ノ如キ性質 (i), (ii) ヲモツ集合 $E(x) \in \mathcal{L}$ ヲ x ノ con-
 sequent set (ensemble conséquent) ト呼
 ブ。任意ノ $x \in \Omega$ = 對シテ Ω ノ consequent set ガ
 存在スルコトハ上記ノ如ク証明サレ。且ツコレハ明ラカー
 $m(E)=0$ ナル集合ヲ除ケバ unique = 定マル。

今 $E \in \mathcal{L}$ ヲ與ヘタトキ、コレガ任意ノ $x \in E$ ナル点
 x = 對スル consequent set = ナツヲキレバ E ガ
 求ムル final set = ナルワケデアルカラ (final
 set ノ 定義参照) コレヲ証明ハ然ルガ、レツノ $x \in E$ カ
 ラ x ノ consequent set $E(x)$ ヲ作ツタダケデハ

$E(x)$ は必ずしもこの性質をもちない。或る $y \in E(x)$ = 對して y の consequent set $E(y)$ を作れば $m(E(y)) < m(E(x))$ となることを知れたいのである。

又、 $y \in E(x)$ かつ $E(y) \subset E(x)$ となることを示すことができないのである。ところが實際に $E(y) \subset E(x)$ が成立しないやうな $y \in E(x)$ は必ずしも存在するとは限らない。この y 全体、集合 E^* は $m(E^*) = 0$ となることを証明出来る。しかも $E(x)$ の代り $E(x) - E^*$ を考へてモヤハリ x の consequent set = なることを証明出来るから、始めから $E(x)$ の代り $E(x) - E^*$ を考へることはスレバ任意、 $y \in E(x) =$ 對して $E(y) \subset E(x)$ ⁽⁷⁾ であるとは假定してよいのである。

$m(E^*) = 0$ となることの証明 $y \in E^*$ は少くとも一つ、 $n =$ 對して $P^{(n)}(y, \Omega - E(x)) > 0$ となることと同ジであるから、 $P^{(n)}(y, \Omega - E(x)) > 0$ となる如き y の集合を E_n^* とスレバ $E^* = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^*$ である。

ヨツテ $m(E^*) > 0$ とスレバ少くとも一つ、 $n =$ 對して $m(E_n^*) > 0$ 。次 $\epsilon = P^{(n)}(y, \Omega - E(x)) > \frac{1}{m}$ とする如き y の集合を $E_{n,m}^*$ とスレバ $E_n^* = \sum_{m=1}^{\infty} E_{n,m}^*$ であるから

(7) $E(y)$ は勿論 unique でありから $E(y) \subset E(x)$ となる y を作れ得る。しかしこの y の適當 = $E(y)$ を作れば $E(y) \subset E(x)$ となることを云ふ。

バックトモ一ツノ $m = \text{對シテ } m(E_{n,m}^*) > 0, E_{n,m}^* \subset E(x),$
 $m(E_{n,m}^*) > 0$ デアルカラ $E(x)$ ノ定義 = 矛盾

$N = N(E_{n,m}^*)$ が存在シテ $P^{(N)}(x, E_{n,m}^*) > 0.$

$$\text{ヨツテ } P^{(N+n)}(x, \Omega - E(x)) = \int_{\Omega} P^{(N)}(x, de_y) P^{(n)}(y, \Omega - E(x))$$

$$\geq \int_{x, E_{n,m}} P^{(N)}(x, de_y) P^{(n)}(y, \Omega - E(x)) \geq \frac{1}{m} \int_{x, E_{n,m}} P^{(N)}(x, de_y) \\ = \frac{1}{m} P^{(N)}(x, E_{n,m}^*) > 0.$$

コレハ $P^{(N+n)}(x, E(x)) = 1$ ($E(x)$ ノ定義!) = 矛盾スル。ヨツテ $m(E^*) = 0$ ナケレバナラヌ。

$E(x) - E^*$ が又 x , consequent set ナルコト。

コレヲ示ス = ハ任意ノ $N = \text{對シテ } P^{(N)}(x, E(x) - E^*) = 1$
 ナルコト又ハ $P^{(N)}(x, E^*) = 0, N = 1, 2, \dots$ ナ
 ルコトヲ示セバヨイ。然ルニ $E^* = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^*$ デアルカラ、

若シ $P^{(N)}(x, E^*) > 0$ ナラババックトモ一ツノ $n = \text{對シテ}$
 $P^{(N)}(x, E_n^*) > 0$ 。ヨツテ又 $E_n^* = \sum_{m=1}^{\infty} E_{n,m}^*$ ナル

コトヲ考ヘレババックトモ一ツノ $m = \text{對シテ } P^{(N)}(x, E_{n,m}^*) > 0.$

ヨツテ前ト同様ニシテ $P^{(N+n)}(x, \Omega - E(x))$

$$= \int_{\Omega} P^{(N)}(x, de_y) P^{(n)}(y, \Omega - E(x))$$

$$\geq \int_{x, E_{n,m}} P^{(N)}(x, de_y) P^{(n)}(y, \Omega - E(x)) \geq \frac{1}{m} P^{(N)}(x,$$

$E_{n,m}^*) > 0$ 。コレハ $E(x)$ ノ定義 = 矛盾スル。

以上

以上、議論 = ヨツテ、任意ノ $x \in \mathcal{L}$ = 對シテ、
consequent set $E(x) \in \mathcal{L}$ が存在シテ任意ノ
 $y \in E(x) =$ 對シテ $E(y) \subset E(x)$ トナルコトがワカッ
 ヲ。條件(*)ヨリ明ラカ = $m(E(x)) \geq \eta$ アアル。

次ニコノ $E(x) =$ 對シテ $m(E(y)) < m(E(x))$ ト
 ナル如キ $y \in E(x)$ が存在スルカドウカラ調べル。モシ
 カナル y が存在シタケレバ $E(x)$ ハ明カ = 一ツノ *final*
set デアル。ヨツテ証明ハコレヲ終ル。又モシカナル y
 が存在スレバコレヲ x_1 トスル。

コノ $x_1 =$ 對シテ $E(x_1)$ ノ作レバ $E(x_1) \subset E(x)$,
 $m(E(x_1)) < m(E(x))$ デアル。シカモ $E(x_1)$ ハ前ト
 同様 = シテ、任意ノ $y \in E(x_1) =$ 對シテ $E(y) \subset E(x_1)$
 トナルヤウニ作ルコトが出来ル。次ニコノ $E(x_1) =$ 對シ
 テ $y \in E(x_1) =$ テ $m(E(y)) < m(E(x_1))$ トナルヤ
 ウナ y がアルカドウカラ調べル。モシカナル y が存在
 シタケレバ証明ハコレヲ終ル。又モシカナル y が存在スレ
 バコレヲ x_2 トスル。

以下同様 = シテ進メバ、コノ操作がどこカヲ終ラタケ
 レバ x_n ($n = 1, 2, \dots$) が $x_{n+1} \in E(x_n)$, $m(E(x_{n+1}))$
 $< m(E(x_n))$, $E(x_{n+1}) \subset E(x_n) =$ テ且ツ任意ノ
 $y \in E(x_n) =$ 對シテ $E(y) \subset E(x_n)$ トナル如ク選ベ
 ル。コノ操作がどこカヲ終レバ *final set* ノ存在
 が証明サレルカラどこマデモコノ操作がツヅクト假定
 スル。 $\prod_{n=1}^{\infty} E(x_n) = E_{\omega}(x)$ トオケ。任意ノ $y \in E_{\omega}(x)$

= 對シテ $E(y) \subset E_\omega(x)$ トナル。コレハ、各々ノ $n =$ 對
 シテ $E(y) \subset E(x_n)$ トナルコトヨリ明カ。ヨツテ
 $x_{\omega+1} \in E_\omega(x)$ ヲ取ツテ前ト同ジヤウニ $x_{\omega+2}, x_{\omega+3}, \dots$
 ヲ作ツテ行クコトが出来ル。コノ操作ハドコカテ終ラナケレ
 バ任意ノ順序数 $\alpha < \Omega =$ 對シテ $x_{\alpha+1}$ ヲ作ルコトが出来
 來、且ツ $\alpha < \beta < \Omega$ ナラバ $m(E(x_{\alpha+1})) > m(E(x_{\beta+1})) > 0$
 デアルカラコレハ矛盾デアル。ヨツテコノ操作ハドコカテ終
 11. *final set* が存在スル。⁽⁸⁾

- (8) *Transfinite induction* ヲ避ケルタメニハ、次ノ
 マウニ α レバヨイ。先ツ $E(x)$ ヲ任意ノ $y \in E(x) =$
 對シテ $E(y) \subset E(x)$ トナル如ク選ビテ、アテエル $y \in$
 $E(x)$ ニ關スル $m(E(y))$ ノ下限ヲ考ヘル。コレヲ α_1
 トスレバ $\alpha_1 \geq 0$ デアル。 $x_1 \in E(x)$ ヲ $m(E(x_1)) < \alpha_1$
 $+\frac{1}{2}$ トル如クトル。一般ニ $x_n, E(x_n)$ が任意ノ $y \in$
 $E(x_n)$ = 對シテ $E(y) \subset E(x_n)$ トナル如ク選マツタト
 キ、カナル y = 對スル $m(E(y))$ ノ下限ヲ α_n トスル。
 $\alpha_n \geq \alpha_{n+1} \geq \dots \geq \alpha_1$ デアル。 $x_{n+1} \in E(x_n)$ ヲ
 $m(E(x_{n+1})) < \alpha_n + \frac{1}{2^n}$ トナル如ク選ブ。此ノ如クシ
 テ順次 $x_n (n=1, 2, \dots)$ ヲ作リ $\bigcap_{n=1}^{\infty} E(x_n) \equiv G$ トカ
 へバ G ハ *final set* デアル。何トナレバ任意ノ $y \in G$
 = 對シテ $E(y) \subset G$ トナルコトハ $E(y) \subset E(x_n), n=1,$
 $2, \dots$ ヲヨリ明カ、次ニ $m(E(y)) = m(G)$ トナルコトハ
 $m(E(y)) \geq \alpha_n > m(E(x_{n+1})) - \frac{1}{2^n} \geq m(G) - \frac{1}{2^n}$ トナル
 コトヨリワカル。以上

此、如クンテ *final set* ノ存在ヲ証明サレタ。*final set* G カ $m(G) \geq \eta$ ヲ満足シ、シタガツテ *final set* ハ有限個⁽⁹⁾ シカ存在シナイコトハ既に示シタ如ク殆ド明カデアアル。次ニ定理ノ性質(i)ヲ証明シヨウ。

Ω 内ニアル *final set* 全体ヲトリ $G_1, G_2, \dots, G_p$ トセヨ。 $G_i \cdot G_j = \Lambda(i+j)$ デアル。 $\Omega = \sum_{\alpha=1}^p G_\alpha = \Lambda$ ナラバ (i) ハ明カ。ヨツテ $\Omega = \sum_{\alpha=1}^p G_\alpha \neq \Lambda$ トスル。先ヅ任意ノ $x \in \Omega$ 對シテ $P^{(n)}(x, \sum_{\alpha=1}^p G_\alpha)$ ヲ考ヘルトコレハ少クトモ一ツノ $n =$ 對シテ > 0 トナル。何トナレバ若シスベテ、 $n =$ 對シテ $P^{(n)}(x, \sum_{\alpha=1}^p G_\alpha) = 0$ デアレバ $E(x) \subset \Omega = \sum_{\alpha=1}^p G_\alpha$ トナツテ、コノ $E(x)$ ノ中ニ (前ニ証明シタコトニヨツテ *consequent set* $E(x)$ ノ中ニハ少クトモ一ツ *final set* ガアル!) 一ツノ *final*

(9) ニツノ *final set* ハ $m(E) = 0$ ナル集合ヲ除イテ一致スルカ又ハ共通點ヲ全然モタナシ。何トナレバニツノ *final set* $G_1, G_2 =$ 共通點 x ガアツタトスレバ、若シ $m(G_1 - G_1 \cdot G_2) > 0$ ナラバ $0C$ ガ G_1 ノ点ナルコトヨリ少クトモ一ツノ $n =$ 對シテ $P^{(n)}(x, G_1 - G_1 \cdot G_2) > 0$ 。然ルニコレハ $x \in G_2$ ナルコトヨリ矛盾デアアル。同様ニ $m(G_2 - G_1 \cdot G_2) > 0$ トシテモ矛盾ヲ生シレカラ $m(G_1 - G_1 \cdot G_2) = m(G_2 - G_1 \cdot G_2) = 0$ デナレバナラナイ。

$\mathcal{A}$ がアルコト = 十リ、 $G_1, G_2, \dots, G_P$ がスベテノ
 final set を盡シテ其ルト云フコト = ヨツテ矛盾スル。
 ヨツテ各々ノ $x \in \mathcal{B} = \text{對シテ少クトル} \cdot \forall, n = n(x)$
 が定マツテ $P^{(n)}(x, \sum_{\alpha=1}^P G_\alpha) > 0$ 。ヨツテ各々ノ $n = \text{對シテ}$
 $P^{(n)}(x, \sum_{\alpha=1}^P G_\alpha) > 0$ トナル如キ x ノ集合ヲ E_n
 表ハセバ $\sum_{n=1}^{\infty} E_n = \mathcal{B}$ 。且 G_α が final set ナ
 ルコトヨリ $E_n \subset E_{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$)。ヨツテ十分 M ヲ
 大キクトレバ $m(\mathcal{B} - E_M) < \frac{\eta}{2}$ トナル。* =
 $P^{(M)}(x, \sum_{\alpha=1}^P G_\alpha) > \frac{1}{m}$ トナル如キ x ノ集合ヲ $E_{M,m}$ m
 トスレバ $E_{M,m} \subset E_{M,m+1}$ ($m=1, 2, \dots$) = テ且
 $E_M = \sum_{m=1}^{\infty} E_{M,m}$ デアルカラ m ヲ十分大キクトレバ
 $m(\mathcal{B} - E_{M,m}) < \eta$ 。トナル。條件(*) ト $m(\mathcal{B} -$
 $E_{M,m}) < \eta$ ナルコトヨリ任意ノ $x \in \mathcal{B} = \text{對シテ}$
 $P^{(N)}(x, \mathcal{B} - E_{M,m}) < 1-b$ スハ $P^{(N)}(x, E_{M,m}) > b$
 > 0 。ヨツテ任意ノ $x \in \mathcal{B} = \text{對シテ}$

$$\begin{aligned}
 P^{(N+M)}(x, \sum_{\alpha=1}^P G_\alpha) &= \int_{\mathcal{B}} P^{(N)}(x, de_y) P^{(M)}(y, \sum_{\alpha=1}^P G_\alpha) \\
 &\geq \int_{E_{M,m}} P^{(N)}(x, de_y) P^{(M)}(y, \sum_{\alpha=1}^P G_\alpha) \\
 &\geq \frac{1}{m} \int_{E_{M,m}} P^{(N)}(x, de_y) = \frac{1}{m} P^{(N)}(x, E_{M,m}) \\
 &\geq \frac{b}{m}
 \end{aligned}$$

ヨッテ

$$P^{(N+M)}(x, \Omega - \sum_{\alpha=1}^P G_{\alpha}) \leq 1 - \frac{b}{m}$$

が $\mathcal{G} = \text{関シテ一様}$ = 成立スル。コレヨリ G_{α} が *final set* ナルコトヨリ

$$\begin{aligned} P^{2(N+M)}(x, \Omega - \sum_{\alpha=1}^P G_{\alpha}) &= \int_{\Omega} P^{(N+M)}(x, de_y) P^{(N+M)}(y, \Omega - \sum_{\alpha=1}^P G_{\alpha}) \\ &= \int_{\sum_{\alpha=1}^P G_{\alpha}} + \int_{\Omega - \sum_{\alpha=1}^P G_{\alpha}} = \int_{\Omega - \sum_{\alpha=1}^P G_{\alpha}} P^{(N+M)}(x, de_y) \cdot P^{(N+M)}(y, \Omega - \sum_{\alpha=1}^P G_{\alpha}) \\ &\leq \left(1 - \frac{b}{m}\right) \int_{\Omega - \sum_{\alpha=1}^P G_{\alpha}} P^{(N+M)}(x, de_y) \leq \left(1 - \frac{b}{m}\right)^2 \end{aligned}$$

同様 = シテ 一様 =

$$P^{n(N+M)}(x, \Omega - \sum_{\alpha=1}^P G_{\alpha}) \leq \left(1 - \frac{b}{m}\right)^n, \quad n=1, 2, \dots$$

ヨッテ 求ムル如キ M , τ が存在スルコトがワカル。