



Title	Birkhoff - Khintchine ノ ergodic theorem (Kolmogoroff ノ 論文紹介)
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 166, p. 476-485
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74659
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

729. Birkhoff-Khinchine, ergodic theorem (Kolmogoroff, 論文紹介)

吉田 耕 作 (阪大)

Ergodentheorie, 名ヲ呼バレヲ フル, 統計力学

1 部門 = ハニツノ基本定理ガアル。即チ J. von Neumann
 1 mean ergodic theorem ト G. D. Birkhoff
 1 ergodic theorem ガアル。談話「確率論
 ヘノ積分方程式ノ應用」ハ迂路ヲ辿ツタケレドモ、今カ
 ラ考ヘテミルト m. e. t. ノ思想圖ヲウロツイタ訳アリ
 マシタ。m. e. t. ハ stochastic process = モ
 應用出来ル形コデ拡張抽象化出来⁽¹⁾タケレドモ、B. e. t.
 ハ今ノ所筆者 = ハ抽象的ナ取扱ヒガ出来ナイ。勿論「抽象
 化ノタメニ抽象化」シタイト云フノデハアリマセン。「定理ノカラクリ」
 ヲ知リタイノデアリマス。⁽²⁾ソユデ文献ヲ漁ツタ訳デスカ。

i) A. Khintchine: Zur mathematischen
 Begründung der statistischen Mechanik,
 Zeitschr. für angew. Math. und Mech.
 13(1933) p. 101—103 ⁽³⁾

ii) A. Kolmogoroff: Ein vereinfachter
 Beweis des Birkhoff-Khinchineschen
 Ergodensatz, Rec. Math. 44, 2(1937), p. 366—
 377.

(1) 角谷氏談話 680, 筆者談話 720, 724 並ビニ本号ノ角谷氏
 談話ヲ参照セラレタイ。

(2) 脚註(1)ニ據ゲタ談話ニヨツテ「m. e. t. ノカラクリ」ハ明ニ
 ナツタト傍ジマス。

(3) von Mises 記念号。

ヲ得マシタ。モトモト, $A. K. Birkhoff$ = ヨツテ,
 $Lebesgue$ 積分ノ言葉ヲ使ツテ精細化サレタ $B. e. t.$
 ノ証明ハ $E. Hopf$ ノ名著 $Ergodentheorie$, p. 49
 — 52 ニ出テアリマス。上ノ i) ト ii) トハ根本ノ *idea*
 ハ之レト同じナノデセウガ, 少クトモ筆者ハ ii) = ヨツ
 テ「 $B. e. t.$ ノ証明ノカラクリ」犬ハハッキリシタマウニ
 思ヒマス。然モ既ニ i) = 指摘サレテアル様ニ「*steady*
flow ノ場合」(*deterministic case*) ノミナ
 ラズ, 或種ノ「*indeterministic case*」ニモ定
 理ガアテハマルマウナ形デ証明サレテアリマス。 $K. Birkhoff$
 (*loc. cit.*) ハ斯ク拡張スルコトニヨツテ新
 統計力学ノ礎石ノ一ツガ打ち下サレタト誇ツテアリマス。
 以下 ii) ノ紹介ヲ致シマセウ。

§1. *deterministic case*, $B. e. t.$

R ヲ $Lebesgue$ 測度ノ定義サレタル空間トシ,
 $mes(R) = 1$ トスル。 T ヲ R ノ R へノ 一対一 且ツ
測度保存 変換トスル。測度保存ト云フハ, R ノ任意ノ
 可測集合 A = 對シ $mes(A) = mes(T.A)$ ノ成立ス
 ルコトヲアル。然ラバ $f(x)$ ヲ R = 於テ積分可能ナ複
 素数値函数トスレバ, 殆ど全テ, $x \in R$ = 對シテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f(T.x) + \dots + f(T^{n-1}.x)}{n}$$

ガ存在スル。

之レが *Khintchine* = ヨツテ精細化サレタ B.e.
 也デアル。 $f(x)$ が実数値函数ノ場合ヲ証明スレバ充
 分デアル。 ヨツテ今, $\alpha < \beta$ ナル 任意ノ 実数 α, β ヲ
 トツタトキ

$$(1) \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f(T \cdot x) + \dots + f(T^{n-1} \cdot x)}{n} > \beta, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f(T \cdot x) + \dots + f(T^{n-1} \cdot x)}{n} < \alpha \end{cases}$$

が 同時ニ 成立ツマウナラバ x ノ 集合ヲ K トシ $\text{mes}(K) = 0$
 が云ヘレバヨイ。 以下 $\text{mes}(K) > 0$ トシテ矛盾ヲ出ス。

§ 2. 定理ノ証明

方針 ハ

$$(*) \quad \int_K f(x) dx \geq \beta \text{mes}(K)$$

ヲ出ス = アル。 同ジ論法デ $\int_K f(x) dx \leq \alpha \text{mes}(K)$ が出
 セルカラ $\alpha < \beta$ = ヨリ $\text{mes}(K)$ ハ 矛盾ダカラ, ソノ 準備
 トシテ

K ヲ 適當ニ 分割スルコト ⁽¹⁾。 今一般ニ

$$h_{ab}(x) = \frac{f(T^a \cdot x) + f(T^{a+1} \cdot x) + \dots + f(T^{b-1} \cdot x)}{b-a}$$

トナリ。 x ヲ fix シ, $h_{ab}(x) > \beta$ 且 $h_{ab'}(x) \leq \beta$
 for $b' < b$ ナラバ 整数ヲ 両端トスル interval (a, b)

(1) コノ 論法ガ Kolmogoroff ノ 巧イ所デアル。

ヲ *singular interval* ト呼ブ。 $a < a' < b < b'$
トスルト

$$h_{ab}(x) = \frac{(a'-a)h_{aa'}(x) + (b-a')h_{a'b}(x)}{b-a}$$

が成立スルカラ、ニツノ *singular intervals* (a, b) ,
 (a', b') がアツタトキ、片方が片方ヲ含ムコトハアツテモ
互ニ含ミテコトハナシ。

ソコデ正整数 δ ヲ與ヘタトキ、 $b-a \leq \delta$ ナル如
キ *singular interval* (a, b) が存在シタトシ、
若シ (a, b) が同シ條件ヲ満足スル⁽¹⁾ 如何ナル *singular*
interval = モ含マレナシラベ、 (a, b) ヲ δ -*singular*
interval ト呼ブ。シカラバ、與ヘラレタ δ = 對シテ
 δ -*singular interval* ハ沢山アルカモ知レナ
イカ 互ニ離レテアル。

故ニ (1) = ヨリ、 K ノ任意ノ点 x = 對シ、 δ ヲ充分大
キクトレバ $a \leq 0 < b$ ナル如キ δ -*singular inter-*
val (a, b) が 唯一ツ確ニ定マル。

ヨツテ δ ヲ *fix* シ、 K ノ点ノ中之点 = 對シ 0 ヲ
含ム δ -*singular interval* が定ル如キ点全体ヲ
 K_δ トスルト

$$(2) \quad \lim_{\delta \rightarrow +\infty} K_\delta = K.$$

コノ K_δ ハ次ノ如ク互ニ共通点ヲモタヌ $K_{p,q}$ = 分レル:

(1) 即チ長さ δ ヲコエナシ。

$$(3) \quad K_{\Delta} = \sum_{p=0, q=1}^{q-1, \Delta} K_{pq}.$$

$J_{\Delta} = K_{pq}$ に対応スル Δ -singular interval
が $(-p, -p+q)$ ナル如キ K_{Δ} ノ急全体ノ集合デア
ル。

上ノ分割ガ何故都合ガヨイカト云フト、等式

$$h_{-p, -p+q}(x) = \frac{1}{q+1} \left\{ f(T^{-p} \cdot x) + f(T^{-p+1} \cdot x) \right. \\ \left. + \dots + f(T^{-p+q} \cdot x) \right\} = h_{0,q}(T^{-p} \cdot x)$$

ガ成立スルカラ

$$x \in K_{pq} \text{ ト } T^{-p} \cdot x \in K_{0,q} \text{ トハ同等}$$

ヲ得。従ッテ 測度保存 ト云フコトカラ

$$(4) \quad \begin{cases} \int_{K_{pq}} f(x) dx = \int_{K_{0,q}} f(T^p \cdot x) dx, \\ \text{mes}(K_{pq}) = \text{mes}(K_{0,q}) \end{cases}$$

ヲ得ル = ヨル。

(*) ノ導キ方ハ最早マツケハナイ。即チ (3), (4) = ヨ

リ

$$\int_{K_{\Delta}} f(x) dx = \sum_{p,q} \int_{K_{pq}} f(x) dx \\ = \sum_{p,q} \int_{K_{0,q}} f(T^p \cdot x) dx = \sum_q \int_{K_{0,q}} q h_{0,q}(x) dx$$

ヲ得ルガ、(1) ト $K_{0,q}$ ノ定義カラ、 $x \in K_{0,q} \text{ ト } h_{0,q}(x) > \beta$
ダカラ、最後ノ項

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{g=1}^{\delta-1} \int_{K_{0g}} g \beta dx = \beta \sum_{g=1}^{\delta-1} g \text{mes}(K_{0g}) \\ &= \beta \sum_{g=1}^{\delta-1} \sum_{p=0}^{g-1} \text{mes}(K_{pg}) \quad ((4)=3\text{L}) \end{aligned}$$

従って，再帰 (3) = ヨルト

$$\int_{K_\delta} f(x) dx \geq \beta \text{mes}(K_\delta)$$

斯クシテ (2) = ヨリ (*) が証明サレタ。

§3. *indeterministic case* へノ擴張

可附添次元空間へノ測度ノ導入⁽¹⁾ 実数ノ系列 (---, x_{-1} , x_0 , x_1 , ---)ヲ点トスル空間 $\mathcal{R}^\infty$ ヲ考ヘル:
 α_n ($-\infty < n < +\infty$) $\in \mathcal{R}^\infty$ ノ点 $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ ノ第 n 座標ト呼ブ。実数軸デノ可測+集合ヲ有限個勝手ニエラブ: 之等ヲ K_{n_i} ($i = 1, 2, \dots, m$)トス。

$$x_{n_1} \in K_{n_1}, x_{n_2} \in K_{n_2}, \dots, x_{n_m} \in K_{n_m}$$

ヲ満足スル如キ $\mathcal{R}^\infty$ ノ点 $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ ノ集合ヲ $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_m}$ ニヨツテ定メラレタ $\mathcal{R}^\infty$ ノ *cylinder set*ト呼ブ。 $\mathcal{R}^\infty$ ノ *cylinder set*ノ全体ハ 加法的集合 $\mathcal{F}^\infty$ ヲ作ル。 $\mathcal{F}^\infty$ ヲ含ム最小ノ 完全加法的集合ヲ $B\mathcal{F}^\infty$ トスル。 $B\mathcal{F}^\infty \ni \mathcal{R}^\infty$ ハ明カ。
 $B\mathcal{F}^\infty =$ 於テ 完全加法的+正ノ集合函数 $\text{mes}(A)$

$(A \in B^{\mathbb{R}^{\infty}})$ が $\text{mes}(\mathbb{R}^{\infty}) = 1$ とルとき, $\text{mes}(A)$
 $\neq \mathbb{R}^{\infty}$ の測度と呼ぶ。

Chance variable の系列 $\{x_n\}$ 上, $\text{mes}(A)$
 $\neq \mathbb{R}^{\infty}$ の測度 $\text{mes}(A)$ が全 $\mathbb{R}^{\infty}$ 区間 $(-\infty, +\infty)$
 $\neq \mathbb{R}^{\infty}$ とルとき, $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_m}$ を定めて cylinder set の mes を満足スル $\neq \mathbb{R}^{\infty}$ とル。故
 $\text{mes}(A)$ の chance variable ¹⁾, 組 $x_{n_1},$
 $x_{n_2}, \dots, x_{n_m}$ の確率を與へル。特 $\neq \mathbb{R}^{\infty}$ 任意 $K_{n_1},$
 $K_{n_2}, \dots, K_{n_m}$ を定めて cylinder set
 $\neq \text{mes}$ がある K_{n_i} だけ定めて cylinder sets
 $\neq \text{mes}$ の積 $\neq \mathbb{R}^{\infty}$ とルれば, chance variables
 $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_m}$ の独立事象を表現シテ
 $\neq \mathbb{R}^{\infty}$ とル。

Stationarity の假定 斯クシテ, chance variables
 $\neq \text{independent}$ chance variables の系列 $\{x_n\}$
 $(-\infty < n < +\infty)$ を考へル。此系列が stationary と云
 $\neq \mathbb{R}^{\infty}$ の一列, 変換:

$$\begin{cases} x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) \rightarrow x' = (\dots, x'_{-1}, x'_0, \\ \quad x'_1, \dots) \\ x'_n = x_{n-1} \end{cases}$$

の測度 (確率) $\text{mes}(A)$ を保存スルコトヲ云フ。

然レバ $\mathbb{R}^{\infty}$ の点 $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ の
 $\neq \mathbb{R}^{\infty}$ 座標 x_0 を点 x の函数ト考へル ($x_0 = f(x)$) ト

¹⁾ Zufällige Größe, variable aléatoire

§2, 証明法がソノママ使へル。但シソノ $\mu = \mu_f(x)$
 / $\mathcal{R}^\infty =$ 於ケル 積分可能性即チ *chance variable*
 x_0 / 有限ナ 期望値⁽¹⁾, 存在ヲモ假定シテヲク契ツアル。
 カクテ

定理 *chance variables* / 系列 $\{x_n\}$
 $(-\infty < n < +\infty)$ が

(i) *stationary* 且ツ

(ii) x_0 / 期望値有限⁽²⁾

トラベ, a ヲ fix シタル $b \rightarrow +\infty$ トラシメレバ

$$h_{ab} = -\frac{x_a + x_{a+1} + \dots + x_{b-1}}{b-a}$$

ハ 確率 = (確率 / フリテ) 収斂スル。

注意1 斯ウニテミルト「B. e. t. / カラシ!!」/
 一端カ顔ヲ出シカケタマフ = 思ヘマス。 *chance variables*
 / 系列 $\{x_n\}$ が *stationary* ト云フ / 且, $x_0 = f(x)$
 / 期望値有限ト云フ / 且, 結局 $\mathcal{R}^\infty =$ 附シテ *measure*
 (確率) / 性質ト考ヘラレマス。即チ概語的 =

(**)

chance variables $\{x_n\}$ / *statistical*
 + 性願
 $= \mathcal{R}^\infty$ / 測度 (但シ $\text{mes}(\mathcal{R}^\infty) = 1$) / 性質。

(1) *mathematical expectation*.

(2) *stationary* ト云フコトカラ, 全テ x_n / 期望値一致シ
 了フ: $\int_{\mathcal{R}^\infty} f(T^n x) dx \wedge n = \text{無関係}$

だから B. e. t. ハ言ヒ直セバ, 次ノ如クナルノデハナイ
デセウカ?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_n}{n}$$

ハ収斂シナイヤウナ点 $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ ノ
measure が 0 = ナ様ナ measure (但シ $\text{mes}(R^\infty)$
= 1) $\Rightarrow R^\infty$ = 導入出来ル。

上, (**) = ヨツテ, Cramer, Feller, Levy,
Khivtchine, Kolmogoroff 等, 「chance
variables」ノ理論¹ヲ少クトモ質的ニデモ見直スコト
ハ出来ナイデセウカ?

注意2 上定理ハ相當一般ナ結果デアリマス。

chance variables x_n ($-\infty < n < +\infty$) が
互ニ独立ナトキニ於ケル上定理カラ「大数ノ法則」ガ
容易ニ得ラレルコトハ既ニ E. Hopf ガ指摘シテアリ
マス (E. Hopf 前掲書 p.56)。

注意3 B. e. t. ノ難点ヲ云ヘバ, 「収斂速度」
ガ何モ出テヲヲナイコトデス。⁽¹⁾ (**) = ヨツテ之点ヲ
又研究スベキデアリマス。

⁽¹⁾ m. e. t. ノ方デハ収斂速度ガ出セマス。例ヘバ Fréchet
- Kryloff - Bogoliouboff 定理ノ拡張 (筆者談話
679 或ハ角谷氏談話 680 ラミラレタイ)。