OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Birkhoff - Khintchine ノ ergodic theorem (Kolmogoroffノ論文紹介)
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 166, p. 476-485
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74659
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

1729. Birkhoff-Khintchine, ergodic theorem (Kolmogoroff, 論文紹介)

吉田 耕作 (阪大)

Ergodentheorie ノ名デ呼バレテヲル, 統計力學

ノ部門ニハ二ツノ基本定理ガアル。即チ J. von Neumann ノ mean ergodic theorem ト G.D. Birkhoff ノ ergodic theorem デアル。談話「確率論ヘノ積分方程式ノ應用」ハ迂路ヲ辿ッタケレドモ，今カラ考ヘテミルト m.e.t. ノ思想圏ヲウロツイタ訳デアリマシタ。m.e.t. ハ stochastic process ニモ應用出来ル形ニデ拡張抽象化出来[1]タケレドモ，B.e.t. ハ今ノ所筆者ニハ抽象的ナ取扱ヒガ出来ナイ。勿論「抽象化ノタメニ抽象化」シタイト云フノデハアリマセン。「定理ノカラクリ」ヲ知リタイノデアリマス[2]。ソコデ文献ヲ漁ッタ訳デスガ、

i) A. Khintchine: Zur mathematischen Begründung der statistischen Mechanik. Zeitschr. für angew. Math. und Mech. 13(1933) p.101—103[3]

ii) A. Kolmogoroff: Ein vereinfachter Beweis des Birkhoff-Khintchineschen Ergodensatz, Rec. Math. 44, 2(1937), p.366—377.

---

(1) 角谷氏談話 680，筆者談話 720, 724 並ビニ本号ノ角谷氏談話ヲ参照セラレタイ。

(2) 脚註(1)ニ挙ゲタ談話ニヨッテ「m.e.t. ノカラクリ」ハ明ニナッタト信ジマス。

(3) von Mises 紀念号。

ヲ得マシタ。モトモト，A. Khintchine ニヨッテ，Lebesgue 積分ノ言葉ヲ使ッテ精細化サレタ B.e.t. ノ証明ヘ E. Hopf ノ名著 Ergodentheorie, p. 49 — 52 ニ出ヲヲリマス。上ノ i) ト ii) トハ根本ノ idea ハ之レト同ジナノデセウガ，少クトモ筆者ニハ ii) ニヨッテ「B.e.t. ノ証明ノカラクリ」丈ハハッキリシタヤウニ思ヒマス。然モ既ニ i) ニ指摘サレテヲル様ニ「steady flow ノ場合」(deterministic case) ノミナラズ，或種ノ「inderministic case」ニモ定理ガアテハマルヤウナ形デ証明サレテアリマス。Khintchine (loc. cit.) ハ斯ク拡張スルコトニヨッテ新統計力学ノ礎石ノ一ツガ打チ下サレタト謂ッテヲリマス。以下 ii) ノ紹介ヲ致シマセウ。

§1. deterministic case ノ B.e.t.

R ヲ Lebesgue 測度ノ定義サレタアル空間トシ，$mes(R) = 1$ トスル。T ヲ R ノ R ヘノ一対一且ツ測度保存変換トスル。測度保存ト云フノハ，R ノ任意ノ可測集合 A ニ対シ $mes(A) = mes(T.A)$ ノ成立スルコトデアル。然ラバ $f(x)$ ヲ R ニ於テ積分可能ナ複素数値函数トスレバ，殆ド全テノ $x \in R$ ニ対シテ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) + f(T.x) + \cdots + f(T^{n-1}.x)}{n}$$

ガ存在スル。

之レガ K.hintchine ニヨッテ精細化サレタ B.e. ヒデアル。$f(x)$ ガ実数値函数ノ場合ヲ証明スレバ充分デアル。ヨッテ今，$\alpha < \beta$ ナル任意ノ実数 α, β ヲトッタトキ

$$(1)\quad \begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{f(x)+f(T\cdot x)+\cdots\cdots+f(T^{n-1}\cdot x)}{n} > \beta, \\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{f(x)+f(T\cdot x)+\cdots\cdots+f(T^{n-1}\cdot x)}{n} < \alpha \end{cases}$$

ガ<u>同時ニ</u>成立ツヤウナ x ノ集合ヲ K トシ $mes(K)=0$ ガ云ヘレバヨイ。以下 $mes(K)>0$ トシテ矛盾ヲ出ス。

§2. 定理ノ証明

方針 ハ

$$(*)\quad \int_K f(x)\,dx \geqq \beta\, mes(K)$$

ヲ出スニアル。同ジ論法デ $\int_K f(x)\,dx \leqq \alpha\, mes(K)$ ガ出セルカラ $\alpha<\beta$ ニヨリ $mes(K)$ ハ矛盾ダカラ，ソノ準備トシテ

K ヲ適当ニ分割スルコト[1]。今一般ニ

$$h_{ab}(x) = \frac{f(T^a\cdot x)+f(T^{a+1}\cdot x)+\cdots+f(T^{b-1}\cdot x)}{b-a}$$

トヲク。x ヲ fix シ，$h_{ab}(x)>\beta$ 且 $h_{ab'}(x)\leqq\beta$ for $b'<b$ ナラベ整数ヲ両端トスル interval (a,b)

(1) コノ論法ガ Kolmogoroff ノ巧イ所ダアル。

ヲ singular interval ト呼ブ。$a<a'<b<b'$ トスルト

$$h_{ab}(x)=\frac{(a'-a)\,h_{aa'}(x)+(b-a')\,h_{a'b}(x)}{b-a}$$

ガ成立スルカラ，二ツノ singular intervals (a,b), (a',b') ガアッタトキ，片方ガ片方ヲ含ムコトハアッテモ互ニ含ミアフコトハナイ。

ソコデ正整数 δ ヲ與ヘタトキニ，$b-a\leqq\delta$ ナル如キ singular interval (a,b) ガ存在シタトシ，若シ (a,b) ガ同ジ條件ヲ満足スル[1]如何ナル singular interval ニモ含マレナイナラバ，(a,b) ヲ δ-singular interval ト呼ブ。シカラバ，與ヘラレタ x ニ對シテ δ-singular interval ハ沢山アルカモ知レナイガ互ニ離レテヲル。

故ニ (1) ニヨリ，K ノ任意ノ点 c ニ對シ，δ ヲ充分大キクトレバ $a\leqq c<b$ ナル如キ δ-singular interval (a,b) ガ唯一ツ確ニ定マル。

ヨッテ δ ヲ fix シ，K ノ点ノ中之点ニ對シ 0 ヲ含ム δ-singular interval ガ定ル如キ点全体ヲ K_δ トスルト

$$\lim_{\delta\to+\infty}K_\delta=K. \tag{2}$$

コノ K_δ ハ次ノ如クニ共通点ヲモタヌ K_{pq} ニ分レル：

---

(1) 即チ長サ δ ヲコエナイ。

(3) $$K_\delta = \sum_{p=0,\, q=1}^{q-1,\, \delta} K_{pq}.$$

コヽニ K_{pq} ハ対応スル δ-singular interval ガ $(-p, -p+q)$ ナル如キ K_δ ノ点全体ノ集合デアルo

上ノ分割ガ何故都合ガヨイカト云フト，等式

$$h_{-p,-p+q}(x) = \frac{1}{q+1}\{f(T^{-p}\cdot x) + f(T^{-p+1}\cdot x) + \cdots\cdots + f(T^{-p+q}\cdot x)\} = h_{0q}(T^{-p}\cdot x)$$

ガ成立スルカラ

$x \in K_{pq}$ ト $T^{-p}\cdot x \in K_{0q}$ トハ同等

ヲ得．従ッテ 測度保存 ト云フコトカラ

(4) $$\begin{cases} \displaystyle\int_{K_{pq}} f(x)\,dx = \int_{K_{0q}} f(T^{p}\cdot x)\,dx, \\ mes\,(K_{pq}) = mes\,(K_{0q}) \end{cases}$$

ヲ得ルニヨルo

(*) ノ導キ方 ハ最早ヤワケハナイo 即チ (3), (4) ニヨリ

$$\int_{K_\delta} f(x)\,dx = \sum_{p,q} \int_{K_{pq}} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{p,q} \int_{K_{0q}} f(T^{p}\cdot x)\,dx = \sum_{q} \int_{K_{0q}} q\,h_{0q}(x)\,dx$$

ヲ得ルガ，(1) ト K_{0q} ノ定義カラ，$x \in K_{0q}$ ナラ $h_{0q}(x) > \beta$ ダカラ，最後ノ項

$$\geqq \sum_{g=1}^{\delta-1} \int_{K_{0g}} g\beta dx = \beta \sum_{g=1}^{\delta-1} g\, mes(K_{0g})$$

$$= \beta \sum_{g=1}^{\delta-1} \sum_{p=0}^{g-1} mes(K_{pg}) \quad ((4)=\text{ヨル})$$

依ツテ，再ビ (3) ニヨルト

$$\int_{K_\delta} f(x)\,dx \geqq \beta\, mes(K_\delta)$$

斯クシテ (2) ニヨリ (米) ガ証明サレタ。

§3. indeterministic case ヘノ擴張

可附番次元空間ヘノ測度ノ導入[1] 実数ノ系列 (……, x_{-1}, x_0, x_1, ……) ヲ点トスル空間 $\mathfrak{R}^\infty$ ヲ考ヘル: x_n ($-\infty < n < +\infty$) ヲ $\mathfrak{R}^\infty$ ノ点 $x = (\cdots\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots\cdots)$ ノ第 n 坐標ト呼ブ。実数軸デノ可測ナ集合ヲ有限個勝手ニエラブ：之等ヲ K_{n_i} ($i = 1, 2, \cdots\cdots, m$) トス。

$$x_{n_1} \in K_{n_1},\ x_{n_2} \in K_{n_2},\ \cdots\cdots,\ x_{n_m} \in K_{n_m}$$

ヲ満足スル如キ $\mathfrak{R}^\infty$ ノ点 $x = (\cdots\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots\cdots)$ ノ集合ヲ $K_{n_1}, K_{n_2}, \cdots\cdots, K_{n_m}$ ニヨッテ定メラレタ $\mathfrak{R}^\infty$ ノ cylinder set ト呼ブ。$\mathfrak{R}^\infty$ ノ cylinder set ノ全体ハ<u>加法的集合</u> $\mathfrak{F}^\infty$ ヲ作ル。$\mathfrak{F}^\infty$ ヲ含ム最小ノ<u>完全加法的集合</u> ヲ $B\mathfrak{F}^\infty$ トスル。$B\mathfrak{F}^\infty$ ヲ $\mathfrak{R}^\infty$ ハ明カ。$B\mathfrak{F}^\infty$ ニ於テ<u>完全加法的ナ正</u>ノ集合函数 $mes(A)$

$(A \in \mathfrak{B}^\infty)$ ガ $mes(\mathfrak{R}^\infty) = 1$ トキ，コノ $mes(A)$ ヲ $\mathfrak{R}^\infty$ ノ測度ト呼ブ。

Chance variable ノ系列 上ノ $mes(A)$ ハ，K_{n_i} $(i = 1, 2, \cdots\cdots, m)$ ガ全テ区間 $(-\infty, +\infty)$ トルトキ，$K_{n_1}, K_{n_2}, \cdots\cdots, K_{n_m}$ デ定メラレタ cylinder set ノ mes ヲ満足スルモノトナッテヲル。故ニ $mes(A)$ ハ chance variable[1] ノ組 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots\cdots, x_{n_m}$ ノ確率ヲ與ヘル。特ニ任意ノ $K_{n_1}, K_{n_2}, \cdots\cdots, K_{n_m}$ デ定メラレル任意ノ cylinder set ノ mes. ガ各 K_{n_i} 丈デ定メラレル cylider sets ノ mes. ノ積ニナッテヲラレベ，chance variables $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots\cdots, x_{n_m}$ ハ独立事象ヲ表ハシテヲル訳デアル。

Stationality ノ假定 斯リシテ，必ズシモ互ニ独立デナイ chance variables ノ系列 $\{x_n\}$ $(-\infty < n < +\infty)$ ヲ考ヘル。此系列ガ stationary ト云フノハ $\mathfrak{R}^\infty$ ノ一對一ノ変換丁：

$$\begin{cases} x = (\cdots\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots\cdots) \to x' = (\cdots\cdots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \cdots\cdots) \\ x'_n = x_{n-1} \end{cases}$$

ガ測度（確率）$mes(A)$ ヲ保存スルコトデアル。

然ラバ $\mathfrak{R}^\infty$ ノ点 $x = (\cdots\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots\cdots)$，第0座標 x_0 ヲ点 x ノ函数ト考ヘル（$x_0 = f(x)$）ト

---

1) Zufällige Grösse, variable aléatoire

§2ノ証明法ガソノママ使ヘル。但シソノタメニハ$f(x)$ノR^∞ニ於ケル積分可能性即チ chance variable x_0ノ有限ナ期望値[1]ノ存在ヲモ仮定シテヲク訳ヅアル。カクテ

定理 chance variables ノ系列 $\{x_n\}$ $(-\infty < n < +\infty)$ ガ

(i) stationary 且ツ

(ii) x_0ノ期望値有限[2]

ナラバ、aヲ fix シタトキ $b \to +\infty$ ナラシメレバ

$$h_{ab} = \frac{x_a + x_{a+1} + \cdots + x_{b-1}}{b-a}$$

ハ確実ニ（確率1ヲ以テ）収斂スル。

注意1 斯ウシテモルト「B. e. t. ノカラクリ!!」ノ一端ガ頗ヲ出シカケタマウニ思ヘマス。chance variables ノ系列 $\{x_n\}$ ガ stationary トイフノモ、$x_0 = f(x)$ ノ期望値有限トイフノモ、結局 R^∞ ニ附シタ measure（確率）ノ性質ト考ヘラレマス。即チ概語的ニ

(※※)

> chance variables $\{x_n\}$ ノ statistical ＋性質
> $= R^\infty$ ノ測度（但シ $mes(R^\infty)=1$）ノ性質.

---

(1) mathematical expectation.

(2) stationary トイフコトカラ、全テノ x_n ノ期望値一致シテヰテ: $\int_{R^\infty} f(T^n x)\,dx$ ハ n ニ無関係

ガカラ B. e. t. ハ言ヒ直セベ，次ノ如クナルノデハナイデセウカ？

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_0 + x_1 + \cdots\cdots + x_n}{n}$$

ガ收斂シナイヤウナ点 $x = (\cdots\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, \cdots\cdots)$ ノ measure ガ 0 = ナル様ナ measure（但シ $mes(R^\infty) = 1$）ヲ R^∞ ニ導入出来ル。

上ノ（米米）ニヨッテ，Cramer，Feller，Levy，Khintchine，Kolmogoroff 等ノ「chance variables ノ理論」ヲ少クトモ質的ニデモ見直スコトハ出来ナイデセウカ？

注意2　上定理ハ相當一般ナ結果デアリマス。chance variables x_n $(-\infty < n < +\infty)$ ガ互ニ独立ナトキニ於ケル上定理カラ「大数ノ法則」ガ容易ニ得ラレルコトハ既ニ E. Hopf ガ指摘シテヲリマス（E. Hopf 前掲書 p.56）。

注意3　B. e. t. ノ難点ヲ云ヘバ，「收斂速度」ガ何モ出テヲラナイコトデス。(1)（米米）ニヨッテ之点ヲ又攻究スベキデアリマス。

---

(1)　m. e. t. ノ方デハ收斂速度ガ出セマス。例ヘバ Fréchet-Krylloff-Bogolioubloff 定理ノ拡張（筆者談話679或ヒハ角谷氏談話680ヲミラレタイ）。