



Title	確率法則ノ分解問題, II
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 166, p. 486-505
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74660
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

730. 確率法則 / 分解問題, II

北川 敏 男 (阪大)

概要: $I = \text{於て、無限} = \text{分解可能} + \text{確率法則}$ 、
定義ヲ與ヘテ、今回ハコレニ關スル所謂 *Lévy* ノ公式
(定理2及ビ定理3)ヲ証明スル。コノ公式(或ハ
表現ト云ツタ方がヨリ適切カモ知レナイ)ヲ利用スレバ、
無限 = 分解可能 + 確率法則、スベテカラナル集合 $\mathcal{O}_f =$
於ケル分解問題ニツイテ簡明ナ結果ヲ得ラレル(定理
4)。

§3. 無限 = 分解可能 + 確率法則

定理2. $-\infty < t < \infty$ テ定義サレタ函数 $f(t)$
ガ、無限 = 分解可能 + 確率法則⁽¹⁾、特性函数デア
ル $\times$ ノ必要條件ハ、 $-\infty < t < \infty$ テ

$$(7) \quad f(t) = \exp. \left\{ imt - \frac{\lambda t^2}{2} + \left(\int_{-\infty}^0 \cdot \int_0^{\infty} \right) \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) d\pi(u) \right\}$$

トシテ表ハサレ、且ツ茲ニ

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ. \quad m \text{ ハ実数, } \lambda \geq 0. \\ 2^\circ. \quad \pi(u) \text{ ハ } (-\infty, 0), (0, \infty) \text{ 上ニ非減少} \\ \quad \text{ナリ, } \pi(\pm\infty) \text{ ハ共ニ有限ナリ, 且ツ} u \text{ ノ} \\ \quad \text{任意ノ有限区間上ニ } \int u^2 d\pi(u) < \infty \end{array} \right.$$

トナル事デア
ル。

(1) 定理ハ前回, §2ニ述ベタ。

注意: $\mathcal{L}, L_1, L_2, \mathcal{L}_u$ = 依ッテ夫々 $f(t), \exp(it), \exp(-\frac{t^2}{2}), \exp(e^{it}u - 1 - \frac{it u}{1+u^2})$ ヲハ特性函数トスル確率法則ヲ表ハシ, (7) ヲハ標記的ニ次ノ如クモ書ク:

$$(7) \quad \mathcal{L} = L_1^m L_2^\lambda \prod \mathcal{L}_u^{d_n(u)}$$

コノ注目スベキ結果 = 到達シタ歴史的経路ハ, P. Lévyノ独立ト確率変数ノ積分 (Les intégrales à éléments aléatoires indépendants) = 関スル一般的研究デアッタ。シカシコノ紹介ヲハ, 一般ノ分解問題ヲ中心トシタノデアルカラ, P. Lévyノ *Original*⁽²⁾ ヲ ソノマデ 此処ニ紹介スルノハ, 餘計ト道具立テヲスルマウデ面白クナイ。定理 2ノ極メテ簡潔ト証明ハ昨年 Khintchine⁽³⁾ = 依ッテ與ヘラレタガ, コレハ次ノ定義カラ出発シテ居ル。

定義 1. 任意ノ自然数 n = 対シテ $[f(t)]^{\frac{1}{n}}$ が、或ル確率法則ノ特性函数デアルトキ、 $f(t)$ ヲ特性函数トスル確率法則 = 無限 = 分解可能トイトフ。

(2) P. Lévy: Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes. Ann. d.R. S.N.d. Pisa II, 3(1934)

(3) A. Khintchine: Dédution nouvelle d'une formule de M. Paul Lévy. Bulletin d. U. d'Etat Moscou. Sec. A Vol. 1 #1. (1937)

ソレヲ *Khintchine* ノ証明ヲ茲ヲ採用シヨウトス
 ルト、§2ノ定義ト定義1トが同等ヲアレコトヲ先ヅ示
 サナケレバナラナイ。コレハ出来テ居ル⁽⁴⁾ケレドモ餘リ簡
 單デハナイ。ノミナラズ、*Khintchine* ノ方法ハ、純
 解析的トデモイフベキデアロウカ。確率論的ノ概念ヲ要
 シナイ。ソレハ今ノ場合必ズレモ歓迎スベキコトデハナイト
 思ハレル。依ツテ *Khintchine* ノ論文ヲソノマ、紹介
 スルノモ面白クナイ。

ソレデ茲デハ、定理2ノ証明トシテ、ソノ必要ナコ
 トハ確率変数ノ積分、若ヘ⁽⁵⁾ツ述ベケナガラ *Lévy* ノ著、
 方法ニ從ツテ、充分ナコトハ *Khintchine* ノ上述ノ論文
 ニ從ツテ述ベル。

補助定理1 確率法則 $\mathcal{L}$ が無限=分解可能デアル
 タメノ必要條件ハ、 $\mathcal{L}$ =從フ確率変数 X =對シテ、 $\varepsilon > 0$,
 $\varepsilon' > 0$ ヲバ如何ニ與フルトモ、次ノ様ナ確率変数 X_i ($i =$
 $1, 2, \dots, n$) ヲ見出し得ルコトデアル。

(4) A. *Khintchine*: Zur theorie der unbeschränkt teilbaren Verteilungsgesetze. *Recueil Math.* T. 2 (44): 1 (1937) [p. 81-90
 マデノ部分=アル] 定理2ヲ用フレバ定義2ト §2ノ
 定義トノ同等ヲ示スハ容易デアル。

(5) *Théorie de l'addition des variables aléatoires* (1937) ノ §54 (p p. 180-186) ヲ、証
 明カラ確率変数ノ積分、若ヘ⁽⁵⁾ツ除去スルコトハ容易ナ事デアル。

$$(9) \begin{cases} 1^\circ. X_1, X_2, \dots, X_n \text{ハ相互=独立デ,} \\ X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \\ 2^\circ. \text{Pr.}[|X_k| \geq \varepsilon] < \varepsilon' \quad (k=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

証明: コレヲ示ス=ハ, 次ノ補助定理2ヲ証明スレバヨイ。

補助定理2. X_n ノ確率法則ヲ $\mathcal{L}_n$ トスルト, 次ノ
(α)ト(β)トハ同等デアル:

$$(\alpha) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{o}(\mathcal{L}_n) = 0$$

$$(\beta) \quad \text{任意ノ } \varepsilon > 0 = \text{對シテ } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Pr.}[|X_n| \geq \varepsilon] = 0$$

証明: $\mathcal{L}_n$ ノ散縮度⁽⁶⁾(函数)ヲ $\mathcal{L}_n(\gamma)$ デ表ハスト

(α)ハ「任意ノ $0 < \gamma < 1$ = 對シテ $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n(\gamma) = 0$ 」ト同等ナコトカラ、容易ニ証明シヨル。〔証明終〕

便宜上(9)ヲ満足スル $\{X_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$)ヲ X ノ $(\varepsilon, \varepsilon')$ 一糸解ト略稱シヨウ。

補助定理3. 任意ノ自然数 n = 對シテ $[f(t)]^{\frac{1}{n}}$ ガ或ル確率法則ノ特性函数⁽¹⁷⁾デアルナラバ, $f(t)$ ハ, §2ノ

(6) §1デハ平均散縮度=ツイテ述ベタガ, §3デハ專ラ散縮度ヲ用キテ居ル。§1デハ寫シタ $\omega(\gamma)$ ハ群シクイヘバ, 「確率 γ = 對スル X ノ散縮度」ナル言葉ヲ用ヒル, デアル。又, γ ガ独立ナルトナ, 各 γ = ツイテ $\omega_{X+Y}(\gamma)$ ハ $\omega_X(\gamma)$ 及ビ $\omega_Y(\gamma)$ ヨリ大デアル。コレヲ散縮度増加ノ原理トイフ。

(7) コレカラ任意ノ $\alpha > 0$ = 對シテ, $f(t)^\alpha$ ガ特性函数ニナルコトハイフマデニナク明ラカデアル。

意味 = 於ケル無限 = 分解可能ナ確率法則ノ特世函数デア
 ール。

証明: $f(x) = \left[f(x)^{\frac{1}{n}} \right]^n$ デアルカラ、 Σ ヲバ、相
 互 = 独立ナ且ツ各々ハ確率法則 $f(x)^{\frac{1}{n}}$ ニ従フ Σ_{ν}^n ($\nu = 1, 2, \dots$
 $\dots, n$)ノ和 = 分解出来ル: $\Sigma = \Sigma_1^n + \Sigma_2^n + \dots + \Sigma_n^n$

明カニ、 $f(x)^{\frac{1}{n}}$ ハ、 $n \rightarrow \infty$ ノトキ x ノ任意ノ有限区間
 で一様ニ、1ニナル。コレカラ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} \text{Pr.} [|\Sigma_k^n| \geq \varepsilon] = 0$ ガ証明出来ル。依ッ
 テ補助定理 1-2ニ依ツテ証明スベキ結果ニ達スル。(証
 明終)

尚書々ハ次ノ三ツノ補助定理ヲ必要トスル。最初ノニ
 ツハ、確率法則ノ無限行列

$$(M) \begin{cases} \Sigma_{1,1} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \\ \dots\dots\dots \\ \Sigma_{n,1} & \Sigma_{n,2} & \dots\dots & \Sigma_{n,n} \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

ニ關スルモノデアアル。但シ、コニ、各 n ニツイテ $\Sigma_{n,1}$
 $\Sigma_{n,2}, \dots, \Sigma_{n,n}$ ハ相互ニ独立デアルトスル。 $S_n = \Sigma_{n,1}$
 $+ \Sigma_{n,2} + \dots + \Sigma_{n,n}$ トオク。

補助定理 4. (M)ニ於テ次ノ條件ガ満足サレテ居ルトスル:

$$(P) \begin{cases} 1^\circ \Sigma_{n,k} \text{ハ } 0, 1 \text{ヲバ夫々確率 } p_{n,k}, 1-p_{n,k} \text{デトル。} \\ 2^\circ \max_{1 \leq k \leq n} p_{n,k} = \alpha_n \rightarrow 0, \sum_{k=1}^n p_{n,k} \rightarrow \eta \quad (n \rightarrow \infty \text{トキ}) \end{cases}$$

然ルトキ $=h$, S_n ノ特性函数 h , $n \rightarrow \infty$ ノトキ,
 $-\infty < t < \infty$ デ一樣 $=$, $\exp. \{ \eta (e^{it} - 1) \}$ (一
 般ノ Poisson ノ分布ノ特性函数)ヘ収斂スル。

補助定理 5. (M)ニ於テ次ノ條件ガ満足サレテ居ルト
 スル:

$$(L) \begin{cases} 1^\circ & |X_{n,k}| < \varepsilon_n \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad \varepsilon_n \downarrow 0 \\ 2^\circ & E\{X_{n,k}\} = 0 \end{cases}$$

然ル時 $=h$, $b_n^2 = \sum_{k=1}^n D^2\{X_{n,k}\}$ トオケバ, S_n/b_n

ノ特性函数 h , $n \rightarrow \infty$ ノトキ, $-\infty < t < \infty$ デ Gauss
 ノ分布ノ特性函数 $\exp(-t^2/2)$ ニ一樣分布ヲナス。

(Liapounoff)

コレヲハ、何レモ確率論上ノ基本定理ヲアルカラ、茲
 ニ、コレヲ豫想シテモ天降りデハアルヲイ。尚コレヲノ
 補助定理ガ(7)ノ右辺ノ構成要素トシテノ Poisson ノ分布、
 Gauss ノ分布ノ意味ヲモ與ヘテ居ルコトニ注意シタ
 イイテアル。

コレニ反シテ、次ノ Lévy & Doeblin⁽⁸⁾ノ定理ハ相
 當 help ナ事ヲ主張シテ居ル:

(8) Lévy - Doeblin: Sur les sommes de
 variables aléatoires indépendantes à dis-
 persion bornées inférieurement. C. R. Paris
 202, 2027-2029 (1936)

定義 2. 独立な確率変数ノ集合 $\{X_\alpha\}$ = 於テ、各 X_α ノ散縮度ヲ $\omega_\alpha(Y)$ デ表ハストキ、

(D) スベテノ α = 共通ニ、 $\omega_\alpha(Y+0) \geq 2l$ トナル様ニ $0 < \gamma < 1$, $l > 0$ ガ存在スル。

トイフ條件ガ満足サレルナラバ、 $\{X_\alpha\}$ ヲバ、下ニ有界ナ散縮度ヲ有スル独立な確率変数ノ集合デアルトイフ。

補助定理 6 $0 < \gamma < 1$, $0 < \beta$ ナル如キ γ, β ヲ任意ニ定メルトキ次ノ如キ性質 (P) ヲモツ $k > 0$ 及ビ N ヲ見出スコトガ出来る。

(P): 條件 (D) ガ満足サレル $\{X_\alpha\}$ カラ、部分列 $\{X_{n_i}\}$ ($n_i = 1, 2, \dots$) ヲ任意ニトルトキ、 $n_i > N$ ナル限ニ $\sum_{i=1}^n X_{n_i} \cdot \beta$ = 開スル散縮度ハ $kl\sqrt{n}$ ヨリ小デナリ。

3.1. 定理 2 ノ條件ノ充分ナ事ノ証明

(8) ナル附帯條件ヲ満足スルトナ (7) デ誤ヘラレル $f(t)$ ハ

$$(7') \quad f(t) = \exp \left\{ i m t + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} dG(u) \right\}$$

ノ形ニ表ハレ得ル。但シ、 m = 実数、 $G(u)$ ハ $(-\infty, \infty)$ 上ニ非減少且ツ有界ナ函数ニトレル。

今 ε ヲ任意ノ正数トスル。 $\Delta_\varepsilon = G(\varepsilon) - G(-\varepsilon)$ トシ、且ツ

$$G_\varepsilon(u) = \begin{cases} G(u) & [u \leq -\varepsilon] \\ G(-\varepsilon) & [-\varepsilon \leq u \leq \varepsilon] \\ G(u) - \Delta_\varepsilon & [u \geq \varepsilon] \end{cases}$$

ト置ク。 $G_\varepsilon(u)$ ハ u ノ函数トシテハ、有界且ツ非減少デア
ルカラ、適當ナ正数 λ_ε ト、 $\Phi_\varepsilon(u)$ トヲ選ンテ

$$G_\varepsilon(u) = \lambda_\varepsilon \Phi_\varepsilon(u)$$

ト定ハシ、 $\Phi_\varepsilon(u)$ ハソレカラ適當ナ定数ヲ引ケバ、分
布函数ニナルヲ得ル。次ニ $f_\varepsilon(t)$ ヲ導入スル：

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(t) &= \int_{|u| > \varepsilon} (e^{itu} - 1) dG(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1) dG_\varepsilon(u) \\ &= \lambda_\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1) d\Phi_\varepsilon(u) = \lambda_\varepsilon [\varphi_\varepsilon(t) - 1] \end{aligned}$$

但シ、 $\varphi_\varepsilon(t)$ ハ $\Phi_\varepsilon(u)$ ノ特性函数ヲ表ハストスル。

吾々ハ、 $f_\varepsilon(t)$ ガ、任意ノ $\varepsilon > 0$ ト任意ノ有界且ツ非
減少ナ $G(u)$ トニ對シテ、或ル特性函数ノ對數デアアルコト
ヲ言ヒタイノデアルガ、コレハ次ノ如クシテ示サレル：

$\frac{\lambda_\varepsilon}{n} \varphi_\varepsilon(t) + \{1 - \frac{\lambda_\varepsilon}{n}\}$ ハ $n \geq \lambda_\varepsilon$ ナルスベクノ n = 對シ
テ特性函数デアアルカラシテ、ソノ對數ヲトツテ n 倍シタ

$n \log \left\{ \frac{\lambda_\varepsilon}{n} \varphi_\varepsilon(t) + \left(1 - \frac{\lambda_\varepsilon}{n}\right) \right\}$ 即チ

$n \log \left\{ 1 + \frac{\lambda_\varepsilon}{n} [\varphi_\varepsilon(t) - 1] \right\}$ モ、或ル特性函数ノ對
數デアアル。

依ツテ $n \rightarrow \infty$ = 對スルソノ極限 (ソレハ t ノ任意ノ
有限區間ヲノ一様收斂シタ極限) $\lambda_\varepsilon \{\varphi_\varepsilon(t) - 1\} = f_\varepsilon(t)$
モ亦ソウデナケレバナラヌ。

$f_\varepsilon(t)$ ガ或ル特性函数ノ對數デアアルコトカラ

$$\int_{|u| > \varepsilon} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dG(u)$$

が入ッテアル。蓋シ、コレト $f_\varepsilon(t)$ トハスギ、 $\lim_{m \rightarrow \infty} t(m)$ (ハ常数) デシカ異ラナイカラデアアル。又ニ又 $dG(u)$ ヲバ
 $|u| > \varepsilon = \int (1+u^2) dG(u)/u^2$ デ置キカヘヌモノハ、アル
 特性函数ノ對數デナケレバナラヌ。

次ニ $\varepsilon \rightarrow 0$ ナラシメル。ソノトキ、假定ニヨリ

$$(10) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|u| > \varepsilon} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} dG(u) \right)$$

ノ存在ハ確カデアアルガ、尚、上述ノ結果ニ依リコレハ、或ル
 特性函数ノ對數デナケレバナラヌ。然ルニ、コレト(7') トノ
 相異ルノハ、尚々 $\lim_{t \rightarrow \infty} t - \lambda t^2$ ($\lambda \geq 0$) ノ形ノ項ニ於テデア
 アル [$G(u)$ ノ $u=0$ ニ於ケル飛躍ニヨツテ入ガキマル]。
 シカルニ、 $\exp(t - \lambda t^2)$ ($\lambda \geq 0$) ガ Gauss
 ノ分布 (一般ノ) ノ特性函数デアアルコトハヨク知ラレテコト
 デアルカラ、コレト(10) ノ指数函数トヲ乗ジケモノ、即
 チ(7') ハ又特性函数デナケレバナラヌ。

次ニ $f(t)$ が無限ニ分解可能デアアルコトハ、任意ノ自然
 数 n ニ對シテ $\log f(t)/n$ が同ジク(7') ノ形式ニア
 ラハサレルコトカラ、今シガタ得タ結果ニ依リ、 $[f(t)]^{1/n}$
 モ亦特性函数デアアル。依ツテ補助定理3ヲ援用スレバ
 $f(t)$ ハ無限ニ分解可能デアアル。〔証明終〕

§ 3.2. 定理2ノ條件ノ必要ナ事ノ証明.

今、正数 $\varepsilon, \varepsilon'$ ヲバ、次ノ如ク選ンデアアルトスル:
 $\varepsilon^2 > \varepsilon' > 0, \varepsilon < 1/20.$

又ヲバ、無限ニ分解可能ナ法則 $f(t)$ ニ從フ確率

変数トシ、 $\{\bar{X}_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n$)、 $\bar{X}_i(\varepsilon^2, \varepsilon')$ -
分解ナリトスル。コレニ関シテ

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha_\nu(\varepsilon) \equiv \text{Pr.}[|\bar{X}_\nu| > \varepsilon], & \alpha(\varepsilon) \equiv \max_{1 \leq \nu \leq n} \alpha_\nu(\varepsilon) \\ \eta(\varepsilon) \equiv \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu(\varepsilon) \end{cases}$$

ト置ク。簡単ノタメニハ、夫々、 α_ν, α, η トモ書ク。次ニ
 $\{\bar{X}_i\}$ ヲバ更ニ分解スルタメニ、次ノ様ナミツノ確率変数
ヲ導入スル。

$$(12) \quad \begin{cases} 1^\circ & \mu'_\nu \text{ ハ } |\bar{X}_\nu| \leq \varepsilon \text{ ナル假定ノモトニ於テ} \\ & \mu'_\nu = \bar{X}_\nu \\ 2^\circ & \mu''_\nu \text{ ハ } |\bar{X}_\nu| > \varepsilon \text{ ナル假定ノモトニ於テ} \\ & \mu''_\nu = \bar{X}_\nu \\ 3^\circ & \lambda_\nu \text{ ハ } 0 \text{ 及ビ } 1 \text{ ノ、夫々確率 } \alpha_\nu, 1-\alpha_\nu \text{ デ} \\ & \text{トル確率変数。} \end{cases}$$

コレヲ用キルト、 $(\varepsilon^2, \varepsilon)$ - 分解ノ構成分子タル各 $\bar{X}_\nu$ ヲ
バ次ノ如ク分解出来ル。

$$(13) \quad \begin{cases} 1^\circ & \bar{X}_\nu = \bar{X}'_\nu + \bar{X}''_\nu \\ 2^\circ & \bar{X}'_\nu = (1-\lambda_\nu) \mu'_\nu, \quad \bar{X}''_\nu = \lambda_\nu \mu''_\nu. \end{cases}$$

斯ル $\bar{X}'_\nu, \bar{X}''_\nu, \mu'_\nu, \mu''_\nu, \lambda_\nu$ ($\nu=1, 2, \dots, n$) ヲ
バ $\bar{X}_i(\varepsilon^2, \varepsilon')$ - 分解ニ依ツテ定マルト略稱スル。

サテ定理 2 ノ條件ノ必要ナコトノ証明ハ次ノ三段カ
ヲ試ム：

第一段：上記條件ヲ満足シ且ツ充分小ナル正数 $\varepsilon, \varepsilon'$
ガ任意ニ與ヘラレルトキ、 $\bar{X}_i(\varepsilon^2, \varepsilon')$ - 分解ニ依ツテ得

ラレル $\bar{X}_\nu$, λ_ν , μ'_ν , μ''_ν = 對シテ、次ノ條件ヲ満足
スルヤウナ、 $\bar{X}$ ノミニ從屬シ、 $\varepsilon, \varepsilon' = \delta$ 無關係ナ正數 C ,
カ存在スル:

$$(14) \Pr. \left[\left| \bar{X} - \left\{ \sum_{\nu=1}^n \mu'_\nu + \sum_{\nu=1}^n \bar{X}_\nu - E \left\{ \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \mu'_\nu \right\} \right\} \right| \geq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right] < C, \varepsilon.$$

第二段: 次ノ様ナ函数 $n(u)$ ト正數列 $\{\varepsilon_k\}, \{\varepsilon'_k\}$
トカ存在スル。

$$\begin{cases} 1^\circ & n(u) \text{ハ}(8), 1^\circ \text{ノ性質ヲモツ。} \\ 2^\circ & \bar{X}_\nu, (\varepsilon_k^2, \varepsilon'_k) - \text{分割ニ依ツテ得ラレタ } \bar{X}_\nu'' \\ & (\nu=1, 2, \dots, n) = \text{對シテ} \end{cases}$$

$$(15) \sum_{\nu=1}^n \bar{X}_\nu'' - \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon_k} + \int_{\varepsilon_k}^{\infty} \right) \frac{u}{1+u^2} dn(u)$$

ノ從テ確率法則ノ特性函数 $g_{\bar{X}_\nu}(t)$ ハ、 $|t|$ ノ任意ノ有限
區間ニ一様ニ

$$(16) \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right) \left(e^{it u} - 1 - \frac{it u}{1+u^2} \right) dn(u)$$

收斂スル。

第三段: 定理2ノ條件ノ必要ナコトノ証明ノ完了。

第一段ノ証明: $\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu$ ヲバ、更ニ次ノ如ク分解スル:

$$(17) \begin{cases} 1^\circ & \eta(\varepsilon) \equiv \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu + \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu + \dots \\ & \dots + \sum_{\nu=1}^n p_n \alpha_\nu + \sum_{\nu=1}^n p_{n+1} \alpha_\nu \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^\circ \quad 1 - \varepsilon' \leq \sum_{\Delta} \alpha_{\Delta} \leq 1 \quad (\Delta = 1, 2, \dots, p_n) \\ 3^\circ \quad 1 - \varepsilon' > \sum_{\Delta} p_{n+1} \alpha_{\Delta} \end{array} \right.$$

第一段ハ I—VI カラ成ル。I—III = 於テハ、上記ノ各部分和 $\sum_{\Delta} (\Delta = 1, 2, \dots, p_n)$ ヲ調ベル。簡單ノ $\sum_{\Delta} \alpha_{\Delta}$ ヲ $\sum' \alpha_{\Delta}$ デ表ハシ、 $\sum_{\Delta} p_{n+1} \alpha_{\Delta}$ ハ $\sum' p_{n+1} \alpha_{\Delta}$ デ表ハスコトニスル。

I. $\varepsilon, \varepsilon'$ が充分小ナル正数トスレバ、確率 $2/3 =$ 関スル、 $\sum' \lambda_{\Delta} \mu_{\Delta}''$ ノ散縮度ハ ε ヨリ大デアル。

[証]: $\varepsilon, \varepsilon'$ ヲ充分小サクトツテ置ケバ、 $\sum' \lambda_{\Delta}$ + 確率変数ハ Poisson ノ分布ニ近イ分布ヲナス。(補助定理, 4) 従ツテ $1/e =$ 近イ確率、従ツテ $1/3$ ヨリ大ナル確率ヲ以ツテ、 $\sum' \lambda_{\Delta}$ ハ 0 ナル値ヲトル、同様ニ、 $\sum' \lambda_{\Delta}$ が 1 ナル値ヲトル確率 $\leq 1/3$ ヨリ大デアル。然ルニ $\sum' \lambda_{\Delta}$ が 0 ナルトキニハ $\sum' \lambda_{\Delta} \mu_{\Delta}''$ ハ 0 デアリ、 $\sum' \lambda_{\Delta}$ が 1 ナルトキニハ $\sum' \lambda_{\Delta} \mu_{\Delta}''$ ハ ε ヨリ大デアル。由ツテ $\frac{2}{3} =$ 関スル $\sum' \lambda_{\Delta} \mu_{\Delta}''$ ノ散縮度ハ ε ヨリ大デアル。〔詳しく説明スレバ：長サガ ε ヲ超ヘナイ如何ナル区間ニ、 $\sum' \lambda_{\Delta} =$ 對應スル $\sum' \lambda_{\Delta} \mu_{\Delta}'' = 0$ ノ起ル場合カ或ハ $\sum' \lambda_{\Delta} = 1 =$ 對應スル $\sum' \lambda_{\Delta} \mu_{\Delta}'' > \varepsilon$ ノ起ル場合カ少クモ一方ヲ含マナイ。而シテ上ノ二ツノ場合ノ起ル確率ハ共ニ $1/3$ ヨリ大デアル。依ツテ長サガ ε ヲ超ヘナイ如何ナル区間ニ確率 $2/3$ ヲ擔フコトハアリ得ナイ〕

II. $\varepsilon, \varepsilon'$ が充分小ナル正数ナラバ, 確率 $2/3 =$
関スル, $\sum' (\mu'_\nu + \lambda_\nu \mu''_\nu)$ ノ散縮度ハ ε ヨリ大デアル。

[証]: 蓋シ, μ'_ν ハ λ_ν トモ μ''_ν トモ独立, 故ニ
 μ'_ν ト $\lambda_\nu \mu''_\nu$ トハ独立デアル。独立ノ項ノ加法ニヨリ散縮
 度ハ増加スルニ方デアルカラ (散縮度増加ノ原理, §1,
 及び §3ノ註(6)) Iカラ直ニIIヲ得ル。

III. 確率 $5/6 =$ 関スル, $\sum' ((1-\lambda_\nu) \mu'_\nu + \lambda_\nu \mu''_\nu)$
ノ散縮度ハ ε が充分大ナルトキ $= \varepsilon$ ヨリ大デアル。

[證]: $\Sigma' =$ 関シテナク $\Sigma =$ 関シテノ標準偏差
 ノ評價:

$$\begin{aligned} D^2 \left\{ \sum_{\nu=1}^n \lambda_\nu \mu'_\nu \right\} &= \sum_{\nu=1}^n D^2 \{ \lambda_\nu \mu'_\nu \} \\ &\leq \sum_{\nu=1}^n E \{ \lambda_\nu^2 \mu'^2_\nu \} = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu E \{ \mu'^2_\nu \} \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\alpha_\nu}{1-\alpha_\nu} E \{ \Sigma'^2_\nu \} < \frac{1}{1-\varepsilon'} (\varepsilon^4 + \varepsilon^2 \varepsilon') \\ &< \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon'} \varepsilon^4 < 3\varepsilon \varepsilon^4. \end{aligned}$$

[茲ニ $E \{ \Sigma'_\nu \} < \varepsilon^4 + \varepsilon^2 \varepsilon'$ ハ, $|\Sigma'_\nu| \leq \varepsilon^2$ が
 確率 $\alpha_\nu(\varepsilon^2) < \varepsilon'$ ノ場合ヲ除イテ成立チ、除カレタ場
 合ニ於テモ ε ヲコエナイコトカラ得ラレル, ヲノ他ノ不
 等式ハ自明]。

$\Sigma =$ Σ' ノ部分和デアアル $\Sigma' =$ 関シテモ同様ノ評
 價ニ依リ

$$D^2 \left\{ \sum_{\nu}' \lambda_{\nu} u'_{\nu} \right\} < 3 \eta' \varepsilon^4 \leq \varepsilon^4$$

ヲ得ル。依ツテ Bienaymé - Tchebycheff, 不等式 = 依リ、

$$\text{Pr.} \left[\left| \sum_{\nu}' \lambda_{\nu} u'_{\nu} - E \left\{ \sum_{\nu}' \lambda_{\nu} u'_{\nu} \right\} \right| \geq \frac{\varepsilon}{4} \right] < 48 \varepsilon < \frac{1}{6}$$

但シ、茲 = $\varepsilon < \frac{1}{20}$ トイフコトヲ用ヒタ。〔始メ = カツノ如ク假定シテ置イヌノハコノタメデアル。〕

依ツテ 確率 $5/6$ = 對スル、 $\sum_{\nu}' \lambda_{\nu} u'_{\nu}$ ノ散縮度ハ $\frac{\varepsilon}{2}$ ヨリ 大デアアル。コレト II トカラ、求ムル結果 = 到達スル。

IV. 確率 $9/10$ = 對スル Σ ノ散縮度ハ $\varepsilon \sqrt{p_n}/2$ ヨリ 大デアアル。茲 = ε ハ $\varepsilon' =$ 無關係ノ定数 = トルコトガ出來ル。

〔証〕: (17), $I^0 =$ 對應スル Σ ノ分解:

$$\Sigma = \sum_{\nu} \Sigma_{\nu} + \sum_{\nu} \Sigma_{\nu} + \cdots + \sum_{\nu} p_n \Sigma_{\nu} + \sum_{\nu} p_{n+1} \Sigma_{\nu}$$

= 於テ各 Σ_{Δ} ($\Delta = 1, 2, \dots, p_n$) ノ散縮度 l_{Δ} = 関シテハ、III = 依ツテ

$$l_{\Delta} \left(\frac{5}{6} \right) > \frac{\varepsilon}{2} \quad (\Delta = 1, 2, \dots, p_n)$$

が知ラレタ居ル。依ツテ $\sum_{\nu} \Sigma_{\nu} + \sum_{\nu} \Sigma_{\nu} + \cdots + \sum_{\nu} p_n \Sigma_{\nu}$ ハ所謂

「下 = 有限ノ散縮度ヲ有スル独立ノ確率変数ノ和」ヲナス、コレ = 對シテ補助定理 6 (Lévy - Doeblin)

定理) を利用すれば, $\sum_{\nu} p_{\nu} + \sum_{\nu} p_{\nu} + \dots + \sum_{\nu} p_{\nu} = \text{関シ}$
 η , IV の主張が成立ツ。依ッテ γ の和 = 更 = 独立な確
 率変数ノ項 $\sum p_{n+1}$ を加ヘタ X = ツイヲハ, 散縮度増
 加ノ原理 = 依リ尚更ソヲデナケレバナラヌ。

V. 充分小ナル凡ベテノ ε = 就イテ, $\varepsilon^2 \eta(\varepsilon)$
 $\wedge$, X ノ ε = 従属シテ定マル或ル定数 C を超エナ:
 $\varepsilon \eta(\varepsilon) \leq C$.

[証]: 確率 $9/10$ = 関スル, X ノ散縮度ヲ C' ト
 スル。勿論 $C' < \infty$. サテ IV = ヨリ $C' > 6\varepsilon\sqrt{p_n}$ デアル。
 故 = $k \wedge \varepsilon = \varepsilon$ $\varepsilon' = \varepsilon$ 無関係 = トレル。 $\varepsilon\sqrt{p_n} < C'/6$ ト
 ナル。他方 $\eta(\varepsilon) < p_{n+1}$ = 注意スレバ求メル結果 = 到
 達出来ル。

VI. 第一段ノ証明ノ完了: III ト IV ト = 依リ。

$D^2 \left\{ \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} u'_{\nu} \right\} \wedge 3 \eta \varepsilon^4$ ヲ、依ッテ ∇ = 依リ

$\leq C \varepsilon^2$ ヲ、超ヘナ。 $C_1 = \leq C$ トオケベ, *Bienaymé-Tchebycheff* ノ定理 = 依リ

$$\text{Pr.} \left[\left| \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} u'_{\nu} - E \left\{ \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} u'_{\nu} \right\} \right| \geq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right] < C_1 \varepsilon$$

ヲ超ヘナ。他方 $X \wedge (9), (13) =$ 依リ表ハサレルカラ、
 上ノ不等式ハ証明セントスル式 = 外ナラナイ。

第二段ノ証明: ε' が充分小ナラバ, $(\varepsilon^2, \varepsilon')$
 一分割 = 依ッテ得ラレタ $\sum X'_{\nu}$ = 對シヲハ, 次ノ
 事カイヘル。

(i) 各項ハ夫々極メテ小ナル確率ノ場合ヲ除イテ 0
ニナル。

(ii) $\sum_{\nu=1}^n \bar{X}_{\nu}''$ ノ平均値ハ必ズシモ 0 デナイ。

依ツテ ε' が充分小ニナルバ, $\sum_{\nu=1}^n \bar{X}_{\nu}''$ ノ從フ特性函
數ハ,

$$(18) \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) (e^{it\mu} - 1) d\varphi_{\varepsilon, \varepsilon'}(\mu)$$

ナル形ノ函数ニ極メテ近クナル。〔詳シク云ヘバ, $T > 0$,
 $\delta > 0$ ノ任意ニ與フルトモ, $\varepsilon'(\delta)$ が存在シテ $\varepsilon' < \varepsilon'(\delta)$
ナルスベテ, $\varepsilon' =$ 對シテ $|t| \leq T =$ テ $\sum_{\nu=1}^n \bar{X}_{\nu}''$ ノ特性
函数ト () ト差が δ ノ超ヘナイヤウナ $\varphi_{\varepsilon, \varepsilon'}$ が
存在ス〕

然ルニ、他方カラ考ヘルト

$$(19) \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) d\varphi_{\varepsilon, \varepsilon'}(\mu) = \eta_{\varepsilon'}(\varepsilon) < \frac{C}{\varepsilon^2} + 1$$

デアアル。茲ニ C ハ $\varepsilon' =$ モ $\varepsilon =$ モ無關係デアアル。ソコデ
 $\varphi_{\varepsilon, \varepsilon'}(\pm\infty) = 0$ トイフ條件ヲ附加スルト $\{\varphi_{\varepsilon, \varepsilon'}(\mu)\}$
ナル非減少ト函数ノ集合ハ緊ツテ居ル。依ツテ、
コノ函数集合カラ部分函数列 $\{\varphi_{\varepsilon_k, \varepsilon'_k}(\mu)\}$ ($k=1, 2, \dots$)
ヲトツテ、或ル $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ ニ非減少
ト函数 $\eta(\mu)$ へ, $\eta(\mu)$ ノ凡ベテ、連続点デ收斂スル極
ニ出來ル。(19)ニ依ツテ明カニ (18), 2°ノ性質ヲコノ $\eta(\mu)$

ハモタネバナラヌ。従ツテ、

$$(20) \quad \left(\int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} \right) \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) d\pi(u)$$

ハ意味ヲモツ。吾々カ得タ結果ハ上記ノ $\{\varepsilon_k\}, \{\varepsilon'_k\}$ ヲ
トレバ $\Sigma / (\varepsilon_k^2, \varepsilon'_k)$ - 分解 = 依ツテ得ラレタ Σ''
($\nu = 1, 2, \dots, n$) = 對シテハ

$$(21) \quad \sum_{\nu=1}^n \Sigma''_{\nu} = \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon_k} + \int_{\varepsilon_k}^{\infty} \right) \frac{u}{1+u^2} d\pi(u)$$

ヲ従フ確率法則ノ特性函數 $g_k(t)$ ハ $k \rightarrow \infty$ ノトキ、
 $|t|$ ノ区間デ一樣 = (20) = 收斂スル。

第三段ノ証明： 第二段ガ導入シタ $\Sigma / (\varepsilon_k^2,$

$$\varepsilon'_k) - \text{分解} = \text{對スル } \sum_{\nu=1}^n u'_{\nu} + \sum_{\nu=1}^n \Sigma''_{\nu} - E \left\{ \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} u'_{\nu} \right\},$$

特性函數ヲ $f_k(t)$ デ表ハサウ。

$$(22) \quad \sum_{\nu=1}^n u'_{\nu} - E \left\{ \sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} u'_{\nu} \right\} + \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon_k} + \int_{\varepsilon_k}^{\infty} \right) \frac{u}{1+u^2} d\pi(u)$$

ノ特性函數ヲ $h_k(t)$ トスル。(22)ノ第二, 三項ハ常數(k
=ハ從属スルガ)デアル。第一項 = 對シテ Liapounoff
ヲ適用出来ルカラ。結局次ノヤウナ性質ヲモツタ實數列 $\{m_k\}$,
正數列 $\{\lambda_k\}$ ノ存在ガ云ヘル: t ノ任意ノ有限區間デ
一樣 =

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{ h_k(t) - \exp(i m_k t - \lambda_k t^2) \} = 0.$$

然ル = 第一段ト第二段ト = ヨリ t ノ任意ノ有限區間デ,
 $f_k(t), g_k(t)$ ハソレダレ一樣 = $f(t), g(t)$ = 收斂

スル $f_n(t) = h_n(t) g_n(t)$ デアルカラ、 $h_n(t)$ ハ $f(t)/g(t) =$, t ノ任意ノ有限區間デ一様ニ收歟シナケレバナラヌ。依ツテ、 m_n, λ_n ハ夫々 m (実数), λ (正数) $=$, $n \rightarrow \infty$ ノトキ、收歟セネバナラヌ。從ツテ $f_n(t) = h_n(t) g_n(t)$ ハ $n \rightarrow \infty$ ノトキ、 $\exp(imt - \lambda^2 t^2) g(t) =$, t ノ任意ノ有限區間デ一様ニ收歟スル、第一段ニ依リ、 $f(t) = \exp(imt - \lambda^2 t^2) g(t)$ 。依ツテ第三段ハ出来タ。

§ 3, 1 — § 3, 2 = 依リ定理 2 ノ証明ハ完結シタ。

§ 4. 無限ニ分解可能ナ確率法則ノ Arithmétique.

定理 3. 無限ニ分解可能ナ確率法則ノ特性函数ヲバ、
(7) ナル形ニアラハス仕方ハ、 m, λ ガ実数デ、 $n(u)$ ガ実数値デ且ツ $n(\pm\infty) = 0$ ナリトスレバ、只一通リニ定マル。

証明: 今假リ $=$, $m, \lambda, n(u), m', \lambda', n'(u)$ ナルニ通りノ書き方がアルトスル。(7) ノ右辺ガ意味ヲモツト $=$ ハ、閉區間 $(-\infty, 0)$ 及ビ $(-\infty, 0)$ デ、 $n(u), n'(u)$ ハ有界変分デナケレバナラヌ。

先ヅ、 $n'(u), n(u)$ ガ共ニ上ノ閉區間デ非減少ナリトスル。然ルトキ $=$ ハ $n(u) - n(u'), n'(u) - n'(u')$ ハ共ニ、高サガ $[u, u']$ = 属スルヤウナ突然変化ノ平均値ヲ示サネバナラヌ。依ツテ $n(u) - n(u') = n'(u) - n'(u')$, $n(\pm\infty) = n'(\pm\infty) = 0$ デアルカラ、 $n(u) = n'(u)$

トナル。コノ事カラ $m = m'$, $\lambda = \lambda'$ ヲ得ルコトハ明カ
デアル。

次ニ、 $n(u)$, $n'(u)$ が 開區間 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$
ヲ單ニ有界狭小トスレバ如何。コノトキニハ、 $n(u) = n_1(u)$
 $- n_2(u)$, $\bar{n}(u) = \bar{n}_1(u) - \bar{n}_2(u)$ トナレヤリト非
減少ト函数 n_1 , n_2 , $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ ガアル、從ツテ

$$mit - \lambda \frac{t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) d[n_1(u) + n_2'(u)]$$

$$= mit - \lambda' \frac{t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) d[n_1'(u) + n_2(u)]$$

トナル。定理2ニヨリ、各辺ハ無限ニ分解可能ト確率法則ノ
特性函数ノ對數ヲ示シ、 $n_1(u) + n_2'(u)$, $n_1'(u) + n_2(u)$
ハ開區間 $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ ヲ非減少デアアル。依
ツテ、 $n_1(u) + n_2'(u) = n_1'(u) + n_2(u)$ トナラネバ
ナラス。即チ $n(u) = n'(u)$ 。コレカラ前ト同様ニ $m = m'$,
 $\lambda = \lambda'$ ヲ得ル。〔証終〕

定理4. $\mathcal{G}$ ニ属スル $\mathcal{L} = L_1^m L_2^\lambda \prod L_u^{dn(u)}$ ガ、

$\mathcal{G}$ ニ属スル $\mathcal{L}_1 = L_1^{m_1} L_2^{\lambda_2} \prod L_u^{dn_1(u)}$ ニ依ツテ $\mathcal{G}$ ニ於テ合

解サレルタメノ必要條件ハ

$$m_2 = m - m_1, \quad \lambda_2 = \lambda - \lambda_1,$$

$$n_2(u) = n(u) - n_1(u)$$

ニ依ツテ定義サレタ m_2 , λ_2 , $n_2(u)$ が (8)〔§3〕ヲ
満足スルコトデアアル。而シテ、コノ條件が満足サレル

トキハ、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1^{m_2} \mathcal{L}_2^{\lambda_2} \prod \mathcal{L}_u^{d_{n_2}(u)}$$

トナリ、従ッテ $\mathcal{L}_2$ ハ唯一通りニキマル。

証明： 定理 2 ト 3 トカラ明カナル。