



Title	Banach空間ニ於ケル linear operation ノ iteration ニ就テ II
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 166, p. 505-511
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74661
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

731. Banach 空間 = 於ケル linear operation / iteration = 就テ II

角 谷 静 大 (阪大)

吉田氏ハ前号、談話 724 (431 頁) = 於テ Markoff
ノ連鎖 = 關シテ Doob⁽¹⁾ノ條件が満足サレテアルトキハ、
コレヲ抽象的 = Banach 空間 / linear operator
トシテ扱フコト = ヲツテ、Doobノ得タヨリモ更 = 一般ナ
結果が得ラレルコトヲ示サレタ。コレハ吉田氏が最 = 得ラ
レタ定理⁽²⁾ (J. v. Neumann / Mean ergodic
theoremノ拡張)ノ一ツノ應用例トシテ非恠 = 面白い

(1) J. L. Doob: Stochastic process with an
integral valued parameter, Trans. Amer.
Math. Soc. 44(1938), 87-150.

(2) 談話 720, 確率論へ / 積分方程式ノ應用 ∇ (Banach
空間 = 於ケル mean ergodic theorem).

ノデアル。本号ニ於テハ、更ニ一般ニ *Doebelin*⁽³⁾ノ
 條件ガ満足サレテキル場合ヲモ同様ニ抽象的ナ議論ガ可能
 デアルコトヲ示サウ。コノ場合ハ私ガ談話 7/1 (680)⁽⁴⁾ガ
 使ッタ方法ガ有效デアル。

先ヅ §3ニ於テ *Banach space*ノ *linear operator*
 ニ関シテ前ニ得タ結果ヲ一般ニ場合ニ拡張シ、コレヲ §4ニ
 於テ *Doebelin*ノ場合ニ應用スル。

§ 3

E ヲ *Banach space*, A ヲ E ヲ E ノ中ニ寫入
*bounded linear operator*トセヨ。 E ノ *unit*
sphere $\|x\| \leq 1$ ノ A ニヨル *image*ガ *weakly*
compact (in E)ナルトキ A ハ *weakly completely*
continuous (*schwach vollstetig*)ナルト云
 フ。コレハ明カニ *completely continuous* (*vollstetig*)⁽⁵⁾

(3) *Doebelin*ノ條件ニツイテハ本号ノ私ノ紹介ヲ見タイタ
 ギキタイ。 *Doebelin*ノ條件ハ *Dooß*ノ條件ヨリ一般デ
 アル。シカモ *Doebelin*ノ得タ結果ハ *Dooß*ノコレヨリ
 モ (アレ意味デ) 精密デアル。

(4) 本紙上談話会 162号、巻号ハ 680トナツテキルガコレハ 7/1
 ノ誤リデアル。(163号最初ノ改正記事参照)

(5) $\|x\| \leq 1$ ノ A ニヨル *image*ガ *compact* (in E)ナルトキ
 A ハ *completely continuous*ナルト云フ。

ト云フ概念ノ擴張デアール。

7/1 (680), § 1 = 於テハ E 自身が *locally weakly compact* デアルコトヲ假定シタガ、コノ條件ノ代リ A が *weakly completely continuous* デアツテモ § 1 デ得ラレタ結果が成立スルコトハ明カデアール。ヨツテ次ノ定理が成立スル。

定理 7. A が *weakly completely continuous* デ且ツ $\|A^n\| \leq C$, $n = 1, 2, \dots$ ナル如キ C が存在スレバ $\frac{A + A^2 + \dots + A^n}{n}$ ハ或ル *bounded linear operator* A_1 = 弱収斂シテ且ツコノ A_1 ハ

$$(i) \quad \|A_1\| \leq C$$

$$(ii) \quad A \cdot A_1 = A_1 \cdot A = A_1, \quad A^n \cdot A_1 = A_1 \cdot A^n = A_1, \\ (n = 2, 3, \dots)$$

$$(iii) \quad A_1^2 = A_1$$

ヲ満足スル。

吉田氏ハ更ニ追ンデ、同ジ假定ノモトデ、定理 7 = 於ケル 弱収斂 が 強収斂 デ置キカヘ得ルコトヲ示サレタ。⁽⁶⁾

次ニ、Kryloff-Bogoljuboff ノ結果がコノ *weakly completely continuous operator* ノ場合ニ拡張出来ナイカラ考ヘル。即チ $\|A - V\| = \epsilon < 1$

(6) コレハ非常ニ美シイ結果デ、コレニヨツテ J. v. Neumann ノ *Mean Ergodic Theorem* が遙カニ一般ノ場合ニモ成立スルコトがワカツタノデアール!

ナル如キ *weakly completely continuous* +
operator ∇ が存在スルトキ $\frac{1}{n} (A + A^2 + \dots + A^n)$
ハ収斂スルデアロウカ? ト云フコトヲ考ヘル。コレが先ノ
Kryloff-Bogolious ノ場合ノ如ク一様 = 収斂シナ
イコトハ槌像がツクカセメテ弱収斂カ強収斂ハシナイデア
ロウカ?

コノ問題ハ肯定サレル。即チ

定理 8. $\|A - \nabla\| = \alpha < 1$ ナル如キ *weakly completely continuous* + *linear operator*
 ∇ が存在シ、且ツ $\|A^n\| \leq C, n = 1, 2, \dots$ ナル如キ
 C が存在スレバ $\frac{1}{n} (A + A^2 + \dots + A^n)$ ハ、 ∇ ノ
linear operator $A, =$ 強収斂スル。

証明: 定理 7, 定理 1. 又ハ吉田氏ノ定理 (談話 720)
ノ証明ヲ見レバ、コノ定理 8ヲ証明スルタメニハ、任意ノ
 $x \in E =$ 對シテ $\frac{1}{n} (Ax + A^2x + \dots + A^nx)$ ($n =$
 $1, 2, \dots$) が *weakly compact* (in E) デアル
コトヲ証明スレバ十分ナコトが容易ニワカル。ヨッテ
適當ニ部分列 $\{n_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) ヲトツテ
 $\frac{1}{n_\nu} (Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu}x)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) が弱収斂
スル様ニスルコトが出来ルコトヲ示サウ。

定理 7 ノ証明ト同ジキニ任意ノ integer $p =$
對シテ $\nabla_p = A^p - (A - \nabla)^p$ ナル *linear operator*
ヲ考ヘルトコレハ *weakly completely continuous*
デアル。(7)

———— (脚註 (7) ハ次頁ニ) ————

$\exists \epsilon_p \left(\frac{1}{n} (Ax + A^2x + \dots + A^{n-p}x) \right) \quad (n=1, 2, \dots)$ から部分列 $\nabla_p \left(\frac{1}{n_\nu} (Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu-p}x) \right)$ ($\nu=1, 2, \dots$) を選んでこれが E 1-点 = 弱収束スル様 = スルコトが出来ル。シカモ、 $p=1, 2, \dots$ = 對して *diagonal method* を行へば、同じ部分列 $\{n_\nu\}$ ($\nu=1, 2, \dots$) = 對して $\nabla_p \left(\frac{1}{n_\nu} (Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu-p}x) \right)$ が $p=1, 2, \dots$ = 對して E 中の点 ε_p = 弱収束スル x_p = スルコトが出来ル。(勿論 ϵ_p の $\lim$ ε_p は p = depend スルカモシレナシ)。コノ $\{n_\nu\}$ = 對して点列 $\frac{1}{n_\nu} (Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu}x)$ を考へルト任意 $f \in \overline{E}$ = 對して

$$\begin{aligned}
 & f\left(\frac{1}{n_\nu} (Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu}x)\right) \\
 &= f\left(\frac{1}{n_\nu} (Ax + A^2x + \dots + A^p x)\right) \\
 &\quad + f\left(\frac{1}{n_\nu} A^p (Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu-p}x)\right) \\
 &= f\left(\frac{1}{n_\nu} (Ax + A^2x + \dots + A^p x)\right)
 \end{aligned}$$

- (7) 何となれば $\nabla_p = A^p - (A - \nabla)^p$, 右辺を展開スレバ A^p 1 項ハ消エテ、少クとも一ツノ ∇ を含ム項、ミが残ル。然ル ∇ が $W.C.C.$ 十ラバ任意 *bounded linear operator* A = 對して $\nabla A, A \nabla$ が $W.C.C.$ = ナリ、又 ∇_1, ∇_2 が $W.C.C.$ 十ラバ $\nabla_1 + \nabla_2 \in W.C.C.$ トナルカラ (即チ $W.C.C.$ 十 operator 全体ハ、*bounded linear operator* 全体; *Ring*, オフ *ideal* を作ル!) ∇_p ハ $W.C.C.$

$$+ f\left(\nabla_p\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu-p}x)\right)\right) \\ + f\left((A - \nabla)^p \cdot \left(\frac{1}{n_\nu}(Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu-p}x)\right)\right)$$

故 =

$$\left| f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu}x)\right) - f(\xi_p) \right| \\ \leq \left| f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax + A^2x + \dots + A^p x)\right) \right| \\ + \left| f\left(\nabla_p\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu-p}x)\right)\right) - f(\xi_p) \right| \\ + \left| f\left((A - \nabla)^p \cdot \left(\frac{1}{n_\nu}(Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu-p}x)\right)\right) \right|$$

然レ = 右辺第一項 $\leq \|f\| \cdot \frac{1}{n_\nu} \cdot C \cdot p \cdot \|x\| \rightarrow 0$, 第二項 $\rightarrow 0$, 第三項 $\leq \|f\| \cdot \|A - \nabla\|^p \cdot \frac{1}{n_\nu} \cdot (n_\nu - p) \cdot C \cdot \|x\|$
 $\leq \|f\| \cdot \alpha^p \cdot C \cdot \|x\|$ ナラバ

$$\overline{\lim_{\nu \rightarrow \infty}} \left| f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu}x)\right) - f(\xi_p) \right| \\ \leq \|f\| \cdot \alpha^p \cdot C \cdot \|x\|.$$

コレヨリ先ツ任意ノ $p, q = \text{對シテ}$

$$\left| f(\xi_p) - f(\xi_q) \right| \leq \overline{\lim_{\nu \rightarrow \infty}} \left| f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu}x)\right) - f(\xi_p) \right| \\ + \overline{\lim_{\nu \rightarrow \infty}} \left| f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax + A^2x + \dots + A^{n_\nu}x)\right) - f(\xi_q) \right| \\ \leq \|f\| \cdot C \cdot \|x\| (\alpha^p + \alpha^q)$$

ヲ得ル, $f \in \overline{E}$ ハ任意ナラツタカラ

$$\|\xi_p - \xi_q\| \leq C \cdot \|x\| \cdot (\alpha^p + \alpha^q), \quad \alpha < 1$$

ヨツテ $\{\xi_p\}$ ($p = 1, 2, \dots$) ハ *fundamental sequence*

ヲトス。

コノ limit ヲ ξ トスレバ ($q \rightarrow \infty$ + シメルユ
トニヨリ)

$$\|\xi_p - \xi\| \leq C \cdot \|x\| \cdot \alpha^p$$

コレヨリ

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \left| f\left(\frac{1}{n_p}(Ax + A^2x + \dots + A^{n_p}x)\right) - f(\xi) \right| \\ \leq 2\|f\| \cdot \alpha^p \cdot C \cdot \|x\| \end{aligned}$$

左辺ハ p = 無関係ナリ且ツ $\alpha < 1$ ナルカラ

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n_p}(Ax + A^2x + \dots + A^{n_p}x)\right) = f(\xi).$$

$f \in \bar{E}$ ハ任意ナルヲツタカラ $\frac{1}{n_p}(Ax + A^2x + \dots + A^{n_p}x)$
ハ ξ = weakly convergent ナル。

此ノ如クシテ任意ノ $x \in E$ = 對シテ $\frac{1}{n}(Ax + A^2x + \dots + A^n x)$ ($n = 1, 2, \dots$) が weakly compact
ナルコトガワカツタ。アトハコレヲテ全ク同様ニヤレバヨ
イカラコレヲ定理 8 が証明オレス。

系. 定理 8 ハ條件 $\|A - V\| = \alpha < 1$ ノ代リ =
 $\|A^p - V\| = \alpha < 1$ ナラモ同様。