



Title	大数ノ法則, I
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 167, p. 532-535
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74664
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

734. 大数ノ法則, I

北川 敏男 (阪大)

§1. 相互=独立+確率変数ノ級数=関シテハ、近年著シイ研究ノ進展が見ラレタ。コレカラノ問題トシテハ、更=進ンデ、必ズシモ相互=独立ト限ラナイ。即チ一般ノ確率変数ノ級数ノ研究が残サレテ居ル。以下、簡單ノタメ、前者ヲ独立級数、後者ヲ聯鎖級数ト標語的=略称スル。

聯鎖級数ヲ研究スル手近ナ方法トシテ、独立級数ノ諸定理ノ拡張ヲ最初ノ目標=置クト云フ行キ方がアル譯デアロシ。即チコレヲ諸定理ノ証明ヲ再検討シ果シテ、確率変数ノ相互=独立トイフコトが本質的=必要ナノカ否カヲ調べル。或ルモノハ実ハ、モット緩イ條件ヲ置換シ得ルコトモアロウ。然ルトキニハ、聯鎖級数(或ル制限ノ下デノ)=關スル結果が得ラレル事=ナル。

聯鎖+確率現象ノ研究トシテハ、勿論、上述ノ如キ行キ方ノミ=満足出来ナイ。統計力学ノ示唆スルヤウナ色々ナ個々ノ聯鎖+確率現象ノ研究カラ出悉ンテ進ンデ行クコトが有效適切デアアル。スゴ前者ノ場合ニハ、既=完成シタ部門ノ結果ノ吟味カラ出悉スルダケニ、比較的=見透シガツケヌスイ、コノヤウナ行キ方ヲシテ、成功ヲ納メタモノトシテ、聯鎖級数=關スル反覆性ノ法則 (der Satz vom iterierten Logarithm) ヲ得ルコトが出来ル。コレハ大数ノ(強)法則ノ名ニ総括サレテ呼バレルコトモア

ル。私ハ茲ニ。

Paul Lévy: La loi forte des grands nombres pour les variables aléatoires enchaînées. Journ. de Math pures et appl. Sér. IX, 15 (1936)

ヲ最後ノ目標ニシテ、コノ方面ノ紹介ヲ試ミマウト思フ。

本誌 682 号、彷徨函数 (random functions) ノ §4 デ私ハ彷徨函数ニ関スル Kolmogorov ノ條件ノ証明ヲ映ヘタ、コレハソコデ必要ナダケニ止メテ (即チ Lebesgue 測度ノ導入ヲ可能ナラシメル目的)、既ニ知ラレテ居ル最良ノ評価ヲ導イテハ居ラナイ。(コレニ関シテハ實ハ反復對數ノ法則が成立スルコトハ以下ニ述ベルコトニ依ツテ明カデアアル) コレヲソノマニニ放置シテオクノモ氣がトガメル。彷徨函数ニ関スル研究ノ発展トシテ無限ニ介解可能ナ確率法則、更ニ進ミテハ、確率法則ノ介解問題ガアル。コレニ関シテハ別稿デ紹介ヲ続ケツマアル。

他方、定量的ナ問題ノ発展モアル譯デ、ソレモ亦極メテ重要ナコトト云ハナケレバナラナイ。本稿ニ於テハ、後者ヲ述ベル譯デアアル。

§2. 豫準的ナ考察 茲デハ、独立ナ確率変數ノ和ヲ論ズルニ當ツテ重要ナ手段トナル方法ガ、聯鎖ノ場合ニ拡張出来ナイカトイフコトヲ問題ニスル。

(I) 標準偏差: $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ガ相互ニ独立ガ且ツ $E\{X_\nu\} = 0, E\{X_\nu^2\} < \infty$ ($\nu = 1, 2, \dots$)

..., n) デアルバ

$$(1) \quad E\{S_n^2\} = E\left\{\left(\sum_{\nu=1}^n X_\nu\right)^2\right\} = \sum_{\nu=1}^n E\{X_\nu^2\}$$

トナル。然ルニ(1)ナル関係式ノ成立ノタメニハ相互ニ独立デ
ナクトモヨイ。例ヘバ

a. $\{X_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) ノドノニツモ独立
デアリ、且ツ $E\{X_\nu\} = 0$ ナル場合、[蓋シ $E\{X_i X_j\} =$
 $E\{X_i\}E\{X_j\} = 0$]

b. 任意ノ i, j ($i < j$) ニ就イテ次ノコトガ成立ス
ル場合: X_i ガ取ル知ラレタ数 ∞ フトル時、 X_j ノ従フ
條件付確率法則ニ対スル平均値 $E'\{X_j\}$ ハ 0 デアル。而
モコノコトガ何デアツテモ成立ツ場合。

$$[蓋シ \quad E\{X_i X_j\} = E\{X_i E'\{X_j\}\} = 0]$$

c. $X_1, X_2, \dots, X_{\nu-1}$ ガ知ラレタモノトシテ計算シ
タ X_ν ノ平均値 $E_{\nu-1}\{X_\nu\}$ ガ 0 デアル場合、

$$[蓋シ \quad \left(\sum_{j=1}^n X_j\right)^2 = 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} X_i X_j + \sum_{j=1}^n X_j^2]$$

d. $1 \leq \nu \leq n$ ノ各 ν ニツイテ $S_{\nu-1} = X_1 + X_2 + \dots$
 $\dots + X_{\nu-1}$ ノ知ルトキ X_ν ノ従フ條件付確率法則ノ平均値 0
ヲモツ場合、[cノ証明ニ依リ明ラカ]

ソノ他、イロイロノ充分條件ヲ與ヘルコトガ出来ルデア
ロウ。サテ(1)ナル関係が成立スルトキ *Biernaymé -*
Tchebycheff ノ定理ガ聯鎖級数ニツイテモ成立ツ: 任意
ノ $\epsilon > 0$ ニ対シテ

$$(2) \Pr\{|S_n| > c b_n\} < \frac{1}{c^2} \left(\text{但: } b_n = E\{S_n^2\} = \sum_{j=1}^n E\{X_j^2\} \right)$$

コノ事カラ容易 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n/n = 0$ ナラバ, $S_n/n \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$ ノトキ $0 =$ 平均収斂ヲナス, 従ツテ $0 =$ 確率収斂 (convergence in probability) ヲナス. (蓋シ (2) カラ $\Pr\{|S_n/n| > (c b_n/n)\} \leq 1/c^2$ ヨリナル. 茲ニ $1/c$, $c b_n/n$ ハ如何程デモ小サクトレルカラナル.] (例ヘバ $|X_j| \leq M$ 即チ一様ニ有界ノ場合, 假定ガ成立ツ)

カクノ如ク, 所謂標準偏差ノ増加ノ原理 (1) ノ成立ノ條件ヲ吟味シテミルト, 必バシモ相互ニ独立トイフコトヲ必要トシナイ。

然ラバ, 散縮度増加ノ原理 $\times$ Kolmogoroff ノ不等式ハ如何ナル形デ、聯鎖ナ確率変数ノ和ヘ拡張出来ルヲアロウオ。コレヲ次回ニ述ベル事ニスル。

[註] ニツヅクニ独立デ, (全体トシテ) 相互ニ独立デナイニツ確率変数ノ例. X_1, X_2, X_3 ハ共ニ $1, -1$ ヲバ夫々 $1/2$ ナル確率変数デトルトシ, $X_1 X_2 X_3 = 1$ ナリトスル。

X_1 ト X_2 トガ独立ナリトスル。然ルトキニハ, X_3 ト X_1 トハ独立デアル。

X_3 ト X_2 トハ独立デアル。然ルニ $X_1 X_2 X_3 = 1$ ガカラ X_1, X_2, X_3 ハ相互ニ独立デハナイ。