



Title	確率法則ノ分解問題, III
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 167, p. 536-543
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74665
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

1735. 確率法則ノ分解問題, III

北川 敏男 (阪大)

確率法則ノ分解問題ニ関スル基本的ナ結果トシテ、
Khintchine ノ基本定理ヲ擧ゲタ (§2)。ソノ証明ニ
先チ、前回ハ、無限ニ分解可能ナ確率法則ノ一般形式ヲ述ベ
(§3), ソレカラ無限ニ分解可能ナ確率法則全部ノ集合
Of = 於ケル *Arithmétique* ヲ述ベタ。今回ハ、無限
ニ分解可能ナ確率法則トイハベ對蹠的ナ関係ニアル分解不可
能ナ確率法則ニツイテ調べテミヨウ。

§5. 分解不可能ナ確率法則⁽¹⁾ (或ハ 恣ナル確率法
則) 確率法則ガ分解不可能デアルタメノ必要條件ハ何カ、
コレニツイテハ未ダ殆んど分ツテ居ラナイヤウデアル。又充
分條件トシテモ、極メテ初等的ナ事が断片的ニ得ラレテ居ル
ヤウニ過ギナイヤウデアル。將來ノ研究ニ俟タネバナラヌコ
トハ極メテ多イ。茲ニハ、Lévy ノ論文ニ依ヒ断片的ナ結
果ヲ羅列スルニ止メヨウ。

便宜上、言葉ヲ用ヒル：或ル確率変数 X = 関シテ實數

(1) P. Lévy: *L'arithmétique des lois de probabilité*.
Journ. Math. Pures et appliquées (1938) 及ビ

A. Khintchine: *Contribution à l'arithmétique des lois de distribution* *Bulletin de*
U. E. Moscou (1937) ニ由ル。

x が 可能値 (*value possible*) トイフ、ハ、任意ノ正数 ε ニ對シテ $|X - x| < \varepsilon$ トナル確率が正数ナルコトヲ意味スル。

次ニ $\text{Pr.}[X = x] > 0$ ナラバ、 X = 對シテ x ハ正ナル確率ヲモツトイフ。 U, V が相互ニ独立ナル確率変數デアルナラバ、 $U + V$ ノ可能値、全体ハ、 U ノ任意ノ可能値ト V ノ任意ノ可能値トノ和ヲ、アラユル組合セニ就イテツクツタモノノ全体ニ外ナラナイ (尤モ、異ツク組合セニ對應スル $U + V$ ノ値ガ偶々、相等シイコトモ起リ得ヤウ) 同様ナコトカ正ナル確率ヲモツ値ノ集合ニ就イテモ成立スル。

又 U, V = 對シテ正ナル確率ヲモツ値ガ夫々、丁度 p 個、丁度 q 個ナルトスルト、 U, V が相互ニ独立ナトキ、 $U + V$ = 對シテ正ナル確率ヲモツ値ハ少クモ $p + q - 1$ 個アリ、多クトモ $p + q$ 個ヲ越ヘナイ。(証: 假リニ $p \geq q$ トシヨウ。 $u_1 < u_2 < \dots < u_p, v_1 < v_2 < \dots < v_q$ ナラバ、夫々 U, V = 對シテ正ナル確率ヲモツ値トスル。

$u_1 + v_1, u_1 + v_2, u_2 + v_1, u_2 + v_2, u_2 + v_3, u_3 + v_2, u_3 + v_3, u_3 + v_4, \dots, u_q + v_q$ ツクリ、更ニ $u_{q+1} + v_q, u_{q+2} + v_q, \dots, u_p + v_q$ ツクリ。コレヲ $p + q - 1$ 個ハ、確カニ相異ツテ居ル (増加數列ヲナス)。“多クトモ”ノ分ハ自明)

以上ノヤウナ極メテ簡單幼稚ナコトイフ、次ノ事ガ導カレル。

(I) 分解不可能ナル充分條件:

定理 5. 確率変数 X の可能値、差が悉く相異ル

トキ、即ち X 、任意、四ツノ可能値 x_1, x_2, x_3, x_4
 $=$ ツイテ、 $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ が成立ツノハ、 $x_1 = x_3$ 且
 ツ $x_4 = x_2$ ナル場合ニ限ル時、 X ノ従フ確率法則ハ分解
 不可能ナル。

証明: 今假リニ、 X が、共ニ單位法則 (§1) テナシ (従
 ヲツ可能値が少クモ二ツ存在スル)、相互ニ独立ナ U, V
 ノ和ヲ分解セタトスル。 U, V ノ可能値 $u_1, u_2; v_1,$
 $v_2 =$ 對シテ $x_1 = u_1 + v_1, x_2 = u_2 + v_1, x_3 = u_2$
 $+ v_1, x_4 = u_2 + v_2$ トオケバ假定ニ矛盾スル [証
 終]。

例: X ノトル値ハ $\{x_n\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) テ
 $x_p - x_q = x_{p'} - x_{q'}$ トナルノハ $p = p', q = q'$ トキ
 ニ限ルトスレバ、明カニ定理 2 ノ假定ヲ満足スル。例ヘバ
 $x_n = \log p_n$ [p_n ハ n 番目ノ素数]

(II) 素因子 (facteurs indécomposables)

ノ數: 分解不可能ナ確率法則ニ關聯シテ次ノコトが問題
 $=$ ナラウ: 即チ與ヘラレタ確率法則が分解不可能ナ確率法
 則ノ積ニ分解出来ルトキ、ソノ分解不可能ナ確率法則即チ素
 ナル確率法則ノ個數ノ最大値ヲ求メルコトナル。コレニ關
 シテ次ノ様ナコトが知ラレテ居ル。

$X =$ 對スル可能値が悉ク $\log N$ ノ形、(N ハ高々 ρ
 個ノ素數ノ積) ナルナラバ、 X ノ従フ確率法則ヲ確率法則
 ノ積ニ分解スルトキ、ソノ因子數ハ高々 ρ ナル。又 $X =$

對スル可能ナ値ガ悉ク $\log \frac{N}{N'}$ ノ形 (N, N' ハ共ニ、高々 p 個ノ素数ノ積) ナアルナラバ、 Σ ノ從フ確率法則ヲ確率法則ノ積ニ分解スルトキ、ソノ因子數ハ高々 2 p ナアル。(Levy) 証明ハ定理 5 ノソレニ準ズレバ宜シイ。

(III) 本質的ニ異ナル分解: 或ル確率法則ノニツノ分解 ϕ , $\phi' =$ 於テ、 ϕ ノ各因子 (facteurs) ノ夫々ニ適當ナ單位法則ヲ掛ケルコトニ依リ、 ϕ' ヲ得ルトキ (但シ、ソノ際因子ノ順序トイフコトハ考慮ニ入レナイデヨイコトハ勿論ナル)。 ϕ ハ ϕ' ト單ニ外見上異ナル分解ナル。或ハ本質的ニ同じ分解ナルトイフ、(コノ概念ガ同値ノ三律ヲ満足シテ居ルコトハ明ラカナル)。次ニ、ニツノ分解ガ 本質的ニ異ナル (essentiellement différentes) 分解ナルトイフノハ、 ϕ, ϕ' ガ共ニ或ル分解 ϕ'' カラ、夫々何かノ方法ガ適當ニククリ合ス事 (groupements) ニ依ツテ、單ニ外見上異ナル分解ニモチ來ラシ得ルトイフヤウナ ϕ'' ノ存在シナイコトヲ意味スルノナル。確率法則ノ分解問題ニ於テハ、異ナル分解トイヘバ、ソレハ本質的ニ異ナル分解ヲ意味スル。單ニ外見上異ナルモノヲ區別スルノハ無意義ナル。

疑ヘラレタス確率法則ニ對シテ、本質的ニ異ナル分解ガ幾通りアルカ、コレガ又重要ナ問題トナルデアロウ。コレニ關シテモ未ダ殆ど分ツテ居ラナイ様ナル。

0, 1, 2, -----, $p-1$ ヲ夫々確率 $1/p$ ナトル確率変

数 Σ_p の確率法則 (特性函数) を $f_p(u)$ [$u = e^{it}$] デ表
ハサウ: 即ち

$$L_p: f_p(u) = \frac{1}{p} (1 + u + \dots + u^{p-1}) = \frac{1 - u^p}{p(1 - u)}$$

然ルニ、 $f_{pq}(u) = f_p(u) f_q(u^p) = f_q(u) f_p(u^q)$ デ
アルカラ、

$$\Sigma_{pq} \sim \Sigma_p + p \Sigma'_q \sim \Sigma_q + q \Sigma'_p$$

トナル。茲ニ Σ_p ト Σ'_q トハ独立、 Σ_q ト Σ'_p トハ独立デア

ル。〔例ヘバ $p=2, q=3$ トスレバ $(0 \text{ on } 1) + (0 \text{ on } 2 \text{ on } 4) \sim (0 \text{ on } 1 \text{ on } 2) + (0 \text{ on } 3)$ トナル〕。 $p=2, q=3$
ノ場合、本質的ニ異ナル分解ガ得ラレル。

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = k; p_1, p_2, \dots$$

$\dots, p_n \dots$ 相異ナル素数) トルトキ L_n ハ、丁度 $k! / (\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!)$ 個ノ本質的ニ相異ナル分解ヲモツ。(証明ハ容易デアル)

以上、極メテ容易ニ看ラレル事柄ヲ述ベルニ止メタ。本
節ノ (I), (II), (III) ノカタニ於テモツト遙ンダ結果ニ得ラレ
テ居ルガ、多クハ証明ガ述ベテナイカラ、ソレヲコソニ報告
スルコトハ差控ヘヌウ。

§ 6. [挿記] 確率法則ノ *arithmétique* ノ
複雑ヲ示スニ三ノ面白い例ヲ挙ゲヨウ:

例 1 $L = L, L_2 = L', L_2' \text{ トナリ、而シテ } L_1 \text{ が}$

$\mathcal{L}' = \text{依ッテモ或ハ } \mathcal{L}'_2 = \text{依ッテモ分解サレナイ例 (Lévy):}$

今 X ハ $[0, 1]$ デ一様分布ヲナス確率変数トシ、 $2X, 2X_2, 3X', 3X'_2$ ハ夫々 $2X$ ノ整数部, $2X$ ノ小数部, $3X$ ノ整数部, $3X$ ノ小数部ヲ表ハス確率変数トシ、 X, X_2, X', X'_2 ノ確率法則ヲ夫々、 $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2$ トスレバ、 X ト X_2, X' ト X'_2 ハ夫々独立デ $X - X_2 + X_2 = X' + X'_2$; 依ッテ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2$ 。

然ルニ $\mathcal{L}_1$ ハ $\mathcal{L}'_1 = \text{依ッテ分解出来ナイ}$ 。今假リニ分解出来タトスルト $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}'_1 \mathcal{L}''_1$ ($\mathcal{L}''_1$ ハ単位法則デナイ) トナル。 $\mathcal{L}'_1 = \text{従フ } X'$ ノトル値ハ $0, 1/3, 2/3$ ノ三ツ、 $\mathcal{L}''_1 = \text{従フモノハ、少クモ二ツノ相異ナル不可能値ヲモツ}$ 。依ッテ X_1 ハ少クモ三ツノ相異ナル可能ナ値ヲモタネバナラス。コレハ事實ニ反スル。次ニ $\mathcal{L}_1$ ハ $\mathcal{L}_2'' = \text{依ッテ分解出来ナイ}$ 。蓋シ、 X'_2 ノトル値ハ長サ $1/3 < 1/2$ ノ区間ニ分配サレテ居レカラデアル。

例 2 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1$ が定マツテ $\mathcal{L}_2$ が唯一ツニハ定マラヌ例 (Lévy) $f_1(t), f_2(t)$ ハ共ニ、 $|t| \leq 1$ ニ於テハ $1 - |t|$ ニ等シク、 $|t| > 1$ ノトキニハ、 $f_1(t)$ ハ常ニ 0 デアリ、コレニ反シ $f_2(t)$ ハ周期 2 ノ周期函数デアルトスル。簡単ナ計算ノ結果

$$f_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cos tx \, dx$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2 \pi^2} \cos(2n+1)\pi t$$

デアルコトが分カル。コレハ、 $f_1(t), f_2(t)$ ハ共 = 特性函数デアルコトヲ示ス。然レニ、 $f(t) \equiv f_1(t)f_2(t) = [f_1(t)]^2$,
即チ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}, \mathcal{L}_1$.

例 3 分解不可能 + 確率法則 $\mathcal{L}'$ = シテ、シカモニツノ無限 = 分解可能 + 確率法則 $\mathcal{L}, \mathcal{L}''$ ノ商トシテ表ハサレルモノ (Lévy)

$(2 + e^{it})/3$ ヲ特性函数ニスル確率法則ヲ $\mathcal{L}'$ トスル。 $\mathcal{L}'$ ハ明テカ = 分解不可能 [$\mathcal{L}'$ = 従フ確率変数ノトル値ハ 0, 1 ノ只ニツグカラ]; 一方 $(2 + e^{it})/3$ ハ t ノ函数トシテハ 0 = ナラヌカラ、 $\log \{(2 + e^{it})/3\}$ ハ $t = 0$ デ 0 = ナル分枝ヲトレバ一意ニ定マリ、ソノ虚数部ハ $-i\pi/6$ ト $i\pi/6$ トノ間ニアル。コレヲ Fourier 級数ニ展開スル:

$$\log\left(\frac{2+e^{it}}{3}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (e^{int} - 1)$$

$a_n > 0$ ナラバ、 $a'_n = a_n$, $a_n \leq 0$ ナラバ、 $a'_n = 0$,
 $a''_n = a'_n - a_n$ トスレバ $a'_n \geq 0$, $a''_n \geq 0$ ナリ

$$\log\left(\frac{2+e^{it}}{3}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} a'_n (e^{int} - 1) - \sum_{-\infty}^{\infty} a''_n (e^{int} - 1)$$

右辺ヲ $\psi_1(t) - \psi_2(t)$ デ表ハスト。§3 = 依リ、 $\psi_1(t), \psi_2(t)$ ハ共 = 無限 = 分解可能 + 確率法則ノ特性函数デアル事ガワカル。

例 4 無限 = 分解可能デ、シカモニツノ素ナル確率法則ノ積トシテ表ハサレル例 (Khintchine)

$$\frac{5+4\cos t}{9} = \frac{2+e^{it}}{3} \cdot \frac{2+e^{-it}}{3} \text{ デアルカラ}$$

$\frac{5+4\cos t}{9}$ ハニツノ素ナル、(≡分解不可能+) 確率法則

(特性函数)ノ積デアル。例3ト同様ニ、 $\log \left\{ \frac{5+4\cos t}{9} \right\}$

ヲバ考ヘ、コレヲバ、 $\psi(t)$ トオキ $\psi(t)$ ヲバ Fourier 級数ニ展開シテ、コレヲ、non-negative +

係数ヲモツ三角級数ノ和ニ分テラルコトヲ示セバヨ
1。