



Title	Fourier級數二就テ
Author(s)	泉, 信一; 河田, 龍夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 167, p. 550-564
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74667
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

737. Fourier 級数 = 就イテ

泉 信 一 (東北大)
河 田 龍 夫

1. $f(x)$ は 2π を周期とする可積分函数トシ、 $f(x)$ の Fourier 級数ヲ

$$(1.1) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$$

トスル。 (1.1) の部分和及び第一次平均ヲ $S_n(x)$ 及び $\sigma_n(x)$ ガ表ス。最近 A. Zygmund (Fund. Math., 30 (1938)) が級数

$$(1.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(x) - \sigma_n(x)|^2}{n}$$

ノ収斂カラ色々ノ面白い結果ヲ導イテアル。

吾々ハコゝデ (1.2) ヨリモ更ニ一般ナ級数

$$(1.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(x) - \sigma_n(x)|^p}{n}$$

ヲ考ヘル。之レト關聯シテ

$$(1.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(x) - f(x)|^p}{n}$$

ナル級数が考ヘラレル。 (1.4) ノ方ハ (1.3) ヨリモ収斂問題等ハ困難ナ様デアル。

吾々ハ前ニ Notes on Fourier series (V), 東北数学雑誌, 34 (1938) = 於テ (1.4) ノ収斂ニ關シテ次ノ結

果ヲ得タ。

定理. $p > 1$, $\delta < p-1$ 及び $\alpha p > 1$ トスル。モシ

$$(1.5) \quad a_n \log^\alpha n, b_n \log^\alpha n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

ガ $L^p =$ ヲク スル 函数ノ Fourier 係数デ 且ツ

$$(1.6) \quad \int_t^\pi \frac{\phi(u)}{n} du = O(|\log t|^\delta),$$

$$\phi(u) = \phi(x, u) = f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)$$

ガ 集合 $E =$ 於テ 成立 シテ キル ナラバ, (1.4) ハ E ノ 殆ンド
スベテノ 点ヲ 収斂 スル。

$\rightarrow$ = ノ ベル 結果ハ (1.4) ヲ (1.3) デ オキリ ヘル トキ
= ハ, (1.6) = 関スル 条件ハ 不用 = ナル コト デ アル。更ニ 之ヲ
一般ニ シテ (1.5) ガ $H =$ ヲク スル 函数ノ Fourier 級数デ
アツテ モ ヨイコトヲ 証明スル (定理3)。最後ニ 之等ノ 問題
ニ 関係 シタ ニ 三ノ 不等式 定理ヲ 証明スル。

2. 定理1. $1 < p \leq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ トスレバ

$$(2.1) \quad \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n - \sigma_n|^q}{n} \right) dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leq C \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) \log^{\alpha p} n \right\}^{\frac{1}{p}}$$

従ツテ、右辺ガ 有限ナトキ

$$(2.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n - \sigma_n|^q}{n}$$

ハ 殆ンド スベテノ 点デ 収斂 スル。

之レヲ 証明スル タメニ, 次ノ Young-Hausdorff
ノ 定理ヲ 用ヒル。

定理 A. $1 < p \leq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ トスル。又 $f(x) \in L^q$

トラバ

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leq C \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) \right\}^{\frac{1}{p}}$$

定理 1, 証明. $S_n = S_n(x)$ 及び $\sigma_n = \sigma_n(x)$,

定義カラ

$$(2.3) \quad S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^n \nu A_{\nu}(x)$$

定理 A = 於ケル $f(x)$ テ上ノ函数ニトルトキ

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |S_n - \sigma_n|^q dx &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^n \nu A_{\nu}(x) \right|^q dx \\ &\leq C \frac{1}{n^q} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \nu^p (|a_{\nu}|^p + |b_{\nu}|^p) \right\}^{\frac{q}{p}} \\ &\leq C \frac{1}{n^q} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \frac{\nu^p}{\log^{\alpha p} \nu} (|a_{\nu}|^p + |b_{\nu}|^p) \log^{\alpha p} \nu \right\}^{\frac{q}{p}} \\ &\leq \frac{C}{\log^{\alpha p} n} \left\{ \sum_{\nu=1}^n (|a_{\nu}|^p + |b_{\nu}|^p) \log^{\alpha p} \nu \right\}^{\frac{q}{p}} \end{aligned}$$

故ニ

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} |S_n - \sigma_n|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha p} n} \left(\sum_{\nu=1}^n (|a_{\nu}|^p + |b_{\nu}|^p) \log^{\alpha p} \nu \right)^{\frac{q}{p}} \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} (|a_{\nu}|^p + |b_{\nu}|^p) \log^{\alpha p} \nu \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

故ニ求ムル結果ヲ得ル。

3. 次 = 定理 / 7 次, ャウ = 一般 = 出来ル.

定理 2. $p > 1$, $\Delta p > 1$ トスル, モシ

$$(3.1) \quad a_n \log^\alpha n, \quad b_n \log^\alpha n \quad (n=1, 2, \dots)$$

が L^p 函数 $g(x)$ の Fourier 係数ナラバ

$$(3.2) \quad \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(x) - \sigma_n(x)|^p}{n} \right) dx \leq C \int_0^{2\pi} |g(x)|^p dx$$

特 = 左辺 / integrand (1.3) が殆んどスベテ / 点デ收敛スル.

之ヲ証明スルヲメ = 次 / 定理ヲ用ヒル.

定理 B. $p > 1$ 及ビ $f(x) \in L^p$ ナラバ

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p dx \leq C \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx$$

定理 C. (Hardy-Littlewood). $p > 1$ 及ビ $f(x) \in L^p$

ナラバ

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |\sigma_k(x)| \right\}^p dx \leq C \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx$$

定理 2 / 証明: (2, 3) 及ビ Abel's lemma ナラ

$$S_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^n \nu A_\nu(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^n \frac{\nu}{\log^\alpha \nu} \cdot A_\nu(x) \log^\alpha \nu$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n-1} \Delta \left(\frac{\nu}{\log^\alpha \nu} \right) \sum_{\mu=1}^{\nu} A_\mu(x) \log^\alpha \mu$$

$$+ \frac{1}{n+1} \frac{n}{\log^\alpha n} \sum_{\mu=1}^n A_\mu(x) \log^\alpha \mu$$

$$= I_1 + I_2$$

トオク。故 =

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n - \sigma_n|^p}{n} \right) dx \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} |I_1|^p dx \\ + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} |I_2|^p dx = J_1 + J_2$$

トオク、 $g(x)$, Fourier 級数, 部分和 $t_n(x)$ トオ
クトキ

$$J_2 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha p} n} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\mu=1}^n A_{\mu}(x) \log^{\alpha} \mu \right|^p dx \\ = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha p} n} \int_0^{2\pi} |t_n(x)|^p dx$$

故 = (3.1) = 関スル 條件定理 B 及ビ $\alpha p > 1$ カラ

$$J_2 \leq C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha p} n} \int_0^{2\pi} |g(x)|^p dx \leq C \int_0^{2\pi} |g(x)|^p dx$$

又, Abel's lemma = $\exists$ 1).

$$J_1 \leq C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{n-1} \Delta \left(\frac{\nu}{\log^{\alpha} \nu} \right) \sum_{\mu=1}^{\nu} A_{\mu}(x) \log^{\alpha} \mu \right|^p dx \\ \leq C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{n-1} \Delta^2 \left(\frac{\nu}{\log^{\alpha} \nu} \right) \nu \tau_{\nu}(x) \right|^p dx \\ + C \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \int_0^{2\pi} \left| \Delta \left(\frac{n-1}{\log^{\alpha} (n-1)} \right) (n-1) \tau_{n-1}(x) \right|^p dx$$

$\tau_{\nu} = \tau_{\nu}(x) \wedge g(x)$, Fourier 級数, 第一次平均デアル。

$$J_1 \leq C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \int_0^{2\pi} \left(\max_{1 \leq \nu \leq n} |\tau_{\nu}(x)| \cdot \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\log^{\alpha+1} \nu} \right)^p dx$$

$$+ C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^{\lambda} n} \int_0^{2\pi} |\tau_{n-1}(x)|^p dx$$

故 = 定理 C カラ

$$J_1 \leq C \int_0^{2\pi} |g(x)|^p dx$$

4. 更 = 定理 2 ラ 一般 = スル。ソノ主ト急ハ Zygmund
ノ 定理ヲ 用ヒルコトデアル。

$f(x)$ トソノ 共軛函数ガ可積分ナルトキ, $f(x)$ ハ H -class
= ヲク スルトイヒ, $f(x) \in H$ ト カフ。従ツテ H -class ハ
 $L^p(p > 1)$ ヨリ広ク L ヨリ狭イ。

定理 3.

$$(4.1) \quad 0 < p \leq 2, \quad \lambda > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$$

又ハ

$$(4.2) \quad p \geq 2, \quad \lambda \geq 1 - \frac{2}{p}$$

トスル, モシ

$$(4.3) \quad a_n \log^{\lambda} n, \quad b_n \log^{\lambda} n \quad (n=1, 2, \dots)$$

ガ H -class ノ 函数, Fourier 係数ナラベ, 級数

$$(4.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n - \widetilde{\sigma}_n|^p}{n^{\lambda}}$$

ガ殆ンド スベテノ 急デ 収斂スル。

$$(4.5) \quad p > 2, \quad 2 \geq q \geq 1, \quad \lambda \geq \frac{p-2}{pq}$$

デ且ツ (4.3) ガ L^q ノ 函数, Fourier 係数ナラベ, (4.4)
ハ殆ンド スベテノ 急デ 収斂スル。

之ヲ証明スルタメニ次ノ定理ヲ用ヒル。

定理 D. $1 \leq p \leq 2$. $f(x) \in L^p$ + ラバ強ノドスベ
テ $x = \text{對シテ}$

$$|S_n(x)| = O(\log^{\frac{1}{p}} x)$$

$p=1$, $p=2$ ノ場合ハヨリ知ラレテアル。 $1 < p < 2$ ノ場
合ハ Littlewood - Paley = 算ヲモノデアル。

定理 E (Zygmund) $f(x) \in H$ + ラバ, 強ノドス
ベテ $x = \text{對シテ級数}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S_n(x) - \sigma_n(x)|^2}{n}$$

ハ收歟スル。

定理 3ノ証明: 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \log^{\alpha} n$$

ノ部分和及び第一項平均ヲ $t_n(x)$, $\tau_n(x)$ ナ表ハストキ,

Abel's lemma ヲ

$$\begin{aligned} S_n(x) \sigma_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^n \nu A_{\nu}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\log^{\alpha} \nu} \cdot \nu A_{\nu}(x) \log^{\alpha} \nu \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n-1} \Delta \left(\frac{1}{\log^{\alpha} \nu} \right) \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu A_{\mu}(x) \log^{\alpha} \mu \\ &\quad + \frac{1}{(n+1) \log^{\alpha} n} \sum_{\mu=1}^n \mu A_{\mu}(x) \log^{\alpha} \mu \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n-1} \Delta \left(\frac{1}{\log^{\alpha} \nu} \right) (\nu+1) \{t_{\nu}(x) - \tau_{\nu}(x)\} + \frac{1}{\log^{\alpha} n} \{t_n(x) - \tau_n(x)\}, \end{aligned}$$

$$|S_n(x) - \sigma_n(x)| \leq C \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \frac{|t_\nu(x) - \tau_\nu(x)|}{\log^{\alpha+1} \nu} + \frac{1}{\log^\alpha n} |t_n(x) - \tau_n(x)|$$

$$= J_1 + J_2$$

トオク. Cauchy の不等式カラ

$$J_1 \leq \frac{C}{n} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \frac{|t_\nu(x) - \tau_\nu(x)|^2}{\nu} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \frac{\nu}{\log^{2(\alpha+1)} \nu} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{C}{\log^{\alpha+1} n} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \frac{|t_\nu(x) - \tau_\nu(x)|^2}{\nu} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

右辺ノ和ハ定理 E カラ殆ンドスベテノ点ヲ有限デ, $\langle D^2(x) \rangle$.

故ニ殆ンドスベテノ x ニ對シテ

$$J_1 \leq \frac{CD(x)}{\log^{\alpha+1} n}$$

$(\alpha+1)p > 1$ カラ

$$(4.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |J_1|^p \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^{(\alpha+1)p} n} < \infty.$$

今、(4.1) が成立シテルトスル. Hölder's inequality
カラ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |J_2|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n} |t_n - \tau_n|^p$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n - \tau_n|^2}{n} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^{2p/(2-p)}} \right)^{\frac{2}{2-p}}$$

右辺ノ第一項ハ定理 E カラ殆ンドスベテノ点ヲ有限デ, 第二
項ハ (4.1) カラ有限デアール。

故ニ (4.6) ト合セテ, 求ムル結果ヲ得ル。

次 = (4.2) が成立シテ ルト スル トキ, 定理 D カラ 殆ンド
 スベテノ $\alpha = \alpha_n$ シテ

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |J_2|^p &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n - \tau_n|^2}{n} \frac{|t_n - \tau_n|^{p-2}}{\log^{dp} n} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n - \tau_n|^2}{n} \frac{\log^{p-2} n}{\log^{dp} n} \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n - \tau_n|^2}{n} \end{aligned}$$

故 = 定理 E カラ 求ムニ 結果ヲ シル。

最後 = (4.5) が 満サレテ ルト スル、(4.3) ヲ Fourier
 係数ト スル 函数ガ L^p ニゾク スル ト スル、コノ トキニ (4.6)
 が 成立 スル。更ニ 定理 D カラ

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |J_2|^p &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n - \tau_n|^2}{n} \frac{(\log n)^{(p-2)/p}}{\log^{dp} n} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n - \tau_n|^2}{n} \end{aligned}$$

故 = 求ムル 結果ヲ 得ル。

5. 定理 4. α 及 ビ p が (4.1) 及、(4.2) ヲ 満
 足 スル ト スル。 (4.3) が H -class 函数, Fourier
 係数ヲ ラベ, 級数

$$(5.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |s_{n_k} - \sigma_{n_k}|^p$$

が 殆ンド スベテノ 点ヲ 収斂 スル、但シ

$$(5.2) \quad n_{k+1} / n_k > \theta > 1 \quad (k=1, 2, \dots)$$

ト スル。

又 α, p, f が (4.5) ヲ 満足 シ 且ツ (4.3) が L^p 函

数、Fourier 係数+ラベ、(5.1) ハ殆んどスベテ、
急デ収斂スル。

之ヲ証明スルノニ上、定理 D, Eノ外ニ次ノ定理ヲ用
ヒル。

定理 F. $f(x) \in H$ 及び $\{n_k\}$ が (5.2) ヲ満足
スルトキ、

$$\sum_{k=1}^{\infty} |S_{n_k}(x) - \sigma_{n_k}(x)|^2$$

が殆んどスベテ、急デ収斂スル。

定理 4ノ証明。定理 3ノ場合ト同様ニ

$$\begin{aligned} |S_{n_k}(x) - \sigma_{n_k}(x)| &\leq \frac{C}{n_k} \sum_{\nu=1}^{n_k} \frac{|t_{\nu}(x) - \tau_{\nu}(x)|}{\log^{d+1} \nu} \\ &\quad + \frac{C}{\log^d n_k} |t_{n_k}(x) - \tau_{n_k}(x)| \\ &= L_1 + L_2 \end{aligned}$$

トオク、然ルトキ

$$L_1 \leq \frac{C}{\log^{d+1} n_k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n_k} \frac{|t_{\nu}(x) - \tau_{\nu}(x)|^2}{\nu} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} L_1^p \leq C \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|t_{\nu}(x) - \tau_{\nu}(x)|^2}{\nu} \right\}^{\frac{p}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\log^{d+1} n_k}$$

$$n_{k+1}/n_k > \theta > 1 \quad \text{ナラバ} \quad n_k > \theta^k.$$

$$\text{故ニ} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \log^{-(d+1)} n_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1/\{k^{(d+1)} \log \theta\} < \infty$$

故ニ右辺ハ殆んどスベテ、急デ有界ナル。

又、(4.1) が満足サレテルトキ Hölder の不等式

カラ

$$\sum_{k=1}^{\infty} |L_2|^p \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |t_{n_k} - \tau_{n_k}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n_k)^{2dp/(2-p)}} \right)^{\frac{2}{2-p}}$$

右辺ハ定理 F 及び $2dp/(2-p) > 1$ カラ殆ンドストベテノ
級デ有限デアル。残りノ部分ニ同様ニ出来ル。

6. 次ニ定理ノト關聯シテ次ノ定理ヲ証明スル。

定理 5.

$$(6.1) \quad 1 < p \leq 2, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1$$

トスルトキ

$$(6.2) \quad \left\{ \int_0^{2\pi} dx \int_0^{2\pi} \frac{|f(x+t) - f(x-t)|^q}{t} dt \right\}^{\frac{1}{q}} \\ \leq C \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) \log n \right\}^{\frac{1}{p}}$$

コノ定理ハ $p=2$ ノトキハ (6.2) = 於テ $C=1$ ナ, 不等号ガ
等号デオキカヘラレルコトガ証明サレテアル (Plersiner,
Crelle's Journ., 1925)

定理 5ノ証明

$$(6.3) \quad f(x+t) - f(x-t) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nt - a_n \sin nt) \sin nt$$

故ニ定理 A カラ

$$\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^q dx \leq C \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) | \sin nt |^p \right)^{q/p},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^q dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) |int|^p \right)^{q/p} \\
&\leq C \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t} \left(\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor} (|a_n|^p + |b_n|^p) |int|^p \right)^{q/p} \\
&+ C \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t} \left(\sum_{n=\lfloor \frac{1}{t} \rfloor + 1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) |int|^p \right)^{q/p} = I_1 + I_2
\end{aligned}$$

ト I_1 於 t $|int| \leq nt \leq 1$. 故 =

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_0^{2\pi} t^{q-1} \left(\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor} (|a_n|^p + |b_n|^p) n^p \right)^{q/p} dt \\
&\leq \int_0^{2\pi} t^{q-1} \left(\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor} (|a_n|^p + |b_n|^p) \log n \cdot \frac{n^p}{\log n} \right)^{q/p} dt \\
&\leq \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t (\log \frac{1}{t})^{q/p}} \left(\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor} (|a_n|^p + |b_n|^p) \log n \right)^{q/p} \\
&\leq C \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) \log n \right\}^{q/p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t} \left(\sum_{n=\lfloor \frac{1}{t} \rfloor + 1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) \right)^{q/p} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t} \left(\sum_{n=\lfloor \frac{1}{t} \rfloor + 1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) \log n \cdot \frac{1}{\log n} \right)^{q/p} \\
&\leq \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t (\log \frac{1}{t})^{q/p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^p + |b_n|^p) \log n \right)^{q/p}
\end{aligned}$$

故 = (6.2) ヲ得ル。

定理 6. (6.1)ノ下ニ

$$(6.4) \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)| dt \geq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{q}-1} (|a_n|^p + |b_n|^p).$$

定理 G. (Young-Hausdorff). 条件 (6.1) / 下デ

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \geq C \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^q + |b_n|^q) \right\}^{\frac{1}{q}}$$

定理 H. (Hardy). $K \leq 1$, $r > 1$ トシ

$$(6.5) \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

トオクトキ

$$\int_0^{\infty} (xt)^K \frac{dx}{x^r} \leq C \int_0^{\infty} F^K \frac{dx}{x^r}$$

定理 6 の証明. (6.3) 及び定理 G カラ

$$\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^p dx \geq C \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^q + |b_n|^q) |\sin nt|^q \right\}^{p/q},$$

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^p dx$$

$$\geq C \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^q + |b_n|^q) |\sin nt|^q \right\}^{p/q}$$

$$\geq C \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t} \left\{ \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor} (|a_n|^q + |b_n|^q) |\sin nt|^q \right\}^{p/q}$$

$$\geq C \int_0^{2\pi} \frac{dt}{t^{1-p}} \left\{ \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{1}{t} \rfloor} (|a_n|^q + |b_n|^q) n^q \right\}^{p/q}$$

$r = \frac{1}{t}$ トオクトキ

$$J \geq C \int_{1/(2\pi)}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{p+1}} \left\{ \sum_{n=1}^{(\tau)} (|a_n|^q + |b_n|^q) n^q \right\}^{p/q}$$

$p/q \leq 1$. $p+1 > 1$ ナル事カラ, 定理 H = ヲリ

$$\begin{aligned} J &\geq C \int_1^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{p+1}} \left\{ (|a_n|^q + |b_n|^q) n^q \cdot n \right\}^{p/q} \\ &\geq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{q}-1} (|a_n|^p + |b_n|^p). \end{aligned}$$

故 = (6.4) 7 得 $\checkmark$.

定理 7. (6.1) / F 7

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |S_n(x) - \sigma_n(x)|^q dx \right) &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-1} (|a_n|^q + |b_n|^q), \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{q}-1} (|a_n|^p + |b_n|^p) &\leq \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |S_n(x) - \sigma_n(x)|^p \right) dx \end{aligned}$$

定理 I. (Hardy). $k \geq 1$, $r > 1$ ト $\checkmark$, (6.5) = ヲ γ 7

F(x) 7 定義スルトキ

$$\int_0^{\infty} F^k \frac{dx}{x^r} \leq C \int_0^{\infty} (xf)^k \frac{dx}{x^r}$$

定理 7 / 証. 定理 A カラ

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |S_n - \sigma_n|^q dx &= \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^n \nu A_{\nu}(x) \right|^q dx \\ &\leq \frac{C}{n^r} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \nu^p (|a_{\nu}|^p + |b_{\nu}|^p) \right\}^{q/p} \end{aligned}$$

定理 H カラ

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} |S_n - \sigma_n|^q dx &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q+1}} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \nu^p (|a_n|^p + |b_n|^p) \right\}^{q/p} \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q+1}} \left\{ n^p (|a_n|^p + |b_n|^p) \cdot n \right\}^{q/p} \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-1} (|a_n|^q + |b_n|^q).
\end{aligned}$$

又定理 G カラ

$$\int_0^{2\pi} |S_n - \sigma_n|^p dx \geq \frac{C}{n^p} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \nu^q (|a_\nu|^q + |b_\nu|^q) \right\}^{p/q}.$$

定理 I カラ

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} |S_n - \sigma_n|^p dx \\
&\geq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \nu^q (|a_n|^q + |b_n|^q) \right\}^{p/q} \\
&\geq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \left\{ n^q (|a_n|^q + |b_n|^q) \cdot n \right\}^{p/q} \\
&\geq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{p}{q}-1} (|a_n|^p + |b_n|^p).
\end{aligned}$$

故 = 定理が完全 = 証明出來タ。