



Title	Banach空間ニ於ケル linear operation ノ iteration ニ就テ, III
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 167, p. 565-576
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74668
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

738. Banach 空間 = 於ケル linear operation 1 iteration = 就イテ **IV**

角 谷 静 夫 (阪大)

§ 4.

§ 4 = 於テハ § 3 = テ得ラレタ結果ヲ *doebelin* 1 場合 = 應用スル。(*doebelin* 1 論文 = ツイテハ前号及び本号, 紹介記事ヲ参照サレヌイ)。コノテ考ヘルノハ特ニ Ω が直線上ノ interval $0 \leq x \leq 1$ デ、 $m(E)$ がソコデノ Lebesgue measure デアルトキデアル。

Doebelin 1 論文紹介 II, § 4 1 初メ = 述べヌ如ク、相當一般ノ場合モコレニ reduce スルコトハ出来ルガ、 Ω 及び $m(E)$ = 關シテ何等條件ノナイ場合ハコノ場合ニ reduce 出来ナイノデアル。シカシ *doebelin* 自身モ、*final set* 1 中デノ点ノ運動ヲ論ズル場合ハコレヲ假定シテキル。

サテ、假定ニヨリ、 $P(x, E)$ ハ $0 \leq x \leq 1$ ナル x 及び、 $0 \leq x \leq 1$ 1 部分 Borel 集合 E = 對シテ定義サレヌ $0 \leq P(x, E) \leq 1$ ナル函数デアル。コレハ x ヲ fix スレバ E = 關シテ *totally additive* ナ集合函数デアリ、 E ヲ fix スレバ $0 \leq x \leq 1$ = 於ケル x 1 *measurable function* デアル。

且ツ任意ノ x = 對シテ $P(x, \Omega) = 1$ デアル。

今 $\Omega(0 \leq x \leq 1)$ 1 部分 Borel 集合ヲ定義サレ

又 *totally additive* + 集合函数 (必ずしも *non-negative* + ラズ) / 全体 $\mathcal{M}$ を考へれば $\mathcal{M}$ は *linear space* デ、任意 / $\varphi \in \mathcal{M}$ = 對シテ

$$\|\varphi\| = \text{l.u.b.}_{E \in \mathcal{L}} \varphi(E) - \text{g.l.b.}_{E \in \mathcal{L}} \varphi(E)$$

= ヨツテ φ の *norm* $\|\varphi\|$ を定義スレバ $\mathcal{M}$ ハコノ *norm* = ヨツテ *Banach space* トナル。⁽¹⁾

又 = 、任意 / $\varphi \in \mathcal{M}$ = 對シテ $\psi(E)$ を

$$\psi(E) = \int_0^1 \varphi(d\ell_x) P(x, E)$$

= ヨツテ定義スレバ $\psi \in \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ トナリ、 $\varphi \rightarrow \psi \equiv T_\varphi$ ハ $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}$ / 中へ寫像スル *linear transformation* デナル。且ツ

$$\|T\| = 1$$

- (1) $\mathcal{M}$ ハ $0 \leq x \leq 1$ = テ定義サシタ *Bounded variation* / 函数ノ空間 (BV) トモ考ヘラレル。コノトナ $0 \leq x \leq 1$ = テ定義サレタ *Bounded variation* / 函数 $\varphi(x)$ = 對シテ

$$\|\varphi\| = |\varphi(0)| + \text{Var.}_{0 \leq x \leq 1} \varphi(x)$$

トオケバヨイ。但シ $\text{Var.}_{0 \leq x \leq 1} \varphi(x)$ ハ $0 \leq x \leq 1$ = 於ケル $\varphi(x)$ ノ

total variation ノ意ハス。 (BV) ハ *Banach* 空間デナルコソデ、*linear functional* ノ一般ノ形ガキマツテキタイ。コレガ種々ノ問題デ用ル所デアアル。

トナルコトニ容易ニワカル。但シ

$$\|T\| = \sup_{\substack{\|f\| \leq 1 \\ f \in M}} \|Tf\|$$

ニヨツテ $\|T\|$ ヲ定義スル。更ニコノ linear operator

T ニ對シテノ iteration T^n ヲ考ヘレバ T^n ガ

$$T^n f(x) = \int_0^1 f(y) P^{(n)}(x, y) dy$$

$$\begin{aligned} P^{(n)}(x, y) &= \int_0^1 P^{(n-1)}(x, z) P(z, y) dz \\ &= \int_0^1 P(x, z) P^{(n-1)}(z, y) dz \end{aligned}$$

$$P^{(1)}(x, y) \equiv P(x, y)$$

ニヨツテ與ヘラレ、且ツ

$$\|T^n\| = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

トナツテキルコトハ明カデアアル。

我々がコノ問題トシタイ、ハコノ linear operator

T ニ對シテ $\frac{1}{n}(T + T^2 + \dots + T^n)$ ガ $n \rightarrow \infty$ ナルト

キ如何ナル收斂ヲスルカト云フコトデアアル。コレヲ論ジルタ

メニハ $P(x, y)$ ニ何カ條件カナケレバナラヌコトハ勿論デ

アル。コノ條件トシテ *doob* 及び *doebelin*ノ與ヘ
タモノガアル。

(1) *doob*ノ條件: $0 \leq x, y \leq 1$ デ 2 変数ノ
函数トシテ measurable ナ函数 $p(x, y)$ ガ存在シ
テ、任意ノ x 及び任意ノ Borel 集合 E ニ對シテ $P(x, E)$
 $= \int_E p(x, y) dy$ トナル。(即チ *doebelin*ノ論文

紹介 II, §4 / 初メ = 與へた分解 $(\Delta) =$ 於テ $P_1(x, E)$,
 $P_2(x, E)$ が 現ハレヌコト, 又ハ任意ノ $x =$ 對シテ $P(x, E)$
 が E / 函数トシテ *absolutely continuous* =
 +ルコト). シカ $E \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots$,
 $\sum_{n=1}^{\infty} E_n = \Lambda$ +ル如キ任意ノ Borel 集合ノ系列 $\{E_n\} =$
 對シテ $\lim_{n \rightarrow \infty} P(x, E_n) = 0$ が $x =$ 關シテ一様 = 成立ス
 ル。

(2) Doebelin / 條件: ニツノ positive
 number $\eta, b > 0$ が存在シテ $x =$ 無關係 =, $m(E) < \eta$
 +ラバ $P(x, E) < 1 - b$ トナル。(2)

先ツ Doob / 條件 (1) ハソレト同等 + 次ノ條件 (3) デオ
 キカヘラレル。

(3) 任意ノ $\varepsilon > 0 =$ 對シテ $x =$ 無關係 + $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$
 が定マリ 且 $m(E) < \delta$ +ラバ $P(x, E) < \varepsilon$ トナル。

(3) が (1) ヲ含ムコトハ殆ンド明クデアル。何トナレバ

(2) Doob 及ビ Doebelin ハ何レモ $P(x, E)$ / 代リ $P^{(N)}(x,$
 $E)$ ($N =$ integer, fixed) = 對シテ上ノ條件ヲ述
 ベテキルガ $N = 1$ / 場合ヲ論ズレバ + 余ガアロウ。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T^N + T^{2N} + \dots + T^{nN}}{n}$, 收歛狀況ガワカレバヨレニヨツテ

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T + T^2 + \dots + T^n}{n}$, 收歛狀況ガワカルモラデアル。

先づ (3) の条件ヨリ $P(x, E)$ は各 x に対して E の *absolutely continuous* な函数トナリ、シタガツテ、 $P(x, E) = \int_E P(x, y) dy$ トナル如キ *density* $P(x, y)$ が存在スル。($P(x, y)$ は *Doebelin* の論文紹介 II, §4 の補助定理 1 = ヲツテ $0 \leq x, y \leq 1$ = 於テ 2 変数 (函数トシテ *measurable* ナル様 = トレル!) 更ニ $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \dots$ = テ $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \Lambda$ ナラバ $m(E_n) \rightarrow 0$ トナルカラ、条件 (3) ヲリ $P(x, E_n) \rightarrow 0$ が $x = \text{関シテ}$ 様ニ成立スル。

逆ニ (1) が成立スルトキ (3) が成立スルコトハ次の様ニスレバワカル。

若シ (3) が成立シナケレバ少クとも一ツノ $\varepsilon > 0$ が存在シテコレニ對シテ $m(E_n) < \frac{1}{2^n}$, $P(x, E_n) \geq \varepsilon > 0$ トナル如キ *Borel* 集合ノ系列 $\{E_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) が存在スル。 $\{E_n\}$ は必ズシテ *monotone* デハナイ、コレヲ *monotone* = スルタメ $E_n^* \equiv E_n + E_{n+1} + \dots$ ($n = 1, 2, \dots$) トオケバ $E_1^* \supset E_2^* \supset \dots \supset E_n^* \supset E_{n+1}^* \supset \dots$ トナリ、且ツ

$$m(E_n^*) \leq m(E_n) + m(E_{n+1}) + \dots$$

$$< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}}$$

トナルカラ $m(E_n^*) \rightarrow 0$ デアル、ヨツテ $E^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^*$ トオケバ $m(E^*) = 0$ 。ヨツテ $F_n \equiv E_n^* - E^*$ ($n = 1, 2, \dots$) トオケバ

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \dots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \Lambda$$

＝テ且ツ ($m(E^*) = 0 \Rightarrow P(x, E^*) = 0$ が得ラレ
ルカラ)。

$$\begin{aligned} P(x, F_n) &= P(x, E_n^*) - P(x, E^*) \\ &= P(x, E_n^*) \geq P(x, E_n) \geq \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

アアル。コレハ *doob* / 条件 (1) = 矛盾ナル。

此、如ク *doob* / 条件ヲ (3) / 形 = 直シテ見ルトコレ
ハ *doebelin* / 条件 = 比較シテ非常 = 強イモノデアアルコ
トが明カトナルデアロウ。

吉田氏ハ *doob* / 条件 / マル場合ハ T が $M \rightarrow M$ ナ
ル linear operator トシテ weakly completely
continuous = ナルコトヲ証明シ⁽³⁾ コレ = 前 = 吉田氏
= ヨツテ得ラレタ一般 Banach 空間 = 於ケル Mean
ergodic Theorem⁽⁴⁾ ヲ應用シテ $\frac{1}{n}(T + T^2 + \dots + T^n)$
が $n \rightarrow \infty$ ナルトキ強収斂スルコトヲ証明サレタ。
コレハ *doob* が得タ結果⁽⁵⁾ ヨリモ良イ結果デアアル。

次ニ私ハ、コノ吉田氏ノ著ヘテ更 = 一般 = シテ *doebelin*

(3) 吉田氏、前々号、談話724参照。(紙上談話会165号)

(4) 吉田氏、談話720(紙上談話会164号)

(5) J. L. Doob: Stochastic processes with an
integral valued parameter, Trans. Amer.
M. S. 41(1938)

ノ條件(2)が満足サレテキル場合ハ $\|T - V\| = \alpha < 1$ トナ
 ル如キ *weakly completely continuous + linear*
operator V が存在スルコトヲ証明シタイ。モシコレが証
 明出来レバ前号ノ結果⁽⁶⁾ = ヨツテ又ハリ $\frac{1}{n}(T + T^2 + \dots + T^n)$
 が強収斂スルコトがワカル。

$\|T - V\| = \alpha < 1$ トル如キ *weakly completely*
continuous + linear operator V が存在ス
ルコト。

Doebelinノ論文紹介Ⅱノ始メ = ノベヌコト = ユリ、
 $P(x, E)$ ハ次ノ如キ形ニ分解スルコトが出来ル。

$$P(x, E) = P_1(x, E) + P_2(x, E) + \int_E p(x, y) dy.$$

コト = $P_1(x, E)$ ハ $P(x, E)$ ノ *dis continuous* +
 部分, $P_2(x, E)$ ハ $P(x, E)$ ノ *continuous* +
singular + 部分, $p(x, y)$ ハ *density function*
 ナル。且ツ Doebelinノ論文紹介Ⅱノ補助定理1 = ヨ
 ッテ $p(x, y)$ ハ $0 \leq x, y \leq 1$ = テ 2 変数ノ函数トシテ
measurable + ϵ ノ = トルコトが出来ル。又、任意ノ
 $x (0 \leq x \leq 1)$ = 對シテ、 $p(x, y) > \frac{1}{\eta}$ トナル如キ点 y
 ノ集合 E_x ハ $m(E_x) < \eta$ ヲ満足スル。ヨツテ今 $y \in E_x$
 + ルトキ $q(x, y) = 0$, $y \notin E_x$ + ルトキ $q(x, y) = p(x, y)$.
 = ヨツテ $q(x, y)$ ヲ $0 \leq x, y \leq 1$ = 於テ定義スレバ
 $q(x, y)$ ハ $0 \leq x, y \leq 1$ = テ 2 変数ノ函数トシテ *measur-*

(6) 紙上談話会 166 号, 1131. 定理 8 (508 頁)

able τ , $\equiv \frac{1}{\eta}$ がアリ且ツ

$$Q(x, E) = \int_E q(x, y) dy,$$

$$R(x, E) \equiv P(x, E) - Q(x, E)$$

トオケバ

$$R(x, E) = P_1(x, E) + P_2(x, E) + \int_E (p(x, y) - q(x, y)) dy$$

トナリ、 $R(x, E)$ ハ任意ノ x, E = 對シテ

$$0 \leq R(x, E) < 1 - b$$

ヲ満足スル。先ヅ $R(x, E) \geq 0$ ナルコトハ明カ。 $R(x, E)$

$< 1 - b$ ナルコトヲ示スタメ $P_1(x, E)$, $P_2(x, E)$ ガ

positive = ナル部分 E'_x , E_x^2 ヲ考ヘル。 $m(E'_x) =$

$m(E_x^2) = 0$ ナル。ヨツテ $R(x, E)$ ガ positive

= ナル部分ハ $E'_x + E_x^2 + E_x = \tau$ 與ヘラレ⁽⁷⁾、コレハ

$m(E'_x + E_x^2 + E_x) < \eta$ ヲ満足スル。

此ノ如クシテ $P(x, E)$ ノ分解:

$$P(x, E) = Q(x, E) + R(x, E)$$

が出来るカラ $Q(x, E)$ ナビ $R(x, E) =$ 對應スル $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$

ナル linear operator ヲ夫々 V, W トスレバ

$$T = V + W$$

(7) E_x ハ $p(x, y) > \frac{1}{\eta}$ ナル部分。シタガツテ $p(x, y) - q(x, y)$

> 0 ナル部分。即チ $\int_E (p(x, y) - q(x, y)) dy > 0$ ナル

部分。

トナル、ヨツテ ∇ が *completely continuous* ナルコト及 $\|W\| = \alpha < 1$ ナルコトヲ示せば我々ノ目的ハ達セラレル。

$\|W\| = \alpha < 1$ ナルコト。コレハ任意ノ x, E = 對シテ $0 \leq R(x, E) \leq 1 - b$ ナルコトハ明カ。 $\alpha = 1 - b$ トオケバヨイ。

∇ が *weakly completely continuous* ナルコト。

$\varphi \in \mathcal{M}$ = 對シテ $\psi = \nabla \varphi \in \mathcal{M}$ ハ

$$\psi(E) = \int_0^1 \varphi(dx) Q(x, E)$$

= ヨツテ與ヘラレル。然ルニ $Q(x, E) = \int_E g(x, y) dy$ ナルコトヨリ

$$\begin{aligned} \psi(E) &= \int_0^1 \varphi(dx) \left(\int_E g(x, y) dy \right) \\ &= \int_E \left(\int_0^1 \varphi(dx) g(x, y) \right) dy \end{aligned}$$

ヨツテ $g(y) = \int_0^1 \varphi(dx) g(x, y)$ トオケバ $g(x, y) \leq \frac{1}{\eta}$ トナルコトヨリ $g(y)$ ハ *measurable* ナ且ツ有界 ($|g(y)| \leq \frac{1}{\eta} \|\varphi\|$ ナリ)。

$$\psi(E) = \int_E g(y) dy$$

トナル。ヨツテ $\psi \in \mathcal{M}$ ハ *absolutely continuous* ナシオモソノ *density* が有界ナル。即チ $\mathcal{M}$, *element*

$\mathcal{P}$ は absolutely continuous なるも、全体 $\mathcal{O}_1$ を表はし、更に $\mathcal{O}_1$ のうち、その density g が有界な $\mathcal{P}$ 全体 $\mathcal{O}_1$ を表はせば ∇ は $\mathcal{P}$ から $\mathcal{O}_1$ へうつす linear operator である。

さて ∇ が $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}$ へうつす linear operator として weakly completely continuous なることを証明しよう。ここで $\mathcal{P}_n \in \mathcal{M}$, $\|\mathcal{P}_n\| \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$ を任意に選べば、これよりその部分列 $\mathcal{P}_{n_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) 及び或る $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{M}$ を取って $\nabla \mathcal{P}_{n_\nu}$ が $\mathcal{P}_0$ に弱収斂するであろうことを示せばよい。即ち $\mathcal{M}$ で定義された任意の linear functional f に対して $f(\nabla \mathcal{P}_{n_\nu}) \rightarrow f(\mathcal{P}_0)$ となることを示せばよい。 $\mathcal{M}$ で定義された linear functional は一般に形が未だわかちがたい、その都合が悪いが、この障碍はうまく避けられる。即ち $\mathcal{U} = \nabla \mathcal{P}$ は $\mathcal{M}$ の element であるのミナラズ $\mathcal{O}_1$ に属して居り、 $\mathcal{O}_1$ は $(L)^{(8)}$ と isometrique であるから、 ∇ は $\mathcal{M}$ から (L) に寫像する linear operator であると考えられる。

しかも $\mathcal{M}$ で定義された linear functional f は $\nabla(\mathcal{M})$ (∇ は $\mathcal{M}$ の range) に対して考えればよい。

(B) (L) は $0 \leq x \leq 1$ で定義された measurable 函数

$$g(x) \text{ が } \int_0^1 |g(x)| dx < \infty \text{ なるも、全体集合 } \|g\| = \int_0^1 |g(x)| dx.$$

ディアルカラ $f \in (L)$ 7, functional f^* デアルトモ考
 ヘアレル. (L) / conjugate space $(M)^{(9)}$ デ
 アルカラ $\varphi \rightarrow \psi \equiv \nabla \varphi$, $\psi(\xi) = \int_{\xi} g(y) dy$ トスレバ

$$\begin{aligned} f(\nabla \varphi) &= f(\psi) = \int_0^1 \psi(d\epsilon_y) \cdot \omega(y) \\ &= \int_0^1 g(y) \omega(y) dy \end{aligned}$$

ト云フ形デ表ハサレル. コノ $\omega(y)$ ハ $0 \leq y \leq 1$ デ定義
 サレタ有界, measurable + 函数デアル. シカモ
 $\psi \in \mathcal{M}$, + ルコトヨリ, $g(y)$ ハ $\mathcal{M} = (L)$ = 属スルノミナラ
 ド入 (M) = モ属シテキル.

ヨツテ我々ノ問題ハ $g_n \in (M)$, $\|g_n\| \leq C$, $(n=1, 2, \dots)$ が任意ニ與ヘラレタトキ, ソノ部分列 g_{n_ν} ($\nu=1, 2, \dots$) 及び $g_0 \in (L)$ 7 取ツテ任意ノ $\omega(y) \in (M)$
 = 對シテ

$$\int_0^1 g_{n_\nu}(y) \omega(y) dy \rightarrow \int_0^1 g_0(y) \omega(y) dy$$

トナルヌヲ = フルト云フ問題 = reduce + レル. ⁽¹⁰⁾

(9) $0 \leq x \leq 1$ デ定義サレタ有界, measurable + 函数 $g(y)$ 全体
 ノ集合 $\|g\| = \text{ess. max}_{0 \leq y \leq 1} |g(y)|$.

(10) $g_0 \in (L)$ + ラシメルコトハ必ズシモ可能デ+イガフロ
 ヲ.

此ノ如キ部分列ヲ求メルタメニハ次ノ様ニスレバヨイ。

先ヅ $(M) \subset (L) = \tau(L)$ が separable ナルコトヨリ

(M) ハ (L) ノ topology ヲ separable ナル。

ヨツテ (L) ノ topology ノイミテ $(M) = \tau$ dense ナル

$\alpha_m(y) \in (M)$ ($m=1, 2, \dots$) ヲ取ルコトが出来ル。

コノ可附番個ノ $\alpha_m(y)$ ニ對シテ、始メ $g_n \in (M) =$

diagonal method ヲホドコセバ $\{g_n\}$ ノ部分

列 $\{g_{n_v}\}$ が存在シテ任意ノ m ニ對シテ

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^1 g_{n_v}(y) \alpha_m(y) dy$$

ハ收斂スル。トコロガ g_{n_v} ハスベテ $\in (M)$ ナリ、 $\{\alpha_m\}$

ハ (L) ノ topology $= \tau(M) = \tau$ dense ナルカラ、

任意ノ $\alpha \in (M) =$ 對シテ

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^1 g_{n_v}(y) \alpha(y) dy$$

が存在スル。即チ $\{g_{n_v}\}$ ハ (L) ノ element ト考ヘレバ

弱收斂スル。然ルニ (L) ハ weakly complete ナル

カラ $g_0 \in (L)$ が存在シテ $\{g_{n_v}\}$ ハ (L) ノイミテ $g_0 =$ 弱

收斂スル。即チ

$$\int_0^1 g_{n_v}(y) \alpha(y) dy \rightarrow \int_0^1 g_0(y) \alpha(y) dy$$

ガ任意ノ $\alpha(y) \in (M) =$ 對シテ成立スル。(証明終)