OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Continuous geometry 二就テ, II
Author(s)	古屋, 茂; 小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 168, p. 593-609
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74670
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

740. Continuous geometry ニ就テ. II

古屋 茂
小平邦彦 (東大)

§ 3. L-number

定義8. $\pi = \begin{pmatrix} j^{(1)} \cdots\cdots j^{(m)} \\ k^{(1)} \cdots\cdots k^{(m)} \end{pmatrix}$ ガ次ヘラレタトキ

$j_1^{(\mu)} = j^{(\mu)}$, $j_\sigma^{(\mu)} = k^{(\mu)}$, $\mu \neq \mu_\rho$ ナラバ

$j_\rho^{(\mu)} = j_{\rho+1}^{(\mu)}$ トナル $j_\rho^{(\mu)}$ ヲ任意ニ定メ

$$P\begin{pmatrix} j^{(1)} \cdots\cdots j^{(m)} \\ k^{(1)} \cdots\cdots k^{(m)} \end{pmatrix} - P\begin{pmatrix} j_1^{(1)} \cdots\cdots j_1^{(m)} \\ j_2^{(1)} \cdots\cdots j_2^{(m)} \end{pmatrix} \cdots\cdots P\begin{pmatrix} j_{\sigma-1}^{(1)} \cdots j_{\sigma-1}^{(m)} \\ j_\sigma^{(1)} \cdots j_\sigma^{(m)} \end{pmatrix}$$

ニヨッテ $P(\pi)$ ヲ定義スル。

定義9.[7] $b_{ij}\, P\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} = b_{kk}$ ナル b_{ij} ノ system (b_{ij}) ヲ L-number ト名付ケ $\beta = (b_{ij})$ デアラハス。b_{ij} ヲ β ノ i, j-coordinate トイヒ $b_{ij} = (\beta)_{ij}$ トカク。

コノ定義ニ於テ β ハソノ一ツノ coordinate $(\beta)_{ij}$ デ定マルコトハ明クデアル。

コレカラ L-number ノ積ヲ考ヘル。積ハ簡単デアル。

定義10.[8] i) $(\beta)_{ij} \otimes (\gamma)_{jk} = (\delta)_{ik}$ ナル関係ニヨッテ δ ガ i, j, k ニ関係ナク一意的ニキマル。ソコデ $\delta = \gamma\beta$ ト定義スル。

ii) $(0)_{ij} = \alpha_i$, $(1)_{ij} = \xi_{ij}$ ヨッテ 0 及ビ 1 ヲ定義スル。

Lemma 7.

i) $(\gamma \cdot \beta) \cdot \alpha = \gamma \cdot (\beta \cdot \alpha)$

ii) $\beta \cdot 0 = 0 \cdot \beta = 0$

iii) $\beta \cdot 1 = 1 \cdot \beta = \beta$

証明

i) Lemma 3 ヨッテ明白。

ii) $(\beta \cdot 0)_{ik} = (\alpha_i \cup (\beta)_{ik})(\alpha_i \cup \alpha_k) = \alpha_i$

$(0 \cdot \beta)_{ik} = ((\beta)_{ij} \cup \alpha_j)(\alpha_i \cup \alpha_k) = \alpha_i$

iii) Lemma 5, iii) ニヨル。

次ニ L-number ノ和ヲ考ヘル。

定義 11. $\sum \alpha^{(j)} \underset{\gamma}{\sim} \sum b^{(j)}$, $\alpha^{(j)} \underset{\gamma}{\sim} b^{(j)}$ トナルトキ

之レヲ $(\alpha', \alpha'', \cdots\cdots) \underset{\gamma}{\sim} (b', b'', \cdots\cdots)$ デアラハス。

或ハ簡単ノタメ $(\alpha^{(j)}) \underset{\gamma}{\sim} (b^{(j)})$ トモカク。

定義 12. $\alpha \cup b = b \cup \xi = \xi \cup \alpha$, $\alpha b = b\xi = \xi\alpha = 0$ トナルトキ (α, b, ξ) ヲトカク。

Lemma 8.

i) $\alpha \underset{\gamma}{\sim} b$, $(\alpha \cup \gamma)\xi = 0$ ナラバ

$$\alpha \cup \xi \underset{\gamma}{\sim} b \cup \xi$$

ii) (α, b, ξ) ヲ, $(\alpha, b) \underset{\gamma}{\sim} (\alpha', b')$ トナルトキ

$(a, b, c) \sim_{\gamma} (a', b', c')$, (a', b', c') ルナル c' が存在シテ一意的ニキマル。

証明 i) $(a \cup c)\gamma = (b \cup c)\gamma = 0$,

$$a \cup c \cup \gamma = b \cup c \cup \gamma.$$

ii) $a \cup b \frown a' \cup b'$ ニヨッテ $c \leqq a \cup b = c' \leqq a' \cup b'$ ガ一意的ニ對應スル。

Lemma 9.[9] $(a_i, \gamma, \eta)l$, $(a_i \cup \gamma \cup \eta)a_j = 0$ トスル。コノトキ $\tilde{u}_{ij}, w_{ij} \in L_{ij}$ ヲ任意ニ與ヘレバ

$$(a_i\ \gamma\ \eta) \underset{a_j}{\sim} (\tilde{u}_{ij}\ \gamma\ \zeta) \underset{a_j}{\sim} (w_{ij}\ \gamma\ \eta) \underset{a_j}{\sim} (w\ \gamma\ \zeta)$$

ニヨッテ ζ, γ 及ビ $w \in L_{ij}$ ガ定マル。コノ w ヲ $w = \tilde{u}_{ij}$ 田$_{\gamma\eta}$ w_{ij} トカケバ（田$_{\gamma\eta}$ ノ定義！）

$$w = \tilde{u}_{ij} \text{ 田}_{\gamma\eta} w_{ij} = \big((\tilde{u}_{ij} \cup \gamma)(a_j \cup \eta) \cup (w_{ij} \cup \eta)(a_j \cup \gamma)\big)(a_i \cup a_j)$$

証明： w ガキマルコトハ Lemma 8 ヨリ分ル。又 $a_i \frown w$ ナル故 $w \in L_{ij}$. 次ニ $\zeta = (\tilde{u}_{ij} \cup \gamma)(a_j \cup \eta)$.

$\gamma = (w_{ij} \cup \eta)(a_j \cup \gamma)$.

シカルニ $w = (w_{ij} \cup a_j)(\zeta \cup \gamma)$

従ッテ $w = (\zeta \cup \gamma)(a_i \cup a_j)$

Lemma 10. $(\alpha)_{ij} = (\beta)_{ij}$ 田 c_i 法 a_k $(\gamma)_{ij}$ ナル関係ハ i, j, k ニハ関係シナイ。

証明: $\left((\beta)_{ij} \text{田}_{c_{ik}\alpha_k} (\gamma)_{ij}\right) P \begin{pmatrix} i & j & k \\ p & q & r \end{pmatrix}$

$= (\beta)_{pq} \text{田}_{c_{pr}\alpha_r} (\gamma)_{pq}$

定義 13. Lemma 10 ニヨッテ

$(\alpha)_{ij} = (\beta)_{ij} \text{田}_{c_{ik}\alpha_k} (\gamma)_{ij}$ ナルトキ $\alpha = \beta + \gamma$ ト定義スル。 又簡単ノ為メ

$(\beta)_{ij} \text{田}_k (\gamma)_{ij} = (\beta)_{ij} \text{田}_{c_{ik}\alpha_k} (\gamma)_{ij}$ トスル.

Lemma 11. $(\alpha, \xi, b)l$, $(b, \eta, c)l$, $(\alpha, b, c)\perp$ ナルトキ $(\alpha, (\xi \cup \eta)(\alpha \cup c), c)l$.

証明: $\alpha \cdot (\xi \cup \eta)(\alpha \cup c) = \alpha (\xi \cup (\alpha \cup b)\eta) = 0$

$\alpha \cup (\xi \cup \eta)(\alpha \cup c) = \alpha \cup c$

Lemma 12. $(\alpha_i\ \xi\ \eta)l$, $(\alpha_i\ \xi'\ \eta')l$, $(\alpha_i\ \alpha_j\ \eta\ \eta')\perp$ ナラバ

i) $\xi = (\xi \cup \xi')(\eta \cup \eta')$ トオケバ

$(\alpha_i \cdot \alpha_j\ \xi\ \eta)\widetilde{\xi}(\alpha_i\ \alpha_j\ \xi'\ \eta')$

ii) $\tilde{w}_{ij} \text{田}_{\xi\eta} w_{ij} = \tilde{w}_{ij} \text{田}_{\xi'\eta'} w_{ij}$

証明: i) Lemma 11 ニヨッテ $(\alpha, \xi, \eta')l$,

故ニ $(\alpha_i \cup \alpha_j \cup \eta)\widehat{\xi}(\alpha_i \cup \alpha_j \cup \eta')$

又明ラカニ $\xi \cup \xi = \xi' \cup \xi$

ii) 上ノ i) ニヨッテ容易ニ分ル。

Lemma 13[10] $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$

証明: $\widehat{\alpha_j}$ ヲ $\widehat{\xi}$ デアラハスコトニスル。

i) $(\alpha_i\ c_{ik}\ \alpha_k)\widehat{\xi}((\alpha)_{ij}\ c_{ik}\ \xi)\widehat{\xi}((\beta)_{ij}\ \eta\ \alpha_k)\widehat{\xi}((\alpha+\beta)_{ij}\ \eta\ \xi)$

2) $(\alpha_i \ c_{ik} \ \alpha_k) \widetilde{f} (\alpha_i \ \beta \ \alpha_j)$

ニヨッテ $\alpha\beta$ ヲ定メル。コノトキ $(\alpha_i \ \alpha_j \ \alpha\beta \ \alpha_l)$ 1-ナル故

$$田_{\alpha\beta} = 田_l = 田_k$$

ソコデ $(\alpha+\beta)+\gamma$ ヲ $(\alpha+\beta)_{ij}$ 田 β ト $(\gamma)_{ij}$ デキメレバ 1), 2) ニヨッテ

3) $(\alpha_i \ \beta \ \alpha\beta) \widetilde{f} ((\alpha+\beta)_{ij} \ \beta \ \gamma) \widetilde{f} ((\gamma)_{ij} \ \beta \ \alpha_l)$
$\widetilde{f} (((\alpha+\beta)+\gamma)_{ij} \ \beta \ \gamma)$

同様ニ $(\beta)_{ij}$ 田 β ト $(\gamma)_{ij}$ ヲ作レバ 1), 2), 3) ヨリ

4) $(\alpha_i \ \beta \ \alpha\beta) \widetilde{f} ((\beta)_{ij} \ \beta \ \alpha_k) \widetilde{f} ((\gamma)_{ij} \ \beta \ \alpha\beta)$
$\widetilde{f} ((\beta+\gamma)_{ij} \ \beta \ \alpha_k)$

従ッテ $((\alpha+\beta)+\gamma)_{ij}$ ハ

5) $(\alpha_i \ c_{ik} \ \alpha_k) \widetilde{f} ((\alpha)_{ij} \ c_{ik} \ \gamma) \widetilde{f} ((\beta+\gamma)_{ij} \ \beta \ \alpha_k)$
$\widetilde{f} ((\alpha+(\beta+\gamma))_{ij} \ \beta, \ \gamma)$

故ニ 2) ニヨッテ 3), 5) ヲ比スレバ

$$((\alpha+\beta)+\gamma)_{ij} = (\alpha+(\beta+\gamma))_{ij}$$

$$\therefore \ (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$$

Lemma 14. i) $\beta+\gamma = \gamma+\beta$

ii) $0+\beta = \beta+0 = \beta$

iii) β ニ対シテ $\beta+\xi = 0$ ナル ξ ガ存在スル。

証明:

i) Lemma 12 ニ於テ $\beta = c_{ik}$, $\alpha = \alpha_k$, $\beta' = \alpha_l$, $\alpha' = c_{il}$ トレバ

$(\beta)_{ij}$ 田 $c_{il}\alpha_l$ $(\gamma)_{ij} = (\gamma)_{ij}$ 田 $\alpha_l c_{il} (\beta)_{ij}$

$= (\gamma)_{ij}$ 用 $\tau_{ik}\, \alpha_k\, (\beta)_{ij}$

ii) $(0)_{ij} = \alpha_i$ ナル故

$(\alpha_i\ \tau_{ik}\ \alpha_k) \widetilde{j} ((0)_{ij}\ \tau_{ik}\ \alpha_k) \widetilde{j} ((\beta)_{ij}\ \eta\ \alpha_k)$

$\widetilde{j}\ ((0+\beta)_{ij}\ \eta\ \alpha_k)$

故= $(0+\beta)_{ij} = (\beta)_{ij}$ $\quad 0+\beta = \beta$

$\therefore\ \beta + 0 = 0 + \beta = \beta$

iii) $(\alpha_i\ \tau_{ik}\ \alpha_k) \widetilde{j} ((\beta)_{ij}\ \eta\ \alpha_k) \widetilde{j} (\alpha_i\ \eta\ \alpha_j)$

$\widetilde{j}\ ((\xi)_{ij}\ \tau_{ik}\ \alpha_j)$

= ヨッテ ξ ヲ定メル。コノトキ明カニ

$(\alpha_i\ \tau_{ik}\ \alpha_k) \widetilde{j} ((\xi)_{ij}\ \tau_{ik}\ \alpha_j) \widetilde{j} ((\beta)_{ij}\ \eta\ \alpha_k)$

$\widetilde{j}\ (\alpha_i\ \eta\ \alpha_j)$

故= $(\xi+\beta)_{ij} = \alpha_i$ $\quad \xi+\beta = 0$

定義 13. $\mu \fallingdotseq \alpha_j^m$ ナルトキ

$$\mu \circ (\gamma)_{ij} = (\mu \cup (\gamma)_{ij})\, \alpha_i^m$$

$$(\gamma)_{ji} \circ \mu = (\mu \cup (\gamma)_{ji})\, \alpha_i^m$$

Lemma 15.

i) $(\mu \cup \nu) \circ (\gamma)_{ij} = (\mu \circ (\gamma)_{ij}) \cup (\nu \circ (\gamma)_{ij})$

ii) $(\mu \cdot \nu) \circ (\gamma)_{ij} \fallingdotseq (\mu \circ (\gamma)_{ij}) \cdot (\nu \circ (\gamma)_{ij})$

iii) $(\beta)_{hi} \circ (\gamma)_{ij} = (\gamma\beta)_{hj}$

iv) $\alpha_i \circ (\gamma)_{ij} \fallingdotseq \alpha_j$

v) $\mu \fallingdotseq \sum \alpha_\ell\ (\ell \neq i, j)$ ナラバ $\mu \circ (\gamma)_{ij} = \mu$

vi) $(\gamma)_{ik} \circ (\gamma)_{ij} \fallingdotseq \tau_{kj}$

証明: i) $(\tilde{u} \cup (\gamma)_{ij})\alpha_i^m \cup (\tilde{w} \cup (\gamma)_{ij})\alpha_i^m$

$= ((\tilde{u} \cup (\gamma)_{ij})\alpha_i^m \cup \tilde{w} \cup (\gamma)_{ij})\alpha_i^m$

$= ((\tilde{u} \cup (\gamma)_{ij})(\alpha_i^m \cup (\gamma)_{ij}) \cup \tilde{w})\alpha_i^m$

$= (\tilde{u} \cup \tilde{w} \cup (\gamma)_{ij})\alpha_i^m$

vi) $((\gamma)_{ik} \cup (\gamma)_{ij})\alpha_i^m = ((\gamma)_{ij} \cup \tau_{jik})(\alpha_i \cup \alpha_k) \cup (\gamma)_{ij})\alpha_i^m$

$= ((\gamma)_{ij} \cup \tau_{jik})((\gamma)_{ij} \cup \alpha_i \cup \alpha_k)\alpha_i^m$

$\leqq (\gamma)_{ij}\alpha_i^m \cup \tau_{jik} = \tau_{jik}$

ii), iii), iv), v) ハ定義ヨリ明白.

Lemma 16.

i) $(\gamma)_{ji} \circ (\tilde{u} \cup \tilde{w}) \geqq ((\gamma)_{ji} \circ \tilde{u}) \cup ((\gamma)_{ji} \circ \tilde{w})$

ii) $(\gamma)_{ji} \circ \tilde{u} \cdot \tilde{w} = ((\gamma)_{ji} \circ \tilde{u})((\gamma)_{ji} \circ \tilde{w})$

iii) $(\gamma)_{ji} \circ (\xi)_{ikl} = (\xi\gamma)_{jkl}$

iv) $(\gamma)_{ji} \circ \alpha_i = \alpha_j$

v) $\tilde{u} \leqq \sum \alpha_l \ (l \neq i, j)$ ナルトキ $(\gamma)_{ji} \circ \tilde{u} \geqq \tilde{u}$

vi) $(\gamma)_{ji} \circ (\gamma)_{ki} \geqq \tau_{jik}$

証明: i), iii), iv), v) ハ明白デアル.

ii) $((\gamma)_{ji} \cup \tilde{u})((\gamma)_{ji} \cup \tilde{w})\alpha_i^m = ((\gamma)_{ji} \cup \tilde{u}((\gamma)_{ji} \cup \tilde{w}))\alpha_i^m$

$= ((\gamma)_{ji} \cup \tilde{u}\tilde{w})\alpha_i^m$

vi) $((\gamma)_{ji} \cup (\gamma)_{ki}) \cdot \alpha_i^m = ((\tau_{jik} \cup (\gamma)_{ki})(\alpha_j \cup \alpha_i) \cup (\gamma)_{ki})\alpha_i^m$

$= (\tau_{jik} \cup (\gamma)_{ki})(\alpha_j \cup \alpha_i \cup (\gamma)_{ki})\alpha_i^m$

$= (\tau_{jik} \cup (\gamma)_{ki})\alpha_i^m \geqq \tau_{jik}$

Lemma 17. $\alpha \subset b$, $\alpha \leqq b$ ナラバ $\alpha = b$.

従ッテ特ニ $(\beta)_{ij} \leqq (\gamma)_{ij}$ ナラバ $\beta = \gamma$

証明: $b = b(b \cup \tau) = b(\alpha \cup \tau) = \alpha$

Lemma 18. $\xi(\beta+\gamma)=\xi\beta+\xi\gamma$

証明: $(\xi(\beta+\gamma))_{kj}=(\beta+\gamma)_{ki}\circ(\xi)_{ij}$

$=((\beta)_{ki}\ \text{田}_e\ (\gamma)_{ki})\circ(\xi)_{ij}$

$=(((\beta)_{ei}\cup((\gamma)_{ki}\cup\sigma_e)(\tau_{ke}\cup\sigma_i))(\sigma_k\cup\sigma_i))\circ(\xi)_{ij}$

$\leqq(((\xi\beta)_{ej}\cup((\xi\gamma)_{ki}\cup\sigma_e)(\tau_{ke}\cup\sigma_j))(\sigma_k\cup\sigma_j)$

$=(\xi\beta+\xi\gamma)_{kj}$

Lemma 19.[11] $(\gamma)_{kj}\cup((\alpha)_{ij}\cup\sigma_k)((\beta)_{ik}\cup\sigma_j))(\sigma_i\cup\sigma_j)$

$=(\alpha+\gamma\beta)_{ij}$

証明: i) $z_j=((\alpha)_{ij}\cup\sigma_k)((\beta)_{ik}\cup\sigma_j)$,

$m=((\gamma)_{kj}\cup z_j)(\sigma_i\cup\sigma_j)$ トオケバ

$(\sigma_i\ (\beta)_{ik}\ \sigma_k)\tilde{}_j((\alpha)_{ij}\ z_j\ \sigma_k)\tilde{}_j(m\ z_j\ (\gamma)_{kj})$

故= $m\in L_{ij}$.

ii) $m=m\circ(\gamma)_{kl}$

$\leqq(\tau_{je}\cup((\alpha)_{ij}\cup\sigma_e)((\gamma\beta)_{il}\cup\sigma_j))(\sigma_i\cup\sigma_j)$

右辺ハ m ノ γ ヲ 1 デオキカヘタモノデアルカラ

$\in L_{ij}$

故=「$\leqq$」ハ「$=$」トナル.

$(\alpha+\gamma\beta)_{ij}=(\alpha+\gamma\rho)_{ij}\circ(\gamma\beta)_{kl}$

$=((\gamma\beta)_{kl}\cup((\alpha)_{ij}\cup\sigma_k)(\tau_{ik}\cup\sigma_j))(\sigma_i\cup\sigma_j)\circ(\gamma\beta)_{kl}$

$\leqq(\tau_{ej}\cup((\alpha)_{ij}\cup\sigma_e)((\gamma\beta)_{il}\cup\sigma_j))(\sigma_i\cup\sigma_j)$

故= $m=(\alpha+\gamma\beta)_{ij}$

Lemma 20. $(\beta+\gamma)\xi=\beta\xi+\gamma\xi$

証明: Lemma 19 ニヨッテ

$$((\beta+\gamma)\xi)_{ej} = (\xi)_{ei} \circ (\beta+\gamma)_{ij}$$
$$= (\xi)_{ei} \circ (c_{kj} \cup ((\beta)_{ij} \cup \alpha_k)((\gamma)_{ik} \cup \alpha_j))(\alpha_i \cup \alpha_j)$$
$$\geqq (c_{kj} \cup ((\beta\xi)_{ej} \cup \alpha_k)((\gamma\xi)_{ek} \cup \alpha_j))(\alpha_e \cup \alpha_j)$$
$$= (\beta\xi + \gamma\xi)_{ej}$$

定理5. L-number ハ単位元 1 ヲ有スル ring ヲナス。

証明: Lemma 7, 13, 14, 18, 20 ヨリ明カデアル。

homogeneous basis $(\alpha_i;\ i=1,\cdots n)$ ニ於テ α_i ガ凡テ「点」ノ場合即チ「$\xi < \alpha_i \longrightarrow \xi = 0$」ナル場合ニハ，コレカラ作ッタ L-number ノ全体ハ「schiefkörper」ヲナス証明: α_i ガ点デアルカラ $\beta \neq 0$ ナラバ $(\beta)_{ji} \in L_{ij}$. 故ニ $(\beta)_{ji} = (\gamma)_{ij}$ トオケバ

$$(\gamma\beta)_{ij} = ((\beta)_{ik} \cup (\gamma)_{kj})(\alpha_i \cup \alpha_j)$$
$$= ((\beta)_{ik} \cup (\beta)_{jk})(\alpha_i \cup \alpha_j)$$
$$= ((\beta)_{ik} \cup ((\beta)_{ik} \cup c_{ji})(\alpha_j \cup \alpha_k))(\alpha_i \cup \alpha_j)$$
$$= ((\beta)_{ik} \cup c_{ji})(\alpha_i \cup \alpha_j) = c_{ij} = (1)_{ij}$$

同様ニシテ $(\beta\gamma)_{ij} = (1)_{ij}$

ソレ故 $\gamma\beta = \beta\gamma = 1$ 即チ $\gamma = \beta^{-1}$ トナル。

以下 L-number ノ作ル ring ヲ γ デアラハス。

定義14. $(\beta)_m = ((\beta)_{jm} \cup \alpha_j)\alpha_m$

コノ定義ヨリ $(\beta)_m P\binom{m}{e} = (\beta)_e$ ハスガ分ル。

Lemma 21. $(\beta\gamma)_m \leqq (\beta)_m$

証明: $(\beta\gamma)_m = ((\beta\gamma)_{jm} \cup o_j)\, o_m$

$= (((\gamma)_{jk} \cup (\beta)_{km})(o_j \cup o_m) \cup o_j)\, o_m$

$= (o_j \cup (\gamma)_{jk} \cup (\beta)_{km})(o_j \cup o_m)\, o_m$

$\leqq (o_j \cup o_k \cup (\beta)_{km})\, o_m = (o_k \cup (\beta)_{km})\, o_m = (\beta)_m$

Lemma 22. $\breve{u} \leqq o_m$ ナルトキ

$$(\breve{u} \cup o_k)\, \tau_{km} \circ (\gamma)_{kj} = (\gamma)_{mj}\, (\breve{u} \cup o_j)$$

証明: $(\breve{u} \cup o_k)\, \tau_{km} \circ (\gamma)_{kj}$

$= ((\breve{u} \cup o_k)\, \tau_{km} \cup (\gamma)_{mj} \cup \tau_{km})(o_k \cup o_j)(o_j \cup o_m)$

$= ((\gamma)_{mj} \cup \tau_{km})((\breve{u} \cup o_k)\, \tau_{km} \cup o_k \cup o_j)(o_j \cup o_m)$

$= ((\gamma)_{mj} \cup \tau_{km})(\breve{u} \cup o_k \cup o_j)(o_j \cup o_m)$

$= ((\gamma)_{mj} \cup \tau_{km})(\breve{u} \cup o_j)(o_m \cup o_j)$

$= ((\gamma)_{mj} \cup \tau_{km}.(o_m \cup o_j))(\breve{u} \cup o_j)$

$= (\gamma)_{mj}\, (\breve{u} \cup o_j)$

Lemma 23. $\breve{u} = \breve{u}_m \leqq o_m$ ニ対シテ $\breve{u}_m = (\varepsilon)_m$, $\varepsilon^2 = \varepsilon$ ナルεガ存在スル。

証明: i) $\nu_m \leqq o_m - \breve{u}_m$ ヲ任意ニトツタトキ

$(\breve{u}_m \cup o_j)\, \tau_{jm} \cup \nu_m \in L_{mj}$ 何トナレバ

$(\breve{u}_m \cup o_j)\, \tau_{jm} \cup \nu_m \cup o_j = \breve{u}_m \cup o_j \cup \nu_m = o_m \cup o_j$.

$((\breve{u}_m \cup o_j)\, \tau_{jm} \cup \nu_m)\, o_j = ((\breve{u}_m \cup o_j)\, \tau_{jm} \cup \nu_m (\breve{u}_m \cup o_j))\, o_j$

$= 0$

故ニ $(\varepsilon)_{mj} = (\breve{u}_m \cup o_j)\, \tau_{jm} \cup \nu_m$ ニヨツテ ε ヲ

キメレバ

$$(\varepsilon)_j = ((\varepsilon)_{mj} \cup \alpha_m)\alpha_j = ((\breve{u}_m \cup \alpha_j)\breve{c}_{jm} \cup \alpha_m)\alpha_j$$

$$= ((\breve{u}_m \cup \alpha_j]\breve{c}_{jm} \cup \alpha_m(\breve{u}_m \cup \alpha_j))\alpha_j$$

$$= (\breve{u}_m \cup \alpha_j)(\breve{u}_m \cup \breve{c}_{jm})\alpha_j$$

即チ $(\varepsilon)_j = \breve{u}_m P\binom{m}{j}$ 故ニ $(\varepsilon)_m = \breve{u}_m$

ii) $(\varepsilon^2)_{mj} = (\varepsilon)_{mk} \circ (\varepsilon)_{kj}$

$$= ((\breve{u}_m \cup \alpha_k)\breve{c}_{km} \cup \lambda\rho_m) \circ (\varepsilon)_{kj}$$

$$= ((\breve{u}_m \cup \alpha_k)\breve{c}_{km} \circ (\varepsilon)_{kj}) \cup \lambda\rho_m$$

$$= (\varepsilon)_{mj}(\breve{u}_m \cup \alpha_j) \cup \lambda\rho_m = (\varepsilon)_{mj}$$

(Lemma 22 = ヨル) 故ニ $\varepsilon^2 = \varepsilon$

Lemma 24. $(\lambda)_m \leqq (\beta)_m$ ナラバ $\lambda = \beta\gamma$ ナルヨウナ γ ガ存在スル。

証明: $\lambda\rho \in \alpha_k - \alpha_k(\beta)_{kj}$ ナル任意ニトル。コノトキ $\lambda\rho = ((\lambda)_{ij} \cup (\beta)_{kj})(\lambda\rho \cup \alpha_i)$ トスル。

$$\lambda\rho \cdot \alpha_k = ((\lambda)_{ij} \cup (\beta)_{kj})\lambda\rho$$

$$= ((\lambda)_{ij}(\alpha_k \cup \alpha_j) \cup (\beta)_{kj})\lambda\rho = (\beta)_{kj}\lambda\rho = 0$$

$$\lambda\rho \cup \alpha_k = ((\lambda)_{ij} \cup (\beta)_{kj})(\lambda\rho \cup \alpha_i) \cup \lambda\rho \cup \alpha_k(\beta)_{kj}$$

$$= ((\lambda)_{ij} \cup (\beta)_{kj} \cup \lambda\rho)(\alpha_i \cup \alpha_k)$$

$$= ((\lambda)_{ij} \cup (\beta)_{kj} \cup \alpha_k \cup \lambda\rho)(\alpha_i \cup \alpha_k)$$

シカルニ $(\lambda)_{ij} \cup (\beta)_{kj} \cup \alpha_k \cup \lambda\rho$

$$\geqq (\lambda)_{ij} \cup (\lambda)_{kj} \cup \alpha_k \cup \lambda\rho \geqq \alpha_i \cup \alpha_k$$

故ニ $\lambda\rho \in L_{ik}$ トナルコトガ分ッタ。ソコデ $\lambda\rho = (\gamma)_{ik}$ トオケバ

$(\beta\gamma)_{ij} = (\nu \cup (\beta)_{kj})(\sigma_i \cup \sigma_j)$

$= ((\beta)_{kj} \cup (\alpha)_{ij}(\nu \cup \sigma_i \cup (\beta)_{kj}))(\sigma_i \cup \sigma_j)$

$= (\alpha)_{ij}(\nu \cup \sigma_i \cup (\beta)_{kj}) \leqq (\alpha)_{ij}$ $\quad \therefore \alpha = \beta\gamma$

定理 6. γ ハ regular ring デアッテ $R_\gamma \cong L(\sigma_k)$

証明: regular ring トナルコトハ Lemma 23 ヨリ分ル。

又 Lemma 21, 24 ヨリ $(\beta)_k$ ト $(\beta)_\gamma$ トハ一對一ニ對應シテ且ツ $(\beta)_k \geqq (\gamma)_k \longleftrightarrow (\beta)_\gamma \geqq (\gamma)_\gamma$ トナル。故ニ $R_\gamma \cong L(\sigma_k)$.

§4[12] 補助定理

Lemma 25. $\tilde{\nu}_k \leqq \sigma_k$, $\nu_k \leqq \sigma_k - \tilde{\nu}_k$ トシテ $(\varepsilon)_{kj} = (\tilde{\nu}_k \cup \sigma_j)\tau_{kj} \cup \nu_k$, $(\bar{\varepsilon})_{ik} = (\nu_i \cup \sigma_k)\tau_{ik} \cup \tilde{\nu}_i$ ニヨッテ $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ ヲ作レバ $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 1$. (但シ $\tilde{\nu}_i = \tilde{\nu}_k P\binom{k}{i}$).

証明: Lemma 19 ニヨッテ

$(\varepsilon + \bar{\varepsilon})_{ij} = (((\bar{\varepsilon})_{ik} \cup \sigma_j)((\varepsilon)_{ij} \cup \sigma_k) \cup \tau_{kj})(\sigma_i \cup \sigma_j)$

$= (((\nu_i \cup \sigma_k)\tau_{ik} \cup \tilde{\nu}_i \cup \sigma_j)((\tilde{\nu}_i \cup \sigma_j)\tau_{ij} \cup \nu_i \cup \sigma_k) \cup \tau_{kj})(\sigma_i \cup \sigma_j)$

$= ((\tilde{\nu}_i \cup \sigma_j)\tau_{ij} \cup (\nu_i \cup \sigma_k)\tau_{ik} \cup (\tilde{\nu}_i \cup \sigma_j)(\nu_i \cup \sigma_k) \cup \tau_{kj})(\sigma_i \cup \sigma_j)$

$= (\tilde{\nu}_i \cup \sigma_j)\tau_{ij} \cup ((\nu_i \cup \sigma_k)\tau_{ik} \cup \tau_{kj})(\sigma_i \cup \sigma_j)$

$= (\tilde{\nu}_i \cup \sigma_j)\tau_{ij} \cup (\nu_i \cup \sigma_j)\tau_{ij} = (\tilde{\nu}_i \cup \nu_i \cup \sigma_j)\tau_{ij}$

$-\tau_{ij}-(1)_{ij}$.

Lemma 26. $\tilde{u}_k \leqq \alpha_k$, $\nu_k \leqq \alpha_k - \tilde{u}_k$, $\tilde{u}_k = (\beta)_k$, $\nu_k = (1-\beta)_k$, $\beta^2=\beta$ トスレバ

i) $(\xi\beta)_{kj} = (\xi)_{kj}(\alpha_j \cup \tilde{u}_k) \cup \nu_k$

ii) $(\beta\xi)_{jk} = (\nu_k \cup (\xi)_{jk})(\tilde{u}_k \cup \alpha_j)$

証明: i) $(\xi\beta)_{kj} = (\beta)_{ki} \circ (\xi)_{ij}$

$= ((\tilde{u}_k \cup \alpha_i)\tau_{ik} \circ (\xi)_{ij}) \cup \nu_k$

$= (\xi)_{kj}(\alpha_j \cup \tilde{u}_k) \cup \nu_k$ (Lemma 22 ニヨル)

ii) $(\beta\xi)_{jk} = ((\beta\xi)_{ji} \cup \tau_{ik})(\alpha_j \cup \alpha_k)$

$= (((\xi)_{jk} \cup (\beta)_{ki})(\alpha_j \cup \alpha_i) \cup \tau_{ik})(\alpha_j \cup \alpha_k)$

$= ((\xi)_{jk} \cup (\tilde{u} \cup \alpha_i)\tau_{ik} \cup \nu)(\alpha_j \cup \alpha_i)$

$\cup (\tilde{u} \cup \alpha_i)\tau_{ik} \cup \tau_{ik})(\alpha_j \cup \alpha_k)$

$= (((\xi)_{jk} \cup (\tilde{u} \cup \alpha_i)\tau_{ik} \cup \nu)(\alpha_j \cup \alpha_i \cup (\tilde{u} \cup \alpha_i)\tau_{ik})$

$\cup \tau_{ik})(\alpha_j \cup \alpha_k)$

$= ((\tilde{u} \cup \alpha_i)\tau_{ik} \cup ((\xi)_{jk} \cup \nu)(\alpha_j \cup \alpha_i \cup \tilde{u}) \cup \tau_{ik})(\alpha_j \cup \alpha_k)$

$= (\nu \cup (\xi)_{jk})(\alpha_j \cup \tilde{u})$.

定義 15.[13] $(\beta; \gamma', \cdots\cdots, \gamma^{m-1}) = (\alpha^{m-1} \cup (\beta)_m) \prod_{j=1}^{m-1} (\alpha_j^{m-1} \cup (\gamma^j)_{mj})$

注意. 定理ヨリ系ヨレバ任意ノ元 $b \leqq \alpha^m$ ハ

$$b = b \cdot \alpha^{m-1} \cup (\alpha^{m-1} \cup b_m) \prod_{j=1}^{m-1} (\alpha_j^{m-1} \cup b_{mj})$$

ト云フ形ニ分解サレル。

$b_m = (\beta)_m$, $b_{mj} = (\gamma^j)_{mj}$ ナル $\beta, \gamma', \cdots\cdots \gamma^{m-1}$

ヲトレバ，上ノ式ノ第二項ハ

$$(\alpha^{m-1} \cup (\beta)_m) \prod_{j=1}^{m-1} (\alpha_j^{m-1} \cup (\gamma^j)'_{m_j})$$

トカカレル。　之レヲ簡単ノタメ $(\beta; \gamma', \cdots\cdots, \gamma^{m-1})$ デ表ハストノデアル。

Lemma 27.　$\beta^2 = \beta$ ナラバ

$$\alpha_m \cup (\beta; \gamma', \cdots\cdots, \gamma^{m-1}) = \alpha_m \cup (1; \gamma'\beta, \cdots\cdots, \gamma^{m-1}\beta)$$

証明：　Lemma 26, i) 及ビ Lemma 1, iii) ニヨッテ

$$(1; \gamma'\beta, \cdots\cdots, \gamma^{m-1}\beta) = \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i\beta)_{m_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{m_i} (\alpha_i \cup (\beta)_m) \cup (1-\beta)_m)$$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{m_i} (\alpha_i \cup (\beta)_m)) \cup (1-\beta)_m$$

然ルニ $(\beta; \gamma', \cdots\cdots, \gamma^{m-1}) = \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{m-1} \cup \alpha_i \cup (\beta)_m)(\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{m_i})$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{m_i} (\alpha_m \cup \alpha_i)(\alpha_i^{m-1} \cup \alpha_i \cup (\beta)_m))$$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} (\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{m_i} (\alpha_i \cup (\beta)_m))$$

故ニ　$(1; \gamma'\beta, \cdots\cdots, \gamma^{m-1}) = (\beta; \gamma', \cdots\cdots, \gamma^{m-1}) \cup (1-\beta)_m$.

コノ両辺ニ α_m ヲ加ヘレバヨイ。

Lemma 28.　$(\alpha_k \cup (\beta)_{ij})(\alpha_i \cup (\gamma)_{jk})$

$$= (\alpha_k \cup (\beta)_{ij})(\alpha_j \cup (-\gamma\beta)_{ik})$$

証明：　Lemma 19 ニヨッテ

$$((\gamma)_{jk} \cup ((-\gamma\beta)_{ik} \cup \alpha_j)((\beta)_{ij} \cup \alpha_k))(\alpha_i \cup \alpha_k) = \alpha_i$$

両辺＝$(\gamma)_{jk}$ヲ加ヘレバ

$$(\gamma)_{jk}\cup((-\gamma\beta)_{ik}\cup\alpha_j)((\beta)_{ij}\cup\alpha_k)=\alpha_i\cup(\gamma)_{jk}$$

両辺＝$(\alpha_k\cup(\beta)_{ij})$ヲカケレバ

$$((-\gamma\beta)_{ik}\cup\alpha_j)((\beta)_{ij}\cup\alpha_k)\cup(\gamma)_{jk}(\alpha_k\cup(\beta)_{ij})$$
$$=(\alpha_i\cup(\gamma)_{jk})(\alpha_k\cup(\beta)_{ij})$$

コヽデ $(\gamma)_{jk}(\alpha_k\cup(\beta)_{ij})=(\gamma)_{jk}(\alpha_k\cup\alpha_j)(\alpha_k\cup(\beta)_{ij})$

$=(\gamma)_{jk}(\alpha_k\cup(\beta)_{ij}(\alpha_k\cup\alpha_j))=(\gamma)_{jk}\alpha_k=0.$

故＝Lemma 1式ヲ得ル.

Lemma 29. $\alpha_{1i}^{m}=\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{m}\alpha_j$ トスレバ

$$\alpha_m\cup(1;\gamma',\eta^2\gamma',\cdots\cdots,\eta^{m-1}\gamma')$$
$$=\alpha_m\cup\left(\alpha_1^{m-1}\cup(\gamma^2)_{1}\right)\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1}\cup(-\eta^i)_{1i})$$

証明： $n\geq m>2$ トスル.

$$(1;\gamma^1,\eta^2\gamma',\cdots\cdots,\eta^{m-1}\gamma')$$
$$=\left(\alpha_1^{m-1}\cup(\gamma')_{m1}\right)\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_i^{m-1}\cup(\eta^i\gamma')_{mi})$$
$$=\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1}\cup\alpha_i\cup(\gamma')_{m1})(\alpha_{1i}^{m-1}\cup\alpha_1\cup(\eta^i\gamma')_{mi})$$
$$=\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1}\cup(\alpha_i\cup(\gamma')_{m1})(\alpha_1\cup(\eta^i\gamma')_{mi})$$
$$=\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1}\cup(\alpha_i\cup(\gamma')_{m1})(\alpha_m\cup(-\eta^i)_{1i})$$
$$=\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_{1i}^{m-1}\cup\alpha_i\cup(\gamma')_{m1})(\alpha_{1i}^{m-1}\cup\alpha_m\cup(-\eta^i)_{1i})$$

$$\alpha_m\cup(1;\gamma',\eta^2\gamma',\cdots\cdots\eta^{m-1}\gamma')$$

$$= \sigma_m \cup \left(\sigma_1^m \cup (\gamma')_{m1} \right) \prod_{i=2}^{m-1} \left(\sigma_{1i}^m \cup (-\eta^i)_{1i} \right)$$

$$= \sigma_m \cup \left(\sigma_1^{m-1} \cup (\gamma')_{m1} \cup \sigma_m \right) \prod_{i=2}^{m-1} \left(\sigma_{1i}^m \cup (-\eta^i)_{1i} \right)$$

$$= \sigma_m \cup \left(\sigma_1^m \cup (\gamma')_1 \right) \prod_{i=2}^{m-1} \left(\sigma_{1i}^m \cup (-\eta^i)_{1i} \right)$$

$$= \sigma_m \cup \left(\sigma_1^{m-1} \cup (\gamma')_1 \prod_{i=2}^{m-1} \left(\sigma_{1i}^{m-1} \cup (-\eta^i)_{1i} \right) \right)$$

$m=2$ のとき $\sigma_2 \cup (1;\gamma') = \sigma_2 \cup (\gamma')_{21} = \sigma_2 \cup (\gamma')_1$

Lemma 30.

$$\sigma_m \cup (1; 0, \varepsilon^2, \cdots\cdots, \varepsilon^{m-1})$$
$$= \sigma_m \cup \sigma_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\sigma_{1i}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{1i} \right) \cup \sigma_1 \right)$$

証明: $\sigma_m \cup (1; 0, \varepsilon^2, \cdots\cdots, \varepsilon^{m-1})$

$$= \sigma_m \cup \sigma_1^m \prod_{i=2}^{m-1} \left(\sigma_i^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right)$$

$$= \sigma_m \cup \left(\sigma_1^{m-1} \cup \sigma_m \right) \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\sigma_{i1}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right) \cup \sigma_m \cup \sigma_1 \right)$$

$$= \sigma_m \cup \sigma_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\sigma_{i1}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right) \cup \sigma_1 \cup \sigma_m \right)$$

$$= \sigma_m \cup \left[\sigma_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\sigma_{i1}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right) \cup \sigma_m \right) \right] P \begin{pmatrix} 2 \cdots\cdots m-1 & m \\ 2 \cdots\cdots m-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_m \cup \sigma_1^{m-1} \left(\prod_{i=2}^{m-1} \left(\sigma_{i1}^{m-1} \cup (\varepsilon^i)_{mi} \right) \cup \sigma_1 \right)$$

Lemma 31.

$$\sigma_m \cup (1; \gamma', \cdots\cdots, \gamma^{m-1}) = \sigma_m \cup (1; \gamma', \eta^2\gamma', \cdots\cdots, \eta^{m-1}\gamma') \cup (1; 0, \varepsilon^2, \cdots\cdots \varepsilon^{m-1})$$

但シ $(\gamma')_e=(\beta)_e$, $\beta^2=\beta$; $\gamma^i\beta=\eta^i\gamma'$,

$\gamma^i(1-\beta)=\varepsilon_i$

証明: $\alpha_m\cup(1;\gamma',\cdots\cdots,\gamma^{m-1})$

$=\alpha_m\cup(1;\gamma'\beta,\cdots\cdots,\gamma^{m-1}\beta)\cup(1;\gamma'(1-\beta),\cdots\cdots\gamma^{m-1}(1-\beta))$

$=\alpha_m\cup(1;\gamma',\eta^2\gamma',\cdots\cdots,\eta^{m-1}\gamma')\cup(1;0,\varepsilon^2,\cdots\cdots,\varepsilon^{m-1})$

定理 7.[14] $(\beta)_\gamma=(\bar\beta)_\gamma$, $\bar\beta^2=\bar\beta$; $(\gamma'\bar\beta)_e=(\beta^*)_e$, $\beta^{*2}=\beta^*$; $\gamma^i\bar\beta\beta^*=\eta^i\gamma'\bar\beta$, $\varepsilon_i=\gamma^i\bar\beta(1-\beta^*)$ トオケバ

$$\alpha^{m-1}(\alpha_m\cup(\beta;\gamma',\cdots\cdots\gamma^{m-1}))$$

$$=\left(\alpha_1^{m-1}\cup(\gamma'\bar\beta)_1\right)\prod_{i=2}^{m-1}\left(\alpha_1^{m-1}\cup(-\eta^i)_{1i}\right)\cup\alpha_1^{m-1}\left(\prod_{i=2}^{m-1}\left(\alpha_1^{m-1}\cup(\varepsilon^i)_{1i}\right)\cup\alpha_1\right)$$

証明: $\alpha_m\cup(\beta;\gamma',\cdots\cdots\gamma^{m-1})=\alpha_m\cup(1;\gamma'\bar\beta,\cdots\cdots\gamma^{m-1}\bar\beta)$

$=\alpha_m\cup(1;\gamma'\bar\beta,\eta^2\gamma'\bar\beta,\cdots\cdots,\eta^{m-1}\gamma'\bar\beta)\cup(1;0,\varepsilon^2,\cdots\cdots,\varepsilon^{m-1})$

$$=\alpha_m\cup\left(\alpha_1^{m-1}\cup(\gamma'\bar\beta)_1\right)\prod_{i=2}^{m-1}\left(\alpha_1^{m-1}\cup(-\eta^i)_{1i}\right)$$

$$\cup\alpha_1^{m-1}\left(\prod_{i=2}^{m-1}\left(\alpha_1^{m-1}\cup(\varepsilon^i)_{1i}\right)\cup\alpha_1\right)$$

コノ両辺ヲ α^{m-1} ヲカケレバ定理ノ式ヲ得ル。

—— (ツヅク) ——