741. 大數ノ法則 II

北川　敏男（阪大）

§2. 豫備的ナ考察（續キ）　前回ノ§デハ，適當ナ條件ノモトニ於テハ，必ズシモ"相互ニ独立"デナクトモ，等式(1)ガ成立ツコトヲ示シタ。$E\{S_n^2\}=E\{X_1^2\}+\cdots\cdots+E\{X_n^2\}$ハ$n$ト共ニ増加スル一方デアルカラ、前記$a$, b, c, dノ何レカガ成リ立テバ，聯鎖ナ確率変數ノ和ニ關シテモ，相互ニ独立ナ確率変數ノ和ト同様ニ標準偏差増加ノ原理ガ成立ツコトニナル。

然ラバ，散縮度（*dispersion*）ニ關シテハ如何。コレヲ次ニ論ズル。

〔2〕　散縮度増加ノ原理　先ヅ準備トシテ條件付確率（*conditional prob.*）ニ關シテ若干ノ事項ヲ述ベル。一般ニ，事象A，Bガ共ニ起ル確率ヲPr.{A，B}デ示ス。Aナル事象ト$X<x$ナル事象トガ同時ニ起ル確率$Pr\{A, X<x\}$ヲ考ヘル，コレハxノ函數ダカラ$F_1(x)$デ表ハス。然ルトキ$a\leqq X<b$ナル條件ノモトデAノ起ル確率ハ$\{F_1(b)-F_1(a)\}/\{F(b)-F(a)\}$デアッテ、ソノ値ハ$\geqq 0$デ且ツ$\leqq 1$デアル。（但シ$X$ノ分布函數ヲ$F$トシタ）従ッテ

$$(3)\quad Pr.\{A, X<x\}=\int_{-\infty}^{x-0} g_A(x)\,dF(x)$$

トナル如キ$g_A(x)$ガ存在スル。今特ニAヲバ，或ル確率変

数 Y ガ $<y$ トナル事象トシ，

$\Pr.\{A, X<x\} \equiv \Pr.\{Y<y, X<x\}$ ヲバ $F(x, y)$，

上ノ $g_A(x)$ ヲバ $G(x, y)$ デ表ハスト，(3) 式ハ次ノ如ク書キ改メラレル：

$$(3') \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^{x-0} G(z, y)\, dF(\alpha)$$

コレカラ、聯鎖ナ確率変数ノ和ノ散縮度増加ノ原理トモ見做サレルベキ次ノ結果ニ達スル。

<u>定理 1.</u> X ヲ知レトキニ，Y ノ従フ條件付確率法則ノ散縮度ガ，X ノ値ニ無関係ナ常数デ下カラ抑ヘラレルトキニハ，$X+Y$ ノ（先驗的）確率法則ノ散縮度モ；コノ常数デ下カラ抑ヘラレル。[1]

注意：　$X+Y$ ノ先驗的確率法則ノ分布函数ヲ $\mathfrak{F}$ デ表ハサウ。散縮度ノ逆函数タル濃度函数ニツイテ云ヘバ，上ノ定理ノ主張スルコトハ；任意ノ $l>0$ ニ對シテ

$$(4) \quad \underset{-\infty<s<\infty}{\text{l. u. b.}} \{\mathfrak{F}(s+l) - \mathfrak{F}(s-0)\}$$

$$\leqq \underset{-\infty<u,\, y<\infty}{\text{l. u. b.}} \{G(u, y+l) - G(u, y-0)\}$$

而シテ、$\mathfrak{F}(s)$，$G(u, y)$ ハ夫々 s，y ニ関シテ分布函数デ，一般ノ規約ニ依リ上ニ（従ッテ右ニ）半連續トシテオ

---

(1) P. Lévy: Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchaînés. Bull. Scien. Math. LIX (1935) コレヲ〔L_1〕デ示ス。

クト，(4) ノ l.u.b. ハ Max. デ置キカヘテヨイ。

定理1ノ証明：

$$\mathcal{F}(s)=\int_{x+y<s} d_{x,y}F(x,y)=\int_{x+y<s} d_{x,y}\left[\int_{-\infty}^{x-0} G(u,y)\,dF(u)\right]$$

デアルカラ、積分変数ノ変換ニ依リ，コレハ

$$\int_{-\infty}^{s} dy\left\{\int_{-\infty}^{s-y-0} G(u,y)\,dF(u)\right\}$$

ニ等シク、従ツテ

$$\mathcal{F}(s+l)-\mathcal{F}(s)=\int_{-\infty}^{s} dy\left\{\int_{-\infty}^{s-y}\left(G(u,y+l)-G(u,y)\right)dF(u)\right\}$$

(4) ハコノ式カラ導カレル。[2]

〔3〕 Kolmogoroff ノ不等式ノ拡張.

Kolmogoroff[3] ハ Math. Ann. 99 ニ於テ相互ニ独立ナ確率変数 $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ ノ和 $S_k=X_1+\cdots+X_k$ $(k=1,2,\ldots\ldots,n)$ ニ関シテ $E(X_\nu)=0$, $E(X_\nu^2)=\sigma_\nu^2$ トスルトキ，$T=\max_{1\leq k\leq n}|S_k|$ ト置クトキ

$$(5)\quad \Pr.\left[T\geqq a\right]\leqq\frac{1}{a^2}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\cdots\cdots+\sigma_n^2\right)$$

ヲ示シタ。ソレハ，独立級数ノ収斂スル確率ヲ計算スルトキ，有数ナ不等式デアツタ。コレヲ適當ナ條件ノモトニ於テ聯鎖ノ場合ニモ拡張出来ナイカ。コレニ関シテ

---

(2) 実際ハコレカラ多少手間ガカヽル.

(3) Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen.

定理2. (聯鎖ナ)確率変數ノ系列 $\{X_\nu\}$ ニ於テ、次ノ三條件ガ滿足サレテ居ルトスル。

$$(C)\qquad E_{\nu-1}\{X_\nu\}=0 \qquad (\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$$

$$(6)\qquad E\{X_\nu^2\}<\infty \qquad (\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$$

$$(7)\qquad E\{S^2\}\equiv E\Big\{\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}X_\nu\Big)^2\Big\}\equiv b<\infty$$

然ルトキニハ

$$(8)\qquad T=\max_{1\leqq\nu<\infty}|S_\nu|$$

ニ依ツテ確率変數 T ヲ定義スレバ; 任意ノ $c>0$ ニ對シテ

$$(9)\qquad Pr.\{T>cb\}<\frac{1}{c^2}.$$

注意1: $E\{X_\nu^2\}$ ガ有限ナコトカラ、$E_p\{X_\nu^2\}$(即チ、$X_1, X_2\cdots\cdots, X_p$ ノ値ヲ知ツテノ X_ν^2 ノ平均値, コレハ, $(X_1, X_2,\cdots\cdots, X_p)$ ニ與ヘル値ニ依ツテ変リ得ル確率変數デアル)モ亦, 確率0ノ場合ヲノゾイテ有限デアル。コレハ一般ニ, $n<N$ ナラバ

$$(10)\qquad Pr_n\{E\}=E_n\{Pr_N\{E\}\},\quad E_n\{X\}=E_n\{E_N\{X\}\}$$

トナルコトカラ明ラカデアル。$(E\{X_\nu^2\}\equiv E_0\{X_\nu^2\}$ ニ外ナラヌ$)$

注意2: 條件(C)ノモトニ於テハ

$$(11)\qquad E_p\{S_n^2\}=E_p\{S_{n-1}^2\}+2E_p\{S_{n-1}E_{n-1}\{X_n\}\}+E_p\{X_n^2\}$$

$$= E_p\{S_{n-1}^2\} + E_p\{X_n^2\}$$

定理2ノ證明: 今茲ニ

$$(12) \qquad T_n = \underset{1 \leqq \nu \leqq n}{Max} |S_\nu|$$

ト置ク。E'_ν ハ, $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_\nu$ ニ對シテハ, 次ノ事象 (E_ν) ガ起ツタト假定シタ場合ノ, 或ル確率変数ノ平均値ヲ意味スルトスル:

$$(13) \qquad T_{\nu-1} \leqq cb, \qquad |S_\nu| > cb$$

然ルトキニハ

$$E'_\nu\{S^2\} = E'_\nu\{S_\nu^2\} + \sum_{p=\nu+1}^{\infty} E'_\nu\{X_p^2\} \geqq E'_\nu\{S_\nu^2\}$$

從ツテ、証明スベキ結果ハ, 次ノ如クシテ得ラレル:

$$b^2 = E\{S^2\} \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} Pr.\{E_\nu\} E'_\nu\{S^2\} \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} Pr.\{E_\nu\} E'_\nu\{S_\nu^2\}$$

$$\geqq c^2 b^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} Pr.\{E_\nu\} = c^2 b^2 Pr.\{T > cb\}.$$

——(証 終)——

注意3: 定理2ハ聯鎖級数ニ関シテ述ベタ。勿論, 有限個ノ和ノ場合ニハ $Pr.\{T_n > c\,b_n\} \leqq 1/c^2$ ガ成立ツ。

注意4: 前記ノ *Kolmogoroff* ノ論文ニハ, (5) 以外ノイロイロナ不等式ガ掲ゲラアツテ、ソレラハ皆必要ナモノデアツタ。從ツテ、吾々モ (9) ニ満足セズ, 更ニソレラニ對應スルモノガ定理2ノ條件ノモトデ得ラレルクドウカ, 當ツテ見ルコトハ無駄デナイト思フ。

〔4〕 <u>特性函数ノ方法</u>　相互ニ独立ナ確率変数ノ和 $X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$ ノ特性函数ハ，各々ノ特性函数ノ乗積ニナル。即チ スベテノ $-\infty<t<\infty$ ニ對シテ

$$(14)\quad E\left\{e^{it(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)}\right\} = E\left\{e^{itX_1}\right\}E\left\{e^{itX_2}\right\}\cdots E\left\{e^{itX_n}\right\}$$

コノ事実ガ，独立級数ノ研究ヲ容易ナラシメル。(14) ハ X_1, $X_2,\ldots\ldots, X_n$ ガ相互ニ独立ノタメノ必要條件ニ止ラズ，実ハ充分條件デモアル．(Kac) 即チ (14) ナル関係ノ成立スルモノハ相互ニ独立ナモノニ限ル。從ツテ、(14) ソノモノハドウニモ出来ナイ。コレヲ聯鎖ナモノニ拡張出来ナイ。シカシ特性函数ヲ利用スル方法及ビ結果ヲ吟味シテ見レバ，或ル結果ヲ導クノニハ，(14) ソノモノガ必要デハナイノデアル。

S. Bernstein ハ，聯鎖級數ノ有名ナ研究[(4)]ニ於テ、特性函數ヲ上述ノ見方カラ利用シ、聯鎖級數ニ関スル中心極限定理ヲ証明シタ。ソノ方法ハ，独立級数ニ関スル（特性函数ヲ利用シテノ）現在知ラレテ居ル Feller ト Cramér ノ方法ニ比ベルト モット発展ノ餘地ガアル様ニ思ハレルノデアルガ、ソレデモ相當ニ有效ナモノデアツ

---

(4) Sur l'extension du théoréme limite du calcul des probablités aux sommes de quantités dépendantes. Math. Ann. 97 コレヲ〔B〕デ引用スル。

テ、事實 Doeblin[(5)] ノ Markoff 聯鎖ノ最近ノ研究ニ於テモコレヲ援用シテ居ル。

---

(5) Sur les proprietes asymp. de mouvements régis par certains types de chaînes simples. Bullt. Math. Roumaine. (1937) コレヲ〔D〕デ引用スル。