



Title	確率法則ノ分解問題, IV
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 168, p. 616-625
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74672
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

742. 確率法則ノ分解問題, IV

北川 敏男 (阪大)

吾々ハ、愈々 K ノ構造ニ関スル *Khintchine*ノ基本定理 (I, §3, 定理1)ノ証明ニ移ラウ。念ノタメ、問題ノ定理ヲ再記スル:

定理1. (*Khintchine*) 凡ベテノ確率法則 $\mathcal{L}$ ハ必ズ次ノ形ニ表ハレ得ル: $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \mathcal{L}''$, 但シ、茲ニ $\mathcal{L}'$ ハ分解不可能ノ確率法則ノ有限個又ハ無限個ノ積ヲ、 $\mathcal{L}''$ ハ無限ニ分解不可能ナル確率法則ヲ表ハス。

コノ定理ノ証明トシテ、現在ニ通りノ方法が知ラレテ居ル。*Khintchine*ノ方法⁽¹⁾ハ、無限ニ分解可能ヲ定義

(1) 前回引用セシ論文. *Lévy*ノニ示然リ。

I (参照) = 依ッテ定義シテ、定理 I ヲ証明シテ居リ、
コレ = 反シテ Lévy ノ方法ヲハ、無限 = 分解可能ノ定義ヲ
I, §3 ノ意味 = トツテ進ムノデアル。

コレ等ニ定義が同等デアルコトハ、II ノ結果 (定理 2)
カラモ明ラカデアルカラ、結局同じコトヲ示シタ事 = ナルノ
ハ言フマデモナイガ、証明ノ難易ト云フ点カラミルト、Lévy
ノ方がズット簡単デアル。即チ定理 I = 関シテハ無限 = 分解
可能 = 関スル Lévy ノ定義が Khintchine ノ定義ヲ
リモ適切デアルトモ云ヘル。(ソノ代リ定理 2 ノ証明デハ、
Khintchine ノ方がズット簡潔デアル) 茲デハ先ヅ
Lévy ノ証明ヲ紹介シ (§6)、Khintchine ノ方ハ、方
針ノ説明 = 止メヨリ (§7)

§6.1. $\zeta(L)$, $\eta(L)$ ノ導入 定理 I ハ見
方 = 依ッテハ、evident ナ様ナ氣モスル。L が無限
= 分解可能ナ確率法則デアレバヨシ、然ラザレバ必ズ分解
不可能ナ因子ヲ含ムトイフコトヲ示シテ、ガングン = なし
崩シ = シテ行ケバ宜カラウトハ誰モモ想像スルトコロデア
ロリ。實際 = ハ多少工夫ヲ要スル。以上ノ考ヘヲ遂行シテ
証明ヲ完成スルタメ、Lévy ハ $\zeta(L)$, $\eta(L)$ ナルモ
ノヲ導入シタ。

(1) $\zeta(L)$ = 関シテ : 確率法則 L が與ヘラ
レタトスル。 L ヲベ L' ノ素因子ナリトスル; 即チ (i)
 $L = L'L'$ トナルヤリナ確率法則 L' が存在レ、且 (ii) L
ハ單位法則 (§2) デナリ、且ツ分解不可能デアルトスル。

L ノアラエル素因子 $L = \text{ツイテノ平均数縮度 } \delta(L)$
 $(\S 1)$ ノ上限ヲバ $\zeta(L)$ ガ表ハスノデアル。即チ、
 L ノアラエル素因子ノ集合ヲ $p(L)$ ガ表ハストキ、 $p(L)$
 が空集合デナイトキ $= \emptyset$

$$(22) \quad \zeta(L) = \text{u. b. } \delta(L) \\ L \in p(L)$$

デ定義スル。 $p(L)$ が空集合ナラバ、 $\zeta(L) = 0$ ト定
 義スル。

明カニ、 $\zeta(L) \geq 0$ デアル。 $\zeta(L) = 0$ ナルコトガ、
 $p(L)$ が空集合ニナルタメノ必要條件トナル。

$$(2) \quad \underline{\eta(L) = \text{関シテ:}} \quad L \text{ ノ分解 } d: L = \prod_{n=1}^{\Delta_d} L_n$$

ヲ考ヘル。 Δ_d ハ有限デモ、無限デモヨイ。 $\bar{\delta}(d)$ ハ、
 $\delta(L_n)$ ($n = 1, 2, \dots, \Delta_d$) ノ上限ヲ意味スルトス
 ル。 I, § 2, (5), 1° ヲ参照スレバ、コノ上限ハ、何處
 カ、 n デ到達出赤ル譯デアルカラ。

$$(23) \quad \bar{\delta}(d) = \text{u. b. } \delta(L_n) = \text{Max } \delta(L_n) \\ 1 \leq n \leq \Delta_d \quad 1 \leq n \leq \Delta_d$$

(茲ニ、各 L_n ハ分解不可能トハ限ツテ居ナイコトニ注意
 セラレタイ。)

次ニ、上述ノ如キ L ノスベテノ分解ノ集合ヲ考ヘル、
 コレヲ $\omega(L)$ ガ表ハサウ。 $\eta(L)$ ハ、コノトキ、次ノ
 如ク定義サレル:

$$(24) \quad \eta(L) = \text{l. b. } \bar{\delta}(d) \\ d \in \omega(L)$$

コノ定義カラ明ラカニ、次ノコトが見ラレル⁽²⁾ (簡單デアルカラ証明ハ略スル):

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} (\alpha) \quad \mathcal{L} \text{ が } \underline{\text{無限}} = \underline{\text{分解可能}} \text{ デアルタメノ 必要條件ハ} \\ \quad \eta(\mathcal{L}) = 0. \\ (\beta) \quad \mathcal{L} \text{ が } \underline{\text{分解不可能}} \text{ デアルタメノ 必要條件ハ} \\ \quad \delta(\mathcal{L}) = \eta(\mathcal{L}). \\ (\gamma) \quad \text{一般} = 0 \leq \eta(\mathcal{L}) \leq \delta(\mathcal{L}). \end{array} \right.$$

§ 6.2. 補助定理 6. $\eta(\mathcal{L}) > 0$ ナラバ、次ノ様ナ分解不可能ナ $\mathcal{L}$ が存在スル: (i) $\mathcal{L}$ ハ $\mathcal{L}$ ノ素因子デアル; 且ツ (ii) $\delta(\mathcal{L}) \geq \eta(\mathcal{L})$.

注意: (25), (α) ヲ参照スレバ: $\mathcal{L}$ が「無限 = 分解可能ナ確率法則」デナケレバ、 $\mathcal{L}$ ヲ分解スルヤウナ素因子 $\mathcal{L}$ が存在スルトイフコトが、コノ補助定理カラ得ラレル。コレハ面白い結果トイフベキデアル。但シ、無限 = 分解可能ナ確率法則 = シテ、素因子ヲ有スルモノハ存在スル (§5, 例 4) カラ逆ハ成立セヌ。

補助定理 6 ノ証明: 正数列 $\{\varepsilon_n\}$, $(\varepsilon_n \downarrow 0)$ ($n = 1, 2, \dots$) が任意ニ與ヘラレタトスル。コレニ關シテ、次ノヤウナ確率法則ノ系列 $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ が定義出

(2) (α) ハ定義カラ明ラカデアル。(I, §3 参照)

(β): $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \dots \mathcal{L}_n$ トナレバ必ず $\delta(\mathcal{L}_i) < \delta(\mathcal{L})$

($i = 1, 2, \dots, n$) (但シ勿論各 $\mathcal{L}_i$ ハ單位法則デナイトスル) コレカラ (β) が得ラレル。

(γ) ハ以上ニヨリ明ラカ。

示タトスル:

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \\ (ii) \quad \mathcal{L}_\Delta \text{ハ} \mathcal{L}_{\Delta-1} \text{ノ分解因子ヲナシ, 且ツ, } \Delta = 1, \\ \quad 2, \dots, n = \text{對シテ} \\ \quad \eta(\mathcal{L}_{\Delta-1}) \leq \eta(\mathcal{L}_\Delta) \leq \delta(\mathcal{L}_\Delta) \leq \eta(\mathcal{L}_{\Delta-1}) + \varepsilon_\Delta \end{array} \right.$$

今 $\mathcal{L}_n$ が分解不可能デアルトスル。然ルトキニハ, $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}$ トオケバ,

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{L}) &\geq \eta(\mathcal{L}_{n-1}) \geq \eta(\mathcal{L}_{n-2}) \\ &\geq \dots \geq \eta(\mathcal{L}_0) = \eta(\mathcal{L}) \end{aligned}$$

トナリ、補助定理 6 ハ成立スル。

次ニ、 $\mathcal{L}_n$ が分解可能ナリトスル。 $\eta(\mathcal{L}_n)$ ノ定義カラシテ、 $\mathcal{L}_n$ ノ適當ナ分解 $\mathcal{L}_n = \prod_{l=1}^d \mathcal{L}_{n,l}$ トレバ、 $l = 1, 2, \dots, d$ ニ對シテ、 $\delta(\mathcal{L}_{n,l}) \leq \eta(\mathcal{L}_n) + \varepsilon_{n+1}$ トナリ、尚モアル $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ ニ對シテハ、 $\delta(\mathcal{L}_n, l_0) \geq \eta(\mathcal{L}_n)$ トナルヤウナ $\mathcal{L}_n$ ノ分割ガアル。セ、レ分解ニ依ツテ $\mathcal{L}_{n+1} = \mathcal{L}_n, l_0$ ト定義スレバ、(26) ナル關係ハ $\Delta = n+1$ ニ對シテモ成立ツ。 $\mathcal{L}_{n+1}$ が分解不可能デアレバ、上述ノ如クシテ推ムシ、然ラザルトキニハ、 $\Delta = n+2$ ニ對シテモ (26) ガ成立ツ様ナ $\mathcal{L}_{n+1}$ ガアル。

依ツテ結局、スベテノ自然数 Δ ニ對シテ (26) ナル關係ノ成立スルヤウナ確率法則ノ無限系列 $\{\mathcal{L}_n\}$ ノ存在ヲ假定シテ、コノ場合ニモ補助定理 6 ノ成立ヲ示セバヨイ。

$\mathcal{L} / \mathcal{L}_n = \mathcal{L}'_n$ ト置ク。各 $\mathcal{L}'_n$ ハ $\mathcal{L}'_{n+1}$ ノ分解因子デアル。 $\delta(\mathcal{L}'_n)$ ハ從ツテ、 n ト共ニ増加スル (平均數

縮度増加ノ原理, §2) シカシ $\delta(L)$ ヲ越ヘナイ。故
 $= \lim \delta(L'_n) \leq \delta(L) < \infty$. 従ツテ、 $\{L'_n\}$ ハアル
 確率法則へ *quasi-convergence* ヲナス。従ツテ $\{L_n\}$
 モ亦然リ、 $\{L_n\}$ ノ極限法則ヲ L デ表ハサウ。

一方、 $\{L_n\}$ ノ定義カラ、 $\{\eta(L_n)\}$, $\{\delta(L_n)\}$ ハ夫々、單
 調非減少、單調非増加テ同ジ極限值ヲモツ。ソコデ

$$(27) \quad \eta(L_n) \leq \eta(L) \leq \delta(L) < \delta(L_n)$$

ガアル所ヲサキノスベテノ n = ツイテ成立スレバ、 $\eta(L)$
 $= \delta(L)$ トナル。又 L ガ L ノ分解因子デアリュトハ明
 カデアリ、又 $\eta(L) = \eta(L_0) \leq \eta(L_n) \leq \eta(L) =$ 依
 ヲツテ $\eta(L) \leq \delta(L)$ トナルカラ、補助定理6ハ証明サ
 レタコトナル。

ソコデ、(27) ヲ示サウ。 $\eta(L) \leq \delta(L) < \delta(L_n)$
 ハスベテノ n = 對シテ成立ツ。 $\eta(L_n) > \eta(L)$ トナル
 様ナ n_0 ガアルト假定シテ矛盾ニ導カウ。 $\{\eta(L_n)\}$ ハ單
 調非減少デカラ、 $n \geq n_0$ ナレスベテノ n = ツイテ
 $\eta(L_n) > \eta(L)$ トナル。サテ一方デ、 $\delta(L_n/L)$ ガ
 $n \rightarrow \infty$ ノトキ0ナルコトカラ、充分大ナルスベテノ n
 $=$ ツイテ $\delta(L_n/L) < \eta(L_n)$ トナル。

従ツテ、 $L_n = L \cdot \frac{L_n}{L}$ ト書クトキ、 $\eta(L)$ モ
 $\delta(L_n/L)$ モ共ニ $\eta(L_n)$ ヨリ小ナル。コレハ矛盾
 デアル。 ($\delta(L_n/L) < \eta(L_n)$ ナコトカラ $\eta(L) \equiv$
 $\eta(L_n)$ トナラネバナラス。) [証終]

§6.3. 定理1ノ証明: 今 L が無限 = 分解可能

ナラバ、ソレデヨイ。然ラザルトキニハ、 $\eta(L) > 0$ デアル
 ル (25), (26)。従ッテ補助定理6 = ヨッテ L ノ素因
 子が少クモ一ツ存在スル。即チ $\zeta(L) > 0$ トトラネバナ
 ラス。(86, 1[1] 参照) 従ッテ $\{\varepsilon_n\}$ $\varepsilon_n \downarrow 0$ ヲ任
 意ニ與ヘタトシテ、次ノ如キ分解不可能ナ確率法則列 $\{L_n\}$
 ヲ定義スルコトが出来ル。

(i) L_1 ハ $L = L_1 L_1''$ ノ素因子デシカ $\varepsilon(L_1) > \zeta(L) - \varepsilon_1$
 トシ、且ツ $L = L_1 L_1''$ トスル。

(ii) L_2 ハ L_1'' ノ素因子デ、シカ $\varepsilon(L_2) > \zeta(L_1'') - \varepsilon_2$
 トシ、且ツ $L_1'' = L_2 L_2''$ トスル。

以下斯クノ如クシテ $\{L_n\}$ $\{L_n''\}$ ヲ定義スル。

若シ、コノ process = シテ、無限ニ分解可能ナ $L_n'' =$
 到達シタナラバ、 $L = L_1 L_2 \cdots L_n L_n''$ ト書ケテ、コレ
 デ定理ハ証明サレタ。

然ラザルトキニハ、無限系列 $\{L_n\}$, $\{L_n''\}$ ヲ得ル。コ

ノトキ明カニ $\prod_{n=1}^{\infty} L_n$ ハ quasi-convergent デアル。コレ

ヲ $L' = \prod_{n=1}^{\infty} L_n$ トオク。

(3) 補助定理6 = 依ッテ L ノ素因子ノ存在ヲ知ル。(更ニ要シ
 クハ、 $\delta(L) \geq \eta(L)$ トナル素因子 L ノ存在モロカル説
 デアルガコノ事ハ用キ + 1)。従ッテ $\zeta(L) > 0$ デアル。
 然ルニ (22) ノ定義カヲ $\varepsilon > 0$ ヲ如何ニ與ヘテモ $\zeta(L) - \varepsilon$ ヨ
 リ大ナル平均散縮度ヲモツ素因子ガアルワケデアル。

然ル時 $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \mathcal{L}''$ ト書カレル。

茲 $\mathcal{L}''$ ハ無限ニ分解可能ナル、何者 ΠL_n ハ *quasi-convergent* ナルカラ、 $\delta(L_n) \rightarrow 0$ デアリ、他方、定義ニヨリ $\zeta(\mathcal{L}'_n) < \delta(L_{n+1}) + \varepsilon'_{n+1}$ ナル。今假リ $\mathcal{L}''$ が無限ニ分解可能ナ確率法則ヲナイトストル $\mathcal{L}''$ ハ素因子 L'' ヲモツ。(無論 L'' ハ單位法則ヲナイトシテ) L'' ハ各 $\mathcal{L}''_n$ ノ素因子デモアルカラ、 $\delta(L'') \leq \zeta(\mathcal{L}''_n)$ 故ニ、 $\delta(L'') = 0$ 、從ツテ L'' ハ單位法則タラガルヲ得ナイ、コレハ矛盾。

§ 17. [挿記] 定理 1ニ関スル Khintchineノ証明ノ概要: Lévyノ証明ニ於テ、吾々ハ平均散縮度 $\delta(\mathcal{L})$ ノ有效ナコトが見ラレルノデアルガ、特性函数ヲ主ナル道具トスル Khintchineノ証明デハ、コレニ代ルトギモノトシテ $\mathcal{L}$ ノ分布函数ヲ $F(x)$ 、特性函数ヲ $f(t)$ トスルトキ

$$\begin{aligned} (29) \quad Na(\mathcal{L}) &\equiv Na(f) \equiv -\int_0^a \log |f(t)| dt \\ &\equiv -\int_0^a \log \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \right| dt \end{aligned}$$

ヲバ考ヘルノデアル。但シ、 $f(0) = 1$ デ且 $f(t)$ ハ連続ナコトカラ、 $0 \leq t \leq a$ デハ $f(t) \neq 0$ ナルヲウ $= a$ ヲツテアルトスル。同様ノ注意ハ一々ニ以テ述べナイ。

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ トスルト、 $Na(\mathcal{L}) = Na(\mathcal{L}_1) + Na(\mathcal{L}_2)$ トナル。(何者 $f(t) = f_1(t) f_2(t)$ ナカラ) 從ツテ Na ハ *non-positive* ナコトカラ、 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ ナラ

バ、 $N_a(\mathcal{L}_i) \geq N_a(\mathcal{L})$ ($i=1, 2$) トナル。

然ラバ、コノ不等式ノ成立スルノハ何時カト云フ問題が起ルノデアルガ、之レハ、次ノ補助定理カラ、ソノ解答ガ得ラレル。

“補助定理. 分布函数列 $F_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) が、スベテノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $F_n(-\varepsilon) \leq \frac{1}{2}$, $F_n(\varepsilon) \geq \frac{1}{2}$ ナリトスル。ソノ特性函数列 $\{f_n(t)\}$ が、或ル $a > 0$ ニ對シテ $N_a(f_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ナルトキニハ、 $f_n(t) \rightarrow 1$ (スベテノ t ニ對シテ) トナル。”

或ル a ニ對シテ $N_a(f) = 0$ ガ成立スルナラバ、 $f(t)$ ノ分布函数ヲ $F(x)$ トスルトキ適當ナ常数 a ヲトツテ $F(x+a) = F_n(x)$ トシテ上ノ補助定理ノ條件ヲ満足スル様ニ出来ルカラ、 $f_n(t) = e^{-iat} f(t) = 1$ ($-\infty < t < \infty$) トナルコトガ上カラ得ラレル。従ツテ、

「 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ トスルト、 $N_a(\mathcal{L}_i) \geq N_a(\mathcal{L})$ ($i=1, 2$) 但シ一般ニハ不等式ガ成立スルノデアツテ、例ヘバ $N_a(\mathcal{L}_1) = N_a(\mathcal{L})$ トナルノハ $N_a(\mathcal{L}_2) = 0$ 即チ $|f(t)| = 1$ ($0 \leq t \leq a$) 即チ $f(t) = e^{-iat}$ ($-\infty < t < \infty$) 即チ $\mathcal{L}_2$ ガ單位法則ニナルトキニ限ル」

コノ性質ハ、 $\mathcal{J}(\mathcal{L})$ ノ性質ニ對比スベキモノデアル。シカモ $N_a(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = N_a(\mathcal{L}_1) + N_a(\mathcal{L}_2)$ ナル關係サヘアリ、特性函数トノ關係モ明瞭デアル。

Khintchine ノ証明ハ、 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ ト分解シ、 $\mathcal{L}_1$ ハ分解不可能ニ確率法則ノ積、 $\mathcal{L}_2$ ハ素因子ヲ有シテ

イ確率法則デアル様ニ出来ルコトヲ先ヅ示シ、次ニ素因子ヲ
有シナイ確率法則ハ無限ニ分解可能ナコトヲ示ス事ニ依ツテ
証明ヲ完成シタノデアル。ソノ全体ヲ通ジテ基調ヲナスモノ
ハ、上述ノ $Na(\mathcal{L})$ ノ利用デアル。