



Title	Doeblin ノ 論文紹介, III
Author(s)	角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 168, p. 625-631
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74673
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

743. Doeblin の論文紹介 III

角 谷 静 夫 (阪大)

§ 4. 續キ

$d=1$ トキ $\mathcal{B}$ 全体が一ツノ *final set*

ナリ且ツ $d=1$ トナル場合ヲ考ヘル。

補助定理 5. $d=1$ トルトキハ任意ノ $x \in \mathcal{B}$ 及ビ任意ノ Borel 集合 $E \subset \mathcal{B}$ ニ對シテ $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(x, E) = P(E)$ ナルヲ示ス。シカモ $|P^{(n)}(x, E) - P(E)| \leq K \cdot \tau^n$, $n = 1, 2, \dots$ が成立スル如キ (x, E ニ無關係ナリ) 常数 K, τ ($0 < \tau < 1$) が存在スル。

補助定理ヲ証明スルタメニハ次ノ補助定理 6 ヲ証明スルバヨイ。

補助定理 6. $d=1$ トルトキハ *positive integer* M 及ビ *positive number* τ , ($0 < \tau < 1$) が存在シ

テ、 $p^{(M)}(x, y) \leq \tau$ 、 $x \in \Omega$ 及び任意、 $y \in B$
 = 對シテ成立スル。但シ $p^{(M)}(x, y) \wedge P^{(M)}(x, E)$ 、
 density デアリ、 B ハ補助定理 2 = テ得ラレタ Borel 集
 合デアル。

補助定理 6 ヨリ補助定理 5 が得ラレルコトノ証明:

任意ノ Borel 集合 $E \subset \Omega$ 及び $n = 1, 2, \dots$ = 對シテ $P^{(n)}(E)$
 及び $p^{(n)}(E)$ ノ次ノ如ク定義スル。

$$P^{(n)}(E) = l. u. b_{x \in \Omega} P^{(n)}(x, E),$$

$$p^{(n)}(E) = g. l. b_{x \in \Omega} P^{(n)}(x, E).$$

明カ =

$$P^{(n)}(E) \leq P^{(n+1)}(E) \leq P^{(n+1)}(E) \leq P^{(n)}(E),$$

$$n = 1, 2, \dots$$

デアル。ヨツテ任意ノ Borel 集合 $E \subset \Omega$ = 對シテ

$$0 \leq P^{(nM)}(E) - P^{(nM)}(E) \leq \tau_2^n, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$0 < \tau_2 < 1$$

ナルコトヲ証明スレバ補助定理 5 ノ証明ハ完結スル。但シ M
 ハ補助定理 6 = 現ハレル M デアル。

先ヅ任意ノ integer m 及び任意ノ $x, y \in \Omega$ 及び任
 意ノ Borel 集合 $E \subset \Omega$ = 對シテ

$$P^{(n+M)}(x, E) - P^{(n+M)}(y, E)$$

$$= \int_{\Omega} (P^{(M)}(x, de_2) - P^{(M)}(y, de_2)) P^{(n)}(z, E).$$

ヨツテ今 x, y を fix シタ トキ $P^{(M)}(x, E) - P^{(M)}(y, E)$
 (E を variable ト考ヘル) が maximum = 達スル
 Borel 集合ヲ ∇ トス レバ⁽¹⁾

$$\begin{aligned}
 & P^{(m+M)}(x, E) - P^{(m+M)}(y, E) \\
 &= \int_{\nabla} + \int_{\Omega - \nabla} (P^{(M)}(x, de_2) - P^{(M)}(y, de_2)) P^{(m)}(Z, E) \\
 &\leq \int_{\nabla} (P^{(M)}(x, de_2) - P^{(M)}(y, de_2)) \cdot P^{(m)}(E) \\
 &\quad + \int_{\Omega - \nabla} (P^{(M)}(x, de_2) - P^{(M)}(y, de_2)) p^{(m)}(E) \\
 &= (P^{(M)}(x, \nabla) - P^{(M)}(y, \nabla)) \cdot P^{(m)}(E) \\
 &\quad + (P^{(M)}(x, \Omega - \nabla) - P^{(M)}(y, \Omega - \nabla)) p^{(m)}(E) \\
 &= (P^{(M)}(x, \nabla) - P^{(M)}(y, \nabla)) (P^{(m)}(E) - p^{(m)}(E))^{(2)}
 \end{aligned}$$

然ルニ

$$\begin{aligned}
 & P^{(M)}(x, \nabla) - P^{(M)}(y, \nabla) \\
 &= P^{(M)}(x, \nabla) + P^{(M)}(x, \Omega - \nabla) - (P^{(M)}(x, \Omega - \nabla) + P^{(M)}(y, \nabla)) \\
 &= 1 - (P^{(M)}(x, \Omega - \nabla) + P^{(M)}(y, \nabla))
 \end{aligned}$$

(1) $P^{(M)}(x, E), P^{(M)}(y, E)$ は E = 関シテ totally additive ナル

故 maximum = 達スル如キ ∇ は必ず存在スル。任意ノ

$E \subset \nabla$ = 對シテ $P^{(M)}(x, E) - P^{(M)}(y, E) \geq 0$ 。又任意ノ

$E \subset \Omega - \nabla$ = 對シテハ $P^{(M)}(x, E) - P^{(M)}(y, E) \leq 0$ 。

(2) $P^{(M)}(x, \nabla) - P^{(M)}(y, \nabla) = P^{(M)}(x, \Omega - \nabla) - P^{(M)}(y, \Omega - \nabla)$

ナルコトハ $P^{(M)}(x, \nabla) + P^{(M)}(x, \Omega - \nabla) = P^{(M)}(y, \nabla)$

$+ P^{(M)}(y, \Omega - \nabla) = 1$ ナルコトヨリ得ル。

$= \tau$ 且 γ

$$\begin{aligned}
 P^{(M)}(x, \Omega - \nabla) + P^{(M)}(y, \nabla) &\geq \int_{\Omega - \nabla} P^{(M)}(x, z) d z \\
 &\quad + \int_{\nabla} P^{(M)}(y, z) d z \\
 &\geq \int_{(\Omega - \nabla) \cdot B} P^{(M)}(x, z) d z + \int_{\nabla \cdot B} P^{(M)}(y, z) d z \\
 &\geq \tau_1 \cdot m((\Omega - \nabla) \cdot B) + \tau_1 \cdot m(\nabla \cdot B) = \tau_1 \cdot m(B) > 0
 \end{aligned}$$

ナル故

$$P^{(M)}(x, \nabla) - P^{(M)}(y, \nabla) \leq 1 - \tau_1 \cdot m(B) = \tau_2 < 1$$

ヨツテ

$$P^{(m+M)}(x, E) - P^{(m+M)}(y, E) \leq \tau_2 (P^{(m)}(E) - P^{(m)}(E))$$

補助定理 6 の証明. 証明ヲ二段ニ分ツ。

第一段. 或ル positive integer M , 及ビ或ル positive number ρ^* が定マツテ任意ノ $x \in \Omega$ = 對シテ $P(x, A)$, $P^{(2)}(x, A)$, ..., $P^{(M)}(x, A)$ ノ中ノ少クトモ一ツが $\geq \rho^*$ トナル。

証明: $P^{(m)}(x, A) > 0$ トナル如キ x 全体ノ集合ヲ ∇_m トスレバ Ω が final set ナルコトト $m(A) > 0$

ナルコトトヨリ $\Omega = \sum_{m=1}^{\infty} \nabla_m$. ヨツテ十分大キク M' ヲ大

キクトレバ $m\left(\Omega - \sum_{m=1}^{M'} \nabla_m\right) < \frac{\gamma}{2}$. ヨツテ更ニ

$P^{(m)}(x, A) > \varepsilon$ トナル如キ x 全体ノ集合ヲ $\nabla_{m, \varepsilon}$ トスレバ

十分小さい $\varepsilon > 0$ = 對シテ $m\left(\Omega - \sum_{m=1}^{M'} \nabla_{m,\varepsilon}\right) < \eta$. 故

= 最初ノ假定 (*) = ヨリ 任意ノ $x \in \Omega$ = 對シテ

$$P^{(N)}(x, \Omega - \sum_{m=1}^{M'} \nabla_{m,\varepsilon}) < 1-b \quad \text{又ハ} \quad P^{(N)}(x, \sum_{m=1}^{M'} \nabla_{m,\varepsilon}) > b.$$

ヨツテ 凡ク ε 小ツノ $m (1 \leq m \leq M')$ = 對シテ

$$P^{(N)}(x, \nabla_{m,\varepsilon}) > \frac{b}{M'}.$$

從ツテ $P^{(N+M)}(x, A) \geq \int_{\nabla_{m,\varepsilon}} P^{(N)}(x, dy) P^{(M)}(y,$

$$A) \geq \frac{b\varepsilon}{M'}.$$

故ニ $M_1 = N + M'$, $\rho^* = \frac{b\varepsilon}{M'}$ トオケベヨイ。

(第一段終)

第二段 或ル positive integer M_2 及ビ或ル positive number ρ^{**} が定マツテ 任意ノ $x \in A$, $y \in B$ 及ビ $M_2 \leq m < M_1 + M_2$ 及ビ任意ノ integer $m =$ 對シテ $p^{(m)}(x, y) \geq \rho^{**}$ トナル。

証明: d ノ定義ヲ考ヘ、 d (前号 587 頁) d ハア
ラユル $L (C B) =$ 對スル $m = m_i + 2N$ 全体 (コレヲ $\mathcal{M}$
トスル) ノ最大公約数デアルカラ $d = 1$ トナルコトヨリ、

$m_i = m'_i + 2N \in \mathcal{M} (i = 1, 2, \dots, k)$ が存在シテ $m_1,$
 $m_2, \dots, m_k$ ノ最大公約数が 1 トナル。⁽³⁾ 即チ補助定

理 2 = テ定マツタ Borel 集合 B ノ中ニ k 個ノ Borel 集

(3) 前ニ $m = m_i + 2N$ ト書キ、今度 $m_i = m'_i + 2N$ ト書イタノデ

ハ notation ノ間ニ統一ガナリ。コレハ前ニ $m = m' + 2N$

ト書イテオケベキデシタ。

合 L_i ($i = 1, 2, \dots, k$) が存在シテ⁽⁴⁾、コレ等ハ何レヲ
 $m(L_i) > 0$ デアリ 且ツ アル $m'_i, \rho'_i, \rho_0 =$ 對シテ

$$\begin{cases} \text{任意ノ } x \in L_i = \text{對シテ } P^{(m'_i)}(x, A) \geq \rho'_i > 0 \\ \text{任意ノ } x \in A, y \in L_i = \text{對シテ } p^{(2N)}(x, y) \geq \rho_0 > 0 \\ \text{任意ノ } x \in A = \text{對シテ} \\ P^{(2N+m'_i)}(x, A) \geq \rho_0 \rho'_i \cdot m(L_i) > 0. \end{cases}$$

が成立スル。 ($i = 1, 2, \dots, k$)

ヨツテ又任意ノ $x \in A$ 及び任意ノ $m'_i, \dots, m'_j$ ($1 \leq i, \dots, j \leq k$) = 對シテ

$$\begin{aligned} & P^{(2N+m'_i+2N+\dots+2N+m'_j)}(x, A) \\ & \geq \rho_0 \rho'_i m(L_i) \cdot \rho_0 \dots \rho_0 \rho'_j m(L_j). \end{aligned}$$

が成立スル。今 $2N+m'_i+2N+\dots+2N+m'_j$ ($1 \leq i, \dots, j \leq k$) ト云フ形ノ アラユル *integer* 7 考ヘレバ
 $m_1 = 2N+m'_1, m_2 = 2N+m'_2, \dots, m_k = 2N+m'_k$
 ノ最大公約数が 1 デアルト云フコトヨリ十ホ大キイ *integer*
 M'_2 が定マツテ $m \geq M'_2$ ナル任意ノ *integer* m ハトベ
 テ $2N+m'_i+2N+\dots+2N+m'_j$ ($1 \leq i, \dots, j \leq k$)
 ト云フ形 = 表ハサレル。ヨツテクル $m =$ 對シテハ任意ノ
 $x \in A$ 及び $y \in B =$ 對シテ

$$\begin{aligned} p^{(m+2N)}(x, y) & \geq \int_A P^{(m)}(x, de_2) p^{(2N)}(x, y) \\ & \geq \rho_0 \rho'_i m(L_i) \cdot \rho_0 \dots \rho_0 \rho'_j m(L_j) \cdot \rho_0 \end{aligned}$$

(4) L_i ハ互ニ共通部分モツテキルカモシレナイ。シカモ L_i ト L_j
 ($i \neq j$) ハ全ク同ジ集合デアルカモ知レナイ。

トナル。

今 $M'_2 \leq m < M'_2 + M_1$ なる integer m ハスベテ
 $2N + m'_i + 2N + \dots + 2N + m'_j$ ト云フ形ニ表ハサレル
 カラ、 $m = M'_2, M'_2 + 1, \dots, M'_2 + M_1 - 1$ = 對スル
 $\rho_0 \rho'_i m(L_i) \rho_0 \dots \rho_0 \rho'_j m(L_j) \rho_0$ 全体 (コレハ
 全体ヲ M_1 個)ノ minimum ヲ ρ^{**} トスレバ

$M'_2 \leq m < M'_2 + M_1$ ナル任意ノ m 及ビ任意ノ $x \in A, y \in B$
 = 對シテ

$$\rho^{(m+2N)}(x, y) \geq \rho^{**} > 0$$

トナル。ヨツテ $M_2 = M'_2 + 2N$ トオケバコイ。(第二段ノ
 証明終)