OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Continuous Geometry 二就テ, III
Author(s)	小平, 邦彦; 古屋, 茂
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 169, p. 638-656
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74675
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

745. Continuous Geometry ニ就テ, III

小平 邦彦 , 古屋 茂 (東大)

§5. $L \cong R\gamma_m$ ノ證明

コノ§デ $L \cong R\gamma_m$ ナルコトノ証明ヲ終ル。既ニ $L(a_i) \cong R\gamma$ ナルコトハ分ッテヰルカラ, m ニ關スル帰納法ニヨッテ順次ニ

$$L(a^m) \cong R\gamma_m$$

ヲ証明スル。

簡単ノタメ

$$R\gamma_m = L_m^*$$

トオク。 $L_m^* = R\gamma_m$ ノ元ハ vector space

$$V_\gamma^m = E_1\gamma + \cdots\cdots + E_m\gamma$$

ノ Teilmodul ニヨッテ現ハサレル。コノトキ

$$a_i^* = (E_i) \qquad c_{ij}^* = (E_i - E_j)$$

トオケバ (a_i^*, c_{ij}^*) ハ L_m^* ノ normalized frame ヲナス。

Lemma. 32. $L_{ij}^* = (b^*;\ b^* \cdot a_j^* = 0,\ b^* \cup a_j^* = a_i^* \cup a_j^*)$.

Element b^* ハ, b^* ニヨッテ一意的ニ定マル β ニヨッテ,

$$b^* = (E_i - E_j\beta)$$

ト現ハサレル。逆ニ $(E_i - E_j\beta)$ ハ L_{ij}^* ニ含マレル。

証明. i) $(E_i - E_j\beta) \subset L_{ij}^*$ ハ明白デアル。

ii) $b^* \subset \mathfrak{a}_i^* \cup \mathfrak{a}_j^* = (E_i, E_j)$ デアルカラ，b^* ハ有限個ノ vector $v_\varrho = E_i \alpha_\varrho + E_j \beta_\varrho$ ヨツテ $b^* = (v, v_2, \cdots\cdots)$ ノ形ニ現ハサレル。スナハチ b^* ノ vector ハ

$$v = E_i \alpha + E_j \beta, \quad \alpha = \sum_\varrho \alpha_\varrho \xi_\varrho, \quad \beta = \sum \beta_\varrho \xi_\varrho$$

ナル形ヲモツ。 I ノ定理2（一次方程式ニ関スル定理）ノ系ニヨレバ、カクノ如キ α, β ハ，γ_2 及ビ idempotent $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ヨツテ

$$\alpha = \varepsilon_1 \eta_1$$

$$\beta = \gamma_{21} \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2$$

ト現ハサレル。故ニ $v \subset b^*$ ハ

$$v = (E_i \varepsilon_1 + E_j \gamma_{21}) \eta_1 + E_j \varepsilon_2 \eta_2$$

従ツテ

$$b^* = (E_i \varepsilon_1 + E_j \gamma_{21}, \quad E_j \varepsilon_2)$$

然ルニ $b^* \mathfrak{a}_j^* = 0$ デアルカラ $(E_j \varepsilon_2) = 0$.

故ニ $\varepsilon_2 = 0$.

又 $b^* \cup \mathfrak{a}_j^* = \mathfrak{a}_i^* \cup \mathfrak{a}_j^*$ デアルカラ，

$$\mathfrak{a}_i^* = \mathfrak{a}_i^* (b^* \cup \mathfrak{a}_j^*) = (E_i \varepsilon_1)$$

故ニ

$$(\varepsilon_1) = 1$$

故ニ $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1$ デアルカラ $\varepsilon_1 = 1$ トナル。ソコデ $\gamma_{21} = -\beta$ ト書ケバ

$$b^* = (E_i - E_j \beta).$$

β ガ一意的ニ定マルコトハ簡単ニ確メラレル。（証明終）

normalized frame $(\alpha_i^*,\ \Gamma_{ij}^*)$ ニ関シテ作ッタ Γ-number ノ Ring ヲ γ^*, ソノ元ヲ β^* トスレバ, 上ノ Lemma ニヨリ

$$(\beta^*)_{ij} = (E_i - E_j\beta)$$

ナル對應ニヨッテ β^* ト β ガ一對一ニ對應シ, 更ニコノ對應ニヨッテ γ^* ト γ が ring-isomorph トナル。何トナレバ:

$$(\beta^*)_{ij} = (E_i - E_j\beta) \qquad (\gamma^*)_{ij} = (E_i - E_j\gamma)$$

ナルトキ

$$\begin{aligned}
&(\beta^*+\gamma^*)_{ij}\\
&=((\beta^*)_{ij}\smile\Gamma^*_{ik})(\alpha^*_j\smile\alpha^*_k)\smile((\gamma)^*_{ij}\smile\alpha^*_k)(\alpha^*_j\smile\Gamma^*_{ik})\big)(\alpha^*_i\smile\alpha^*_j)\\
&=\big((E_i-E_j\beta, E_i-E_k)(E_j, E_k)\smile(E_i-E_j\gamma, E_k)(E_j, E_i-E_k)\big)(E_i, E_j)\\
&=(E_j\beta-E_k,\ E_i-E_j\gamma-E_k)(E_i, E_j) = (E_i-E_j(\beta+\gamma)).
\end{aligned}$$

又 $(\beta^*)_{ij} = (E_i - E_j\beta)$, $(\gamma^*)_{jk} = (E_j - E_k\gamma)$ ナルトキ

$$\begin{aligned}
(\gamma^*\beta^*)_{ik} &= \big((\beta^*)_{ij}\smile(\gamma^*)_{jk}\big)(\alpha^*_i\smile\alpha^*_k)\\
&=(E_i - E_j\beta,\ E_j - E_k\gamma)(E_i, E_k)\\
&=(E_i - E_k\gamma\beta).
\end{aligned}$$

ソコデ $\gamma^*\cong\gamma$ ニヨッテ對應スル β^* ト β ヲ等シイモノト考ヘテ

$$\beta^* = \beta,$$

從ッテ $\gamma^* = \gamma$

トオク。コノトキ Γ^*_m ニ於テ $(\alpha^*_i,\ \Gamma^*_{ij})$ ナル normalized frame ニ關シテ作ッタ $(\beta^*)_{ij}$, $(\beta^*)_j$, 及ビ

$(\beta^*;\ \gamma^{*1}\gamma^{*2}\cdots\cdots\gamma^{*m-1})$ ヲ L ニ於ケル $(\beta)_{ij}$, $(\beta)_j$, 等ト區別スルタメニ

$$(\beta^*)_{ij\cdot} = (\beta^*)_{ij}^{\ *} = (\beta)_{ij}^{**}$$

$$(\beta^*)_{j\cdot} = (\beta^*)_j^{\ *} = (\beta)_j^{**}$$

$$(\beta^*;\gamma^{*1}\cdots\cdots\gamma^{*m-1}) = (\beta^*;\gamma^{*1}\cdots\cdots\gamma^{*m-1})^* = (\beta;\gamma^1\cdots\cdots\gamma^{m-1})^*$$

ト書クコトニスル。スナハチ

$$(\beta)_{ij}^{\ *} = (E_i - E_j\beta)$$

$$(\beta)_j^{\ *} = (E_j\beta)$$

及ビ

$$(\beta;\gamma^1\cdots\cdots\gamma^{m-1})^* = \left(\alpha^{*m-1}\smile(E_m\beta)\right)\prod_{j=1}^{m-1}\left(\alpha_j^{*m-1}\smile(E_m - E_j\gamma^j)\right).$$

$L_1^* = R_\gamma$ トシ $L(\alpha^1)$ ノ間ノ isomorphism ハ

$$(\beta)_1^* \longleftrightarrow (\beta)_1$$

ナル對應ニヨッテ與ヘラレタ。ソコデ一般ニ R_{γ_k} トシ $L(\alpha^k)$ ノ間ニ

$$(\beta)_j^{*} \longleftrightarrow (\beta)_j$$
$$(\gamma)_{j\cdot k}^{*} \longleftrightarrow (\gamma)_{jk} \qquad j, k \leqq k$$

ナル對應ヲ與ヘル isomorphism ヲ考ヘ，コレヲ $\Im^k$ デ現ハス。$\Im^1$ が存在スルコトハ既ニ証明サレテヰル。ソコデ $\Im^{m-1}$ が存在スルコトヲ假定シテ、コレヲ延長シテ $\Im^m$ ヲ構成スルコトヲ試ミル。コレが出來レバ，帰納法ニヨッテ

$\mathfrak{a}^n$ ノ存在，スナハチ $R\gamma_n \cong L$ ガ証明サレル。

コノ展望上 $\mathfrak{a}^k$ ニヨッテ $\mathfrak{u} \cong L(\mathfrak{o}\mathfrak{l}^k)$ ニ対応スル $L_k^* = R\gamma_k$ ノ元ヲ $\mathfrak{a}^k\mathfrak{u}$ デ現ハスコトニスル。

$\mathfrak{u} \cong \mathfrak{o}\mathfrak{l}^m$ ハ定理3ノ系及ビ定義15ニヨッテ

(I) $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}\mathfrak{o}\mathfrak{l}^{m-1}\smile(\beta; \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1})$

ト現ハサレル。コノ現ハレ方ハ勿論一意的デハナイケレドモ，$\mathfrak{a}^{(m)}(\beta_j) = (\beta)^*_j$，$\mathfrak{a}^m(\gamma)_{j'k} = (\gamma)^*_{j'k}$，又 $\mathfrak{a}^m$ ハ $\mathfrak{a}^{m-1}$ ノ延長デアル皆デアルカラ，$\mathfrak{a}^m\mathfrak{u}$ ハ

(II) $\mathfrak{a}^m\mathfrak{u} = \mathfrak{a}^{m-1}\mathfrak{u}\,\mathfrak{o}\mathfrak{l}^{m-1}\smile(\beta; \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1})^*$

デナケレバナラナイ。

ソコデ吾々ハ逆ニ，(II) ニヨッテ $\mathfrak{a}^m$ ヲ定義シ，カク定義サレタ $\mathfrak{a}^m$ ガ $\mathfrak{u}$ ノ現ハシ方ニ関セズ一意的ニ定マッテ，$L(\mathfrak{o}\mathfrak{l}^m)$ ト L_m^* ノ間ノ isomorphismus ヲ与ヘルコトヲ証明スル。コノタメニハ

スナハチ，次ノ関係 (III) ガ成立ツコトヲ言ヘバヨイ。

(III) $\mathfrak{u}, \mathfrak{w} \cong \mathfrak{o}\mathfrak{l}^{m-1}$ ナルトキ，

$$\mathfrak{u}\smile(\beta; \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \cong \mathfrak{w}\smile(\delta; \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1})$$

ナルタメノ必要且ツ充分ナ条件ハ

$$\mathfrak{a}^{m-1}\mathfrak{u}\smile(\beta; \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1})^* \cong \mathfrak{a}^{m-1}\mathfrak{w}\smile(\delta; \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1})^*$$

デアル。

然ルニ，次ノ Lemma 33 ニヨレバ，

$$\mathfrak{u}\smile(\beta; \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \cong \mathfrak{w}\smile(\delta; \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1})$$

ナルタメノ必要且ツ充分ナ条件ハ，$\mathfrak{u} \cong \mathfrak{w}$，$(\beta)_\gamma \cong (\delta)_\gamma$，且ツ $\mathfrak{o}\mathfrak{l}^{m-1}((\beta; \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1})\smile(1; \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1})) \cong \mathfrak{w}$

が成立スルコトデアル。

$\pi \leqq \lambda$ ト $\xi^{m-1}\pi \leqq \xi^{m-1}\lambda$ ハ同値デアルカラ，(III) ヲ証明スルニハ

(IV) $\alpha^{m-1}((\beta;\gamma'\cdots\gamma^{m-1})\frown(1;\eta'\cdots\eta^{m-1}))\leqq\lambda$ ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ．

$\alpha^{*m-1}(1\beta;\gamma'\cdots\gamma^{m-1})^{*}\frown(1;\eta'\cdots\eta^{m-1})^{*})\leqq\xi^{m-1}\lambda$ ナルコトヲ示セバヨイ。

然ルニ，後デ証明スル如ク

(V) $\alpha^{m-1}((\beta;\gamma'\cdots\gamma^{m-1})\frown(1;\eta'\cdots\eta^{m-1}))$

$=\alpha^{m-1}((\beta;\gamma'-\eta'\cdots\gamma^{m-1}-\eta^{m-1})\frown\alpha_m)$

が成立スル。定理ヲヨレバ，(V) ノ右辺ハ $\beta,\gamma'-\eta',\cdots\cdots\gamma^{m-1}-\eta^{m-1}$ ヲヨッテ定マル γ ノ元 $\bar{\beta}$，η^{i}，$\varepsilon^{i}=$ ヨッテ

$$(\alpha_1^{m-1}\frown((\gamma'-\eta')\bar{\beta})_1)\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_1^{m-1}\frown(-\eta^{i})_{1i})\frown\alpha_1^{m-1}\Big(\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_1^{m-1}\frown(\varepsilon^{i})_{1i})\frown\alpha_1\Big)$$

ト現ハサレル。コノ式ニ現ハレル元ハ，スベテ α^{m-1} ニ含マレル。従ッテコレハ ξ^{m-1} ヲヨッテ

$$(\alpha_1^{*m-1}\frown((\gamma'-\eta')\bar{\beta})_1^{*})\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_1^{*m-1}\frown(-\eta^{i})_{1i}^{*})$$

$$\frown\alpha_1^{*m-1}\Big(\prod_{i=2}^{m-1}(\alpha_1^{*m-1}\frown(\varepsilon^{i})_{1i}^{*})\frown\alpha_1^{*}\Big)$$

トナル。コレハ $\alpha^{*m-1}((\beta;\gamma'\cdots\gamma^{m-1})^{*}\frown(1;\eta'\cdots\eta^{m-1})^{*})$ ニ等シイ。故ニ (V) ガ成立スル。従ッテ ξ^{m} ガ必要ナ isomorphism ヲ与ヘルコトガ分ル。

コレデ我々ノ問題ハ Lemma 33 及ビ (∀) ノ証明ニ帰着シタ。

Lemma 33. $\xi, \zeta \leqq \alpha^{m-1}$ ナルトキ

$$\xi \cup (\beta; \gamma', \cdots \gamma^{m-1}) \leqq \zeta \cup (\delta; \eta', \cdots, \eta^{m-1})$$

ナルタメノ必要且充分ナル條件ハ

i) $\xi \leqq \zeta$

ii) $(\beta)_\gamma \leqq (\delta)_\gamma$

iii) $\alpha^{m-1}((\beta; \gamma', \cdots, \gamma^{m-1}) \cup (1; \eta', \cdots, \eta^{m-1})) \leqq \zeta$

証明 I. 必要ナルコト。

$\xi \cup (\beta; \gamma' \cdots \gamma^{m-1}) \leqq \zeta \cup (\delta; \eta' \cdots \eta^{m-1})$ ノ両辺ニ α^{m-1} ヲカケレバ i) ガ出ル; 両辺ニ α^{m-1} ヲカヘレバ

$$\alpha^{m-1} \cup \left(\alpha^{m-1} \cup (\beta)_m\right) \prod_{i=1}^{m-1} \left(\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{m\,i}\right)$$

$$\leqq \alpha^{m-1} \cup \left(\alpha^{m-1} \cup (\delta)_m\right) \prod_{i=1}^{m-1} \left(\alpha_i^{m-1} \cup (\eta^i)_{m\,i}\right),$$

即チ $\left(\alpha^{m-1} \cup (\beta)_m\right)\left(\alpha^{m-1} \cup \prod_{i=1}^{m-1} \left(\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{m\,i}\right)\right)$

$$\leqq \left(\alpha^{m-1} \cup (\delta)_m\right)\left(\alpha^{m-1} \cup \prod_{i=1}^{m-1} \left(\alpha_i^{m-1} \cup (\eta^i)_{m\,i}\right)\right).$$

然ルニ $\alpha^{m-1} \cup \prod_{i=1}^{m-1} \left(\alpha_i^{m-1} \cup (\gamma^i)_{m\,i}\right) = \alpha^{m-1} \cup \prod_{i=1}^{m-1} \left(\alpha_i^{m-1} \cup (\eta^i)_{m\,i}\right) = \alpha^m$

ナル故 $(\beta)_m \leqq (\delta)_m$ ガ成立シ、定理 6 ニヨッテ $(\beta)_\gamma \leqq (\delta)_\gamma$ トナル。

iii) ヲ出スニハ $\xi \cup (\beta; \gamma' \cdots \gamma^{m-1}) \cup (1; \eta' \cdots \eta^{m-1}) \leqq \zeta \cup (1; \eta' \cdots \eta^{m-1})$ ノ両辺ニ α^{m-1} ヲカケレバ

ヨイ。

II. 充分ナルコト,

$$\pi \cup (\delta;\ \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1})$$

$$\geqq \alpha^{m-1}((\beta;\ \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \cup (1;\ \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1})) \cup (\alpha^{m-1} \cup (\delta)_m)(1;\ \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1}) \cup \tilde{\pi}$$

$$= (\alpha^{m-1} \cup (\delta)_m)((\beta;\ \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \cup (1;\ \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1})) \cup \tilde{\pi}$$

$$\geqq (\alpha^{m-1} \cup (\delta)_m)(\alpha^{m-1} \cup (\beta)_m)(1;\ \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1}) \cup \tilde{\pi}$$

$$= \tilde{\pi} \cup (\beta;\ \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \qquad \text{q. e. d.}$$

次ニ $m < n$ ナル場合ノ (V) ノ式ヲ証明スル。

最初ニ，次ノ三個ノ perspectivity ヲ考ヘル。

$$(\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_i \cdots\cdots \alpha_m) \underset{\tau_{in}}{\sim} (\alpha_1, \cdots\cdots \overset{i}{\alpha_n} \cdots\cdots \alpha_{sn})$$

$$\underset{\alpha_i}{\sim} (\alpha_1, \cdots \alpha_n \cdots\cdots (\gamma)_{mi}) \underset{\tau_{in}}{\sim} (\alpha_1, \cdots\cdots \alpha_i \cdots\cdots (\gamma)_{mi})$$

コレラノ perspectivity ヲ上ノ順序デ夫々 P, Q, R ト表ハセバ, $W_i(\gamma) = PQR$ ハ $L(\alpha^m)$ ノ projective automorphism デアッテ，次ノ三ツノ性質ヲ有スル．即チ

1) $\tilde{\pi} \leqq \alpha^{m-1}$ ナラバ $\tilde{\pi} W_i(\gamma) = \tilde{\pi}$

2) $\alpha_i \leqq \tilde{\pi} \leqq \alpha^m$ ナラバ $\tilde{\pi} W_i(\gamma) = \tilde{\pi}$

3) $(\delta)_{mi} W_i(\gamma) = (\delta + \gamma)_{mi}$

証明ハ： 1) $\tilde{\pi} P = (\tilde{\pi} \cup \tau_{in})(\alpha_i^m \cup \alpha_n)$. シカルニ $(\alpha^{m-1} \cup \tau_{in})(\alpha_i^m \cup \alpha_n) = \alpha_i^{m-1} \cup \alpha_n$ 及ビ $(\alpha^{m-1} \cup \alpha_n)(\alpha_i^{m-1} \cup \alpha_n \cup (\gamma)_{mi}) = \alpha_i^{m-1} \cup \alpha_n$ デ

アルカラ，　$\tilde{\iota}PQ = \tilde{\iota}P.$

依ッテ　$\tilde{\iota}W_i(\gamma) = \tilde{\iota}PR = (\tilde{\iota} \cup \sigma_{in})\alpha^m = \tilde{\iota}$

2)　$\tilde{\iota} \cup \alpha_n \cup \alpha_i = \tilde{\iota}W_i(\gamma) \cup \alpha_n \cup \alpha_i$，

α^m ト $\tilde{\iota}W_i(\gamma)$ ニ α_i ナル故 $\tilde{\iota} \cup \alpha_n = \tilde{\iota}W_i(\gamma) \cup \alpha_n$.

コレガ両辺ニ α^m ヲカケレバヨイ。

3)　$(\delta)_{mi} W_i(\gamma)$ ヲカキ下セバ

$$(((((\delta)_{m_i} \cup \sigma_{in})(\tilde{\iota}_m \cup \alpha_n) \cup \alpha_i)(\alpha_n \cup (\gamma)_{mi}) \cup \sigma_{in})(\alpha_i \cup \alpha_m)$$

$$= (((\delta)_{mn} \cup \alpha_i)(\alpha_n \cup (\gamma)_{mi}) \cup \sigma_{in})(\alpha_i \cup \alpha_m)$$

故ニ Lemma 19 ニヨリ $(\delta)_{mi} W_i(\gamma) = (\delta + \gamma)_{mi}$ トナルコトガ分ッタ。

ソコデ　$X = W_1(-\eta') \cdot W_2(-\eta^2) \cdot \cdots\cdots \cdot W_{m-1}(-\eta^{m-1})$

トオケバ

$$\alpha^{m-1}((\beta; \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \cup (1; \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1}))$$

$$= [\alpha^{m-1}((\beta; \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1}) \cup (1; \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1}))]X$$

$$= \alpha^{m-1}X((\beta; \gamma' \cdots\cdots \gamma^{m-1})X \cup (1; \eta' \cdots\cdots \eta^{m-1})X)$$

$$= \alpha^{m-1}((\beta; \gamma' - \eta', \cdots\cdots, \gamma^{m-1} - \eta^{m-1}) \cup \alpha_m)$$

コレデ $m < n$ ナル場合ノ (V) ノ証明ハ終ッタガ、一般ノ場合デ (V) ヲ証明スルニハ、尚ニ三ノ Lemma ヲ必要トスル。

Lemma 34.　$m_1^*, m_2^* \in R\gamma_n$ トスルトキ

$m_1^* \cup (\gamma)_{ij}^* = m_2^* \cup (\gamma)_{ij}^*$ ガ凡ベテノ $\gamma \in \Gamma$ 及ビ $1 \leqq i, j \leqq n$ ニツイテ成立スレバ

$$m_1^* = m_2^*$$

証明 I. Lemma 5 ニヨッテ, m_i^* ハ

$$A_i=\begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(i)} & & & O \\ \gamma_{21}^{(i)} & \varepsilon_2^{(i)} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \gamma_{n1}^{(i)} & \cdots\cdots & \gamma_{n,n-1}^{(i)} & \varepsilon_n^{(i)} \end{pmatrix} \quad \text{ニヨッテ } m_i^*=(A_i)_r \text{ト}$$

カケレル. $(i=1,2)$

但シ $\gamma_{jk}^{(i)}\varepsilon_k^{(i)}=\gamma_{jk}^{(i)}$, $\varepsilon_j^{(i)}\gamma_{jk}^{(i)}=0$, $(\varepsilon_j^{(i)})^2=\varepsilon_j^{(i)}$

デアル。

コノトキ $(n-1)$ 次ノ Matrix C_i, D_i $(i=1,2)$ ヲ

$$C_i=\begin{pmatrix} 1 & & & O \\ \gamma_{21}^{(i)} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \gamma_{n-1,1}^{(i)} & \cdots & \gamma_{n-1,n-2}^{(i)} & 1 \end{pmatrix}, \quad D_i=\begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(i)} & & & \\ & \ddots & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & \varepsilon_{n-1}^{(i)} \end{pmatrix}$$

トオケバ $\alpha^{n-1}(m_i^* \cup \alpha_n)=(C_iD_i)_r$ トナル。従ッテ

$(C_1D_1)_r=(C_2D_2)_r$ 即チ, $C_1D_1X_1=C_2D_2$,

$C_2D_2X_2=C_1D_1$ トカクコトガ出来ル。

シカルニ $\overline{C}_i=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\gamma_{21}^{(i)} & 1 & & O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -\gamma_{n-1,1}^{(i)} & \cdots & -\gamma_{n-1,n-2}^{(i)} & 1 \end{pmatrix}$ トスレバ,

$\overline{C}_iC_i=C_i\overline{C}_i=1$ デアルカラ, $D_1=D_1X_1X_2$,

$D_2=D_2X_2X_1$ トナル。ソコデ

$P=\begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_n^{(2)} \end{pmatrix}$ 及ビ $Q=\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_n^{(1)} \end{pmatrix}$ ニヨッテ P,Q ヲキメ

レバ $A_2P=\begin{pmatrix} C_1D_1 & 0 \\ B^{(2)} & \varepsilon_n^{(2)} \end{pmatrix}$ トナリ、更ニ $A_2PQ=A_2$, 従ッテ $m_2^*=(A_2)_r=(A_2P)_r$ ガ成立スル。ソレ故

$A_i=\begin{pmatrix} C_1D_1 & 0 \\ B^{(i)} & \varepsilon_n^{(i)} \end{pmatrix}$, $B^{(i)}=(\beta_1^{(i)},\cdots\cdots,\beta_{n-1}^{(i)})$ トカク コトガ出来ル。便宜上 $1\leqq j\leqq n-1$ ナルトキ $\varepsilon_j^{(i)}=\varepsilon_j$ トカケバ $\beta_j^{(i)}\varepsilon_j=\beta_j^{(i)}$, $e_n^{(i)}\beta_j^{(i)}=0$ トナル。

又 $r_{ik}^{(i)}=r_{ik}$ ($1\leqq i\leqq n-2$, $1\leqq k\leqq n-2$) トカク コトニスル。

次ニ $m_i^*\cup(r)_{kn}^*$ ヲ vector set $\overline{V}_i$ デアラハセバ、$\overline{V}_i$ ハ $\overline{V}_i=\sum_{l=1}^{n}E_l\overline{\alpha}_l^{(i)}$ トシテ、次ノ様ニカキアラハサレル。

$$\overline{\alpha}_l^{(i)}=\sum_{j=1}^{l-1}r_{lj}\xi_j+\varepsilon_l\xi_l\ ;\quad l\neq k,\ l\neq n$$

$$\overline{\alpha}_k^{(i)}=\sum_{j=1}^{k-1}r_{kj}\xi_j+\varepsilon_k\xi_k+\xi$$

$$\overline{\alpha}_n^{(i)}=\sum_{j=1}^{n-1}\beta_j^{(i)}\xi_j+\varepsilon_n^{(i)}\xi_n-r\xi$$

今 $\vartheta_k=\sum_{l=k+1}^{n-1}(1-\varepsilon_l)_l\cup o_n$ トシテ、$(m_i^*\cup(r)_{kn}^*)\vartheta_k$ ヲ vector set $V_i=\sum_{l=1}^{n}E_l\alpha_l^{(i)}$ デアラハシテミレバ

$$\alpha_j^{(i)}=0,\quad 1\leqq j\leqq k$$

$$\alpha_j^{(i)} = \gamma_{jk}\xi_k, \quad k+1 \leqq j \leqq n-1$$
$$\alpha_n^{(i)} = (\beta_k^{(i)} + \gamma\varepsilon_k)\xi + \varepsilon_n^{(i)}\eta$$

コノトキ仮定ニヨッテ $(\beta_k^{(1)} + \gamma\varepsilon_k, \varepsilon_n^{(1)}) = (\beta_k^{(2)} + \gamma\varepsilon_k, \varepsilon_n^{(2)})$ デアルカラ，$\gamma = -\beta_k^{(i)}$ $(i=1,2)$ トオケバ命ルセツ $(\varepsilon_n^{(1)})_\gamma = (\varepsilon_n^{(2)})_\gamma$ トナッテ之ヲ $(\varepsilon_n)_\gamma$ トカケバ $\beta_k^{(2)} - \beta_k^{(1)} = \varepsilon_n \delta_k$ トナル。

故ニ $\left(\sum_{k=1}^{m-1} \beta_k^{(1)}\xi_k + \varrho_n^{(1)}\xi\right)$ ノ全体ト $\left(\sum_{k=1}^{m-1} \beta_k^{(2)}\xi_k + \varrho_n^{(2)}\xi\right)$ ノ全体トガ一致スル。即チ $m_1^* = m_2^*$

定義 16.

$$\begin{pmatrix} \beta; & \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{m-1} \\ j_m & j_1, \cdots\cdots j_{m-1} \end{pmatrix} = (\beta; \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{m-1}) P \begin{pmatrix} m, & 1, \cdots\cdots, m-1 \\ j_m, & j_1, \cdots\cdots, j_{m-1} \end{pmatrix}$$

Lemma 35. $\mathfrak{o}\mathfrak{l}^{k-2} \cup \mathfrak{o}_k \widetilde{\mathfrak{o}_{k-1}} \mathfrak{o}\mathfrak{l}^{k-2} \cup (\gamma)_{k,k-1}$

ナル perspective ニヨッテ

$$\begin{pmatrix} \beta; & \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{k-2} \\ k & 1 \cdots\cdots k-2 \end{pmatrix} \widetilde{\mathfrak{o}_{k-1}} \left(\beta; \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{k-2}\ \gamma\right)$$

証明
$$\left(\begin{pmatrix} \beta; & \gamma^1 \cdots\cdots \gamma^{k-2} \\ k & 1 \cdots\cdots k-2 \end{pmatrix} \cup \mathfrak{o}_{k-1}\right)\left(\mathfrak{o}\mathfrak{l}^{k-2} \cup (\gamma)_{k,k-1}\right)$$

$$= \left(\left(\mathfrak{o}\mathfrak{l}^{k-2} \cup (\beta)_k\right) \prod_{j=1}^{k-2} \left(\mathfrak{o}\mathfrak{l}_j^{k-2} \cup (\gamma^j)_{kj}\right) \cup \mathfrak{o}_{k-1}\right)\left(\mathfrak{o}\mathfrak{l}^{k-2} \cup (\gamma)_{k,k-1}\right)$$

$$= \left(\mathfrak{o}\mathfrak{l}^{k-1} \cup (\beta)_k\right) \prod_{j=1}^{k-2} \left(\mathfrak{o}\mathfrak{l}_j^{k-1} \cup (\gamma^j)_{kj}\right) \cdot \left(\mathfrak{o}\mathfrak{l}^{k-2} \cup (\gamma)_{k,k-1}\right)$$

$$= (\beta; \gamma^1, \cdots\cdots, \gamma^{k-2}, \gamma)$$

Lemma 36. $\begin{pmatrix} 1; & r^i+rr^k \\ i, & j \end{pmatrix} \cup (r)_{kj} = \begin{pmatrix} 1; & r^i & r^k \\ i & j & k \end{pmatrix} \cup (r)_{kj}$

証明: $\begin{pmatrix} 1; & r^i & r^k \\ i & j & k \end{pmatrix} = \left((r^i)_{ij} \cup \alpha_k\right)\left((r^k)_{ik} \cup \alpha_j\right)$ 及び Lemma 19 ニヨツテ。

$$(\alpha_i, (r^k)_{ik}, \alpha^k) \widetilde{\pi_j} \left((r^i)_{ij}, \begin{pmatrix} 1; & r^i, & r^k \\ i, & j & k \end{pmatrix}, \alpha_k\right)$$

$$\widetilde{\alpha_j}\left(\left(r^i+rr^k\right)_{ij}, \begin{pmatrix} 1; & r^i, & r^k \\ 1 & j & k \end{pmatrix}, (r)_{kj}\right)$$

トナルコトガ分ル。シカルニ

$$\left(r^i+rr^k\right)_{ij} - \begin{pmatrix} 1; & r^i+rr^k \\ i & j \end{pmatrix}$$

ヅアルカラ $\begin{pmatrix} 1; & r^i+rr^k \\ i & j \end{pmatrix} \cup (r)_{kj} = \begin{pmatrix} 1; & r^i & r^k \\ i & j & k \end{pmatrix} \cup (r)_{kj}$

Lemma 37. $j<k<k$ トスルトキ

$(1; r^1 \cdots, r^i+rr^k, \cdots \overset{k}{\vee} \cdots r^{k-1}) \cup (r)_{kj}$

$= (1; r^1 \cdots r^i \cdots r^k \cdots r^{k-1}) \cup (r)_{kj}$ 但シ上式ノ左辺ハ $\left(\alpha_j^{k-1} \cup (r^i+rr^k)_{kj}\right) \prod_{\substack{i=1 \\ i<k \\ i<j}}^{k-1} \left(\alpha_i^{k-1} \cup (r^i)_{ki}\right)$ ヲ表ハス。

証明ハ k = 関スル帰納法ニヨル。

$k-2$ ノ場合ハ Lemma 36 ヂアル。$k-1$ ノトキ証明サレタト仮定スル。即チ,

$(1; r^1 \cdots r^i+rr^k \cdots \overset{k}{\vee} \cdots r^{k-2}) \cup (r)_{kj}$

$= (1; r^1 \cdots r^i \cdots r^k \cdots r^{k-2}) \cup (r)_{kj}$

之レヲ $\alpha^{k-2} \cup \alpha_k \widetilde{\alpha_{k-1}}\ \alpha^{k-2} \cup (\gamma^{k-1})_{k,k-1}$ ニヨッテ
移セバ

Lemma 35 ニヨッテ

$$(1;\gamma^1 \cdots \gamma^j + \gamma\gamma^k \cdots \overset{k}{\vee} \cdots \gamma^{k-2}\gamma^{k-1}) \cup (\gamma)_{kj}$$
$$= (1;\gamma^1 \cdots \gamma^j \cdots \gamma^k \cdots \gamma^{k-2}\gamma^{k-1}) \cup (\gamma)_{kj}$$ トナル。

最後ニ $m = n$ ナル場合ノ $(\nabla)_n$ 式：

$$(\nabla_n)\quad \alpha^{n-1}((\beta;\gamma^1 \cdots \gamma^{n-1}) \cup (1;\eta^1 \cdots \eta^{n-1}))$$
$$= \alpha^{n-1}((\beta;\gamma^1-\eta^1, \cdots \gamma^{n-1}-\eta^{n-1}) \cup \alpha_n)$$

ノ証明ヲ述ベル。(∇_n) ノ両辺ハ α^{n-1} ニ含コレテヰル。
然ルニ m ク n ナル m ニ関シテハ既ニ (∇) ガ証明サレ，従ッテ $L(\alpha^n) \cong R\gamma_m$，特ニ $L(\alpha^{n-1}) \cong R\gamma_{n-1}$ ナルコトガ分ッテヰルカラ，(∇_n) ヲ証明スルタメニハ Lemma 34 ヲ利用スルコトガ出来ル：$k, j \leqq n-1$ ニツイテ，

$$\alpha^{n-1}((\beta;\gamma^1 \cdots \gamma^{n-1}) \cup (1;\eta^1 \cdots \eta^{n-1})) \cup (\gamma)_{kj}$$
$$= \alpha^{n-1}((\alpha^{n-1} \cup (\beta)_n)(1;\gamma^1 \cdots \gamma^{n-1}j) \cup (1;\eta^1 \cdots \eta^{n-1}) \cup (\gamma)_{kj})$$
$$= \alpha^{n-1}((\alpha^{n-1} \cup (\beta)_n)((1;\gamma^1 \cdots \gamma^{n-1}) \cup (\gamma)_{kj}) \cup (1;\eta^1 \cdots \eta^{n-1}) \cup (\gamma)_{kj})$$

コンデ Lemma ニヲヲ利用スレバ

$$= \alpha^{n-1}((\alpha^{n-1} \cup (\beta)_n)((1;\gamma^1 \cdots \gamma^j + \gamma\gamma^k \cdots \overset{k}{\vee} \cdots \gamma^{n-1}) \cup (\gamma)_{kj})$$
$$\cup (1;\eta^1 \cdots \eta^j + \gamma\eta^k \cdots \overset{k}{\vee} \cdots \eta^{n-1}) \cup (\gamma)_{kj})$$
$$= \alpha^{n-1}((\beta;\gamma^1 \cdots \gamma^j + \gamma\gamma^k \cdots \overset{k}{\vee} \cdots \gamma^{n-1})$$
$$\cup (1;\eta^1 \cdots \eta^j + \gamma\eta^k \cdots \overset{k}{\vee} \cdots \eta^{n-1}) \cup (\gamma)_{kj})$$

コンデ k ナル Index ノ所ガ抜ケテヰル。

従ッテ

$$= \alpha_{ik}^{n-1}(\beta;\ r^1 \cdots r^j + r r^k \cdots \overset{k}{\vee} \cdots r^{n-1}) \cup (1;\ \eta^1 \cdots \eta^j + r\eta^k \cdots \overset{k}{\vee} \cdots \eta^{n-1})) \cup (r)_{kj}$$

コノ第一項ヘ $m = n-1$ ナル場合ノ $(\vee)$ ノ左辺デアルカラ，

$$= \alpha_{ik}^{n-1}((\beta;\ r^1 - \eta^1, \cdots (r^j - \eta^j) + r(r^k - \eta^k), \cdots \overset{k}{\vee} \cdots r^{n-1} - \eta^{n-1}) \cup \alpha_n) \cup (r)_{kj}$$

$$= \alpha^{n-1}((\beta;\ r^1 - \eta^1, \cdots (r^j - \eta^j) + r(r^k - \eta^k) \cdots \overset{k}{\vee} \cdots r^{n-1} - \eta^{n-1}) \cup (r)_{kj} \cup \alpha_n)$$

$$= \alpha^{n-1}(\beta;\ r^1 - \eta^1 \cdots r^j - \eta^j \cdots r^k - \eta^k \cdots r^{n-1} - \eta^{n-1}) \cup \alpha_n)$$

コレデ (V_n) ガ証明サレタ。

コレデ次ノ「Hauptsatz」ノ証明ガ終ッタ。

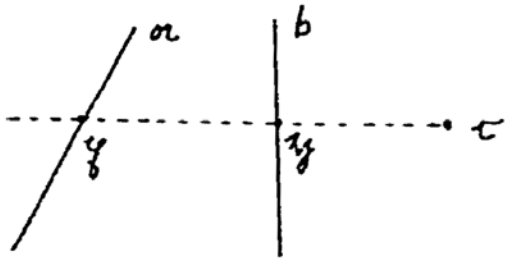
Hauptsatz:

Lヲ order $n \geqq 4$ ナル complemented modular lattice トスル。Lノ normalized frame ヲ定メ，ソノ L-number ノ作ル ring ヲ γ トスレバ L ト R_{γ_n} トハ lattice isomorph トナル。

注意 Lガ射影空間ナル場合ヲ籍リテ式ノ意味ヲ説明スル。

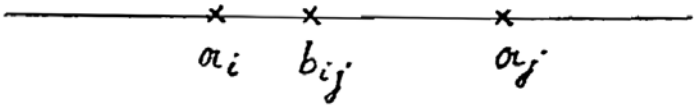
1) α, b, etc. ハ点，直線，平面等ヲ現ハシ，αb ハ α ト b ノ交ハリ，$\alpha \cup b$ ハ α ト b ヲヨッテ定メラレル〝平面〟ヲ現ハス。

2) α, b ヲ直線，y, z, t ヲ点トシテ圖ヲ書ケバ

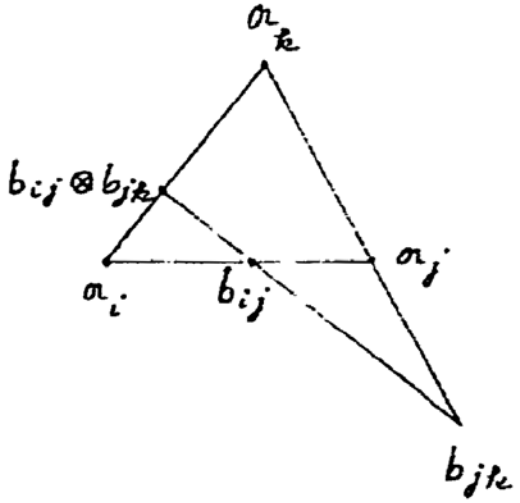


3) L が $n-1$ 次元射影空間ナルトキ，L ハ n 個ノ独立ナ点 $a_1, \cdots\cdots a_n$ ヲ含ム．$(a_1 \cdots a_n)$ ガ L ノ homogeneous Basis デアル。従ッテ order $= n$．a_i ハ必ズシモ点デアル必要ハナイ。従ッテ order モ一意的ニハ定マラナイ。例ヘバ $a_1 = L$ 自身 homogeneous Basis デアッテ，コノトキ order $= 1$．

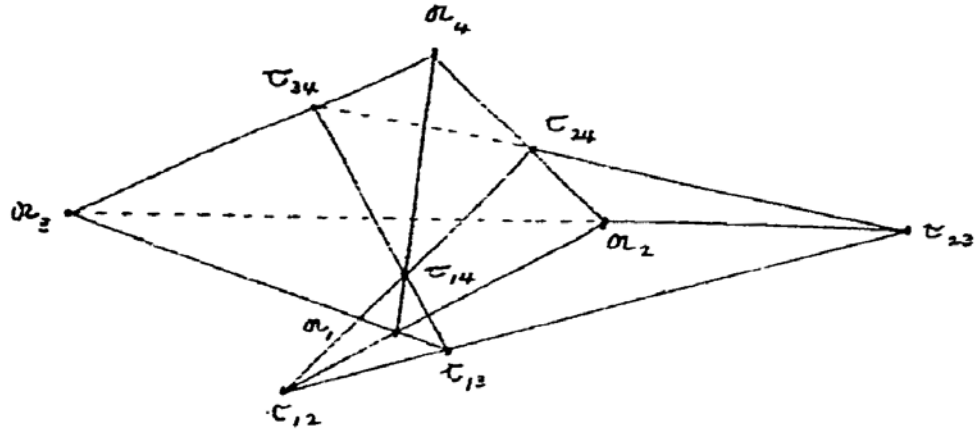
4) $b_{ij} \in L_{ij}$ $(i \neq j)$ ハ直線 $a_i \cup a_j$ 上ニアッテ $\neq a_j$ ナル点ガアル。



5) $b_{ij} \otimes b_{jk}$ ノ意味ハ次ノ図ノ通リ．

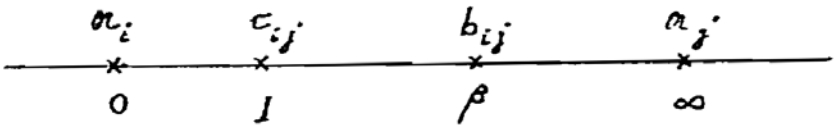


6) normalized frame ノ図．$n = 4$



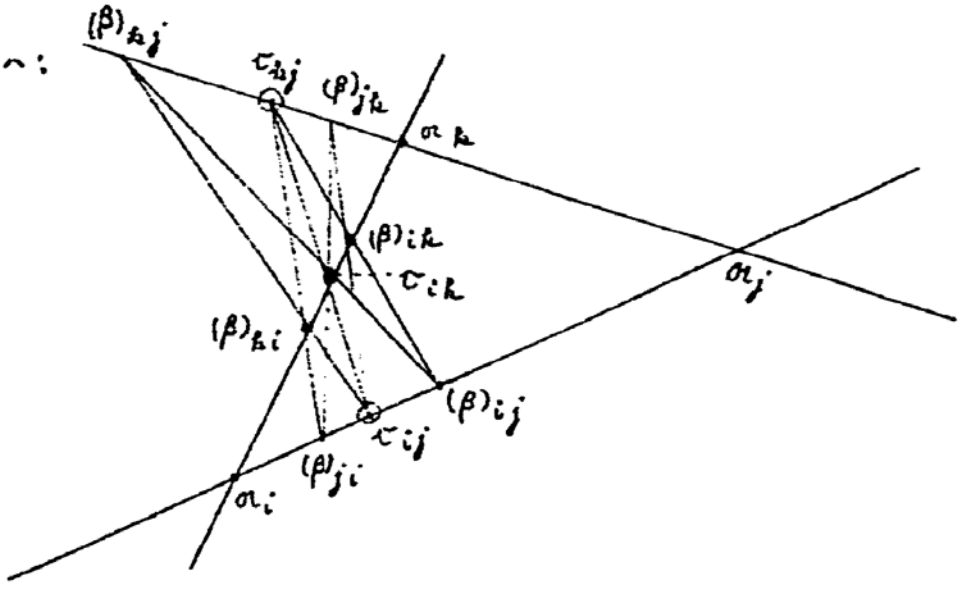
1) 射影幾何デハ直線上ノ点 $b_{ij} = (\beta)_{ij}$ ノ座標 β ヲ複比

$$\beta = \frac{\overrightarrow{a_i\, b_{ij}}}{\overrightarrow{a_j\, b_{ij}}} : \frac{\overrightarrow{a_i\, c_{ij}}}{\overrightarrow{a_j\, c_{ij}}}$$

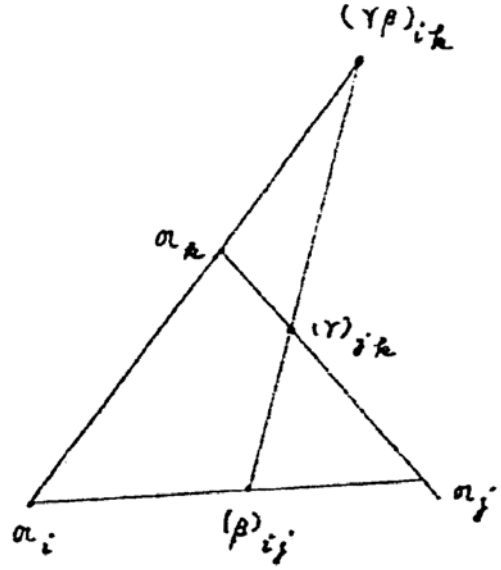


デ定義シタ。一般ノ L = オイテハ b_{ij} 自身が implicit ニ座標 β ヲ現ハスモノト考ヘテ $(\beta)_{ij} = b_{ij}$ ニヨッテ β ヲ定義シタノデアル。コノ際，$b_{ij}\, a_j = 0$ ハスナハチ $\beta + \infty$ ヲ意味スル。

$(\beta)_{ij}$ ノ関係ヘ：

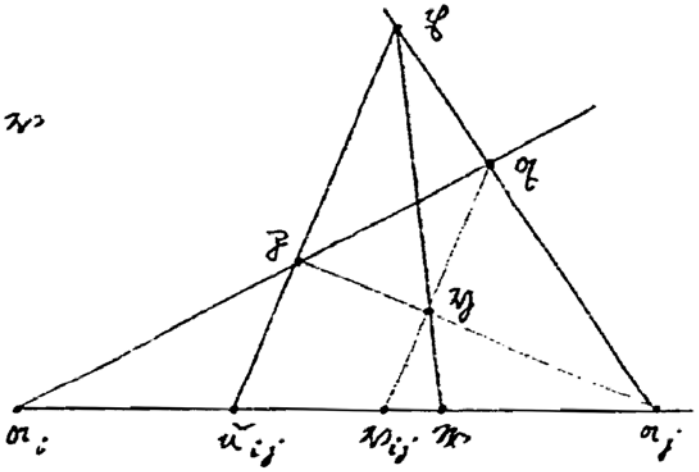


8) 積ノ圖



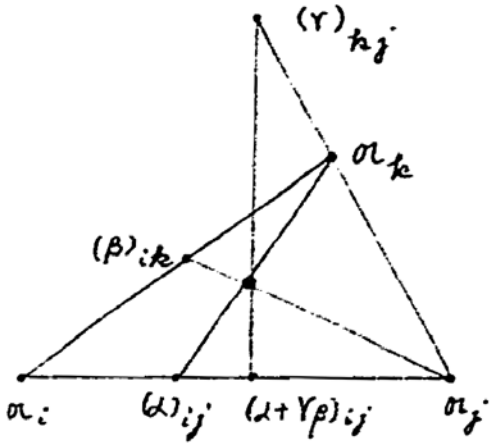
$(\gamma\beta)$ トレ $(\beta\gamma)$ トヤヌ理由ハ説明ン要イ。

9) $m=u$ 田ヲ求ム



10) コノ証明ガ射影幾何ノ場合ト同様ナルコトハ圖ヲ書イテ見レバスグ分ル。

11) Lemma 19 ノ式ヲ圖示スレバ

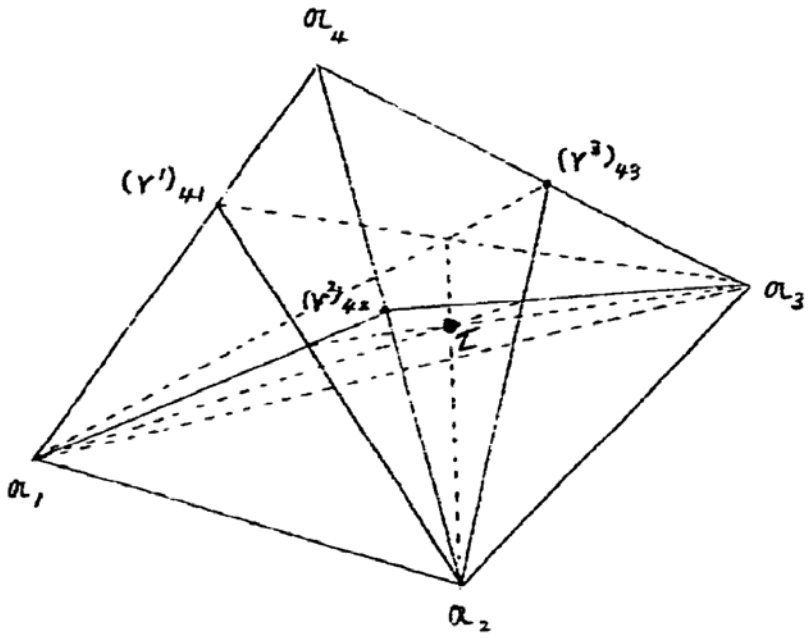


12) コノ§ノ目標ハ定理7ノ証明ニアル。

13) $\mathcal{C}=(1;\gamma^1\ \gamma^2\ \gamma^3)$ ハ $(\gamma^1)_{41}\vee\alpha_2\vee\alpha_3$,

$(\gamma^2)_{42}\vee\alpha_3\vee\alpha_1$, $(\gamma^3)_{43}\vee\alpha_1\vee\alpha_2$

ナル三平面ノ交点デアル。



14) コノ定理ハ $\alpha^{m-1}(\alpha_m\vee(\beta;\gamma^1\cdots\gamma^{m-1}))$ ガ α^{m-1} 内ノ"言葉"デ現ハサレルコトヲ示ス。コノ事ガ次ノ§5デ必要トナル。