



Title	Doeblin ノ結果ノ積分方程式的取扱ヒ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 169, p. 656-666
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74676
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

746. Doeblin, 結果, 積分方程式の取扱上

吉田 耕作 (阪大)

W. Doeblin, 論文 Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types

de chaîne simple (Bult. math. Soc. Roumaine de Sc. 39 (1937)) / 主+結果ヲ角谷氏が談話 728, 739, 743 = 於テワカリ易ク補ヒ+カラ紹介サレタ。相當精シイ結果デアリ且ツソノ集合論的論法ハ面白イケレドモ、次ノ如ク積分方程式流ノ取扱ヒヲスルト *spectre* トノ關係ニツクシ談話 679, §6 / 定理⁽¹⁾ノ應用ニモナルノガ之ヲ述ベテミヨウ。尚本談話ニ色々御助力ヲ受ケタ角谷氏ニ厚ク感謝致シマス。

§1. 豫備

$P(x, E)$ ハ x ($0 \leq x \leq 1$) ヲ fix スレバ $(0, 1)$ 内ノ Borel 集合ニ関シテ total-additive non negative 且ツ $P(x, \Omega) \equiv 1$, $\Omega = (0, 1)$. 又 E ヲ fix スレバ $x =$ 関シテ Borel measurable トスル。今

$$(1) \quad \begin{cases} 0 < \eta, b < 1 \text{ が存在シテ } x = \text{関シテ一様} = \\ \text{mes}(E) < \eta \text{ トラバ } P(x, E) < 1 - b \end{cases}^{(2)}$$

が満足サレタリトスレバ⁽³⁾

$$P(x, E) = \int_E f(x, y) dy + R(x, E); \quad 0 \leq f(x, y) \leq \frac{1}{\eta},$$

$$0 \leq R(x, E) \leq 1 - b.$$

(1) 角谷氏談話 680 / 定理 6 = 別証明ヲ與ヘラレタ。

(2) Doehlin / 條件。

(3) 角谷氏談話 738, P. 572.

ヨツテコノ積分 operator = ヨツテ $(\mathcal{M})^{(1)}$ ヲ $(\mathcal{M})$ 内 =
寫入線型 operator

$$P = Q + R, \psi = P \cdot \varphi, \psi(E) = \int_0^1 \varphi(dx) P(x, E)$$

ハ $\|P\| = 1, \|Q\| \leq 1, \|R\| < 1$ - トヲ満足スル。 Q が
vollstetig ナラ談話 679ノ 定理 が使ヘテ Dooblinノ
結果が積分方程式流ニ扱ヘルコトガワカヤス。然シ有界可測
ナ核ニヨル積分 operator ノ空間 (L) ナハ一般ニハ vollstetig
ニナラヌ⁽²⁾ カラ Q ハ vollstetig = ハナラナ⁽³⁾ 所カ 定理
ヲ使フニハ $\|P^n - V\| < 1$ ナル如キ n ト vollstetig ナ V
カアレバヨイノダカラ、上ノ Q ヲ今少シ調べタラ望ミガアル
カモ知レヌト思ツテ考ヘテマス。ソウシタラ談話 744ノ 定理
ヲ得タ⁽⁴⁾。之レヲ使ヘバ $P =$ 定理 ノアテハマルコトガワカ
ル。即チ

(1) $(0, 1)$ ノ Borel 集合デ total additive ナ集合函数 $\varphi(E)$ ノ
作ル Banach 空間: $\text{norm} \|\varphi\| = \varphi$ ノ total variation

(2) 嘗テ筆者ノ疑問ニ林シ角谷氏カ例ヲ作ツテ下サツタ。談
話 744ニアゲテアル。

(3) 併シ schwach vollstetig = ハナル。角谷氏談話

(4) 筆者ノ証明ハ Kolmogoroff - Rieszノ定理ノ他ニ Egoroff
ノ定理ヲ採用シ甚ダ拙イモノデアツタ。

談話 744ニノキタ証明並ニ注意ハニ村氏ニヨル。尚末号
ノ談話参照。

Lemma 1. $\|P^n - \nabla\| < 1$ となる n が存在する ($\|P\| = 1$ だが従って 定理 が $P = \nabla$ に対しては成り立たない)。

証明:
$$P^n = Q^n + Q^{n-1}R + Q^{n-2}RQ + \dots + RQR^{n-2} + QR^{n-1} + R^n.$$

$RQ^{n-3}RQ$ などの Q を factor として少くとも二つの term は *vollstetig*. 何者, $Q^{n-3}R, Q$ は夫々有界可測 + 核 = ヨル積分 operator だが $\gamma(x, y), \delta(x, y)$ は夫々有界可測とすれば (R は *stetig*)

$$\mathcal{P} \rightarrow \Phi, \quad \Phi(E) = \int_E \mathcal{P}(dx) \int_E dz \int_0^1 dy \gamma(x, y) \delta(y, z)$$

が *vollstetig* かつコンパクト。この Φ は L 上の絶対連続だが Φ の微分が (L) の norm の意味で compact ではない。⁽¹⁾ この compact の証明は 定理 と同様にして得られる。

Q を高々二つの factor として合った term の数 $n+1$ 個, 且つ各々の $\text{norm} \leq (1-b)^{n-1}$ だが, n を充分大きくすれば $(n+1)(1-b)^{n-1} < 1$ となり Lemma を

- (1) $Q^{n-3}RQ = Q^{n-3}(RQ)$ と分解して 定理 が使へると思つた。しかし角谷氏が $(Q^{n-3}R) \cdot Q$ と分解すればよいと考えた。trivial だが汗顔に至る。尚有界可測 + 核が *schwach vollstetig* かつコンパクトは 定理 に注意の様にして証明出来る。このとき Φ は分解するに要りません。

得ル。

Lemma 2. P^n , 絶対値 1, 固有値 λ , $\lambda^m = 1$ (m は正整数 $\leq \frac{1}{\eta}$) を満足スル。 P^k ($k \geq n$) = ツイテモ同様。

証明⁽¹⁾。

$$\varphi(E) = \lambda \int_0^1 \varphi(dx) P^{(n)}(x, E), \quad |\lambda| = 1, \quad \|\varphi\| = 1$$

トスル。 P^n が 定理 の条件満足スルヲテ, P^n の固有値 λ = 属スル固有空間へ, projection operator P_λ を定義スル $P_\lambda(x, E)$ が存在スル。即チ

$$\varphi(E) = \int_0^1 \varphi(dx) P_\lambda(x, E),$$

$$\lambda P_\lambda(x, E) = \int_0^1 P^{(n)}(x, dy) P_\lambda(y, E) = \int_0^1 P_\lambda(x, dy) P^{(n)}(y, E),$$

$$P_\lambda(x, E) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{P^{(ni)}(x, E)}{\lambda^i} \quad (\text{一様収斂}).$$

故 = 任意, $g(y) \in (M) = \text{對シ } (M) = \text{属スル}$

$$h(x) = \int_0^1 P_\lambda(x, dy) g(y)$$

ハ固有値方程式

$$(*) \quad h(x) = \lambda \int_0^1 P^{(n)}(x, dz) h(z)$$

(1) P^n / 共轭 operator / 具体的ナ形がワカラヌカラ, Mazur

定理 / 拡張 (談話 796) を使テ 証明ハスゲ出来ナド 然レユコ

ヲ, idea ハ 談話 736 = オルト同ジデス。

ヲ満足スルコトガワカル。 $\|P\|=1$ タカラ P_λ ハ zero operator
 デナイ。従ッテ q ノ適當 = トルト $k \neq 0$ 。ソウスレバ
 $\lambda^m = 1$ (m 有界) ノコトハ Frechet ノ論法デワカル。⁽¹⁾

Lemma 3. P^k ノ固有値 1, multiplicity ハ k = 對
 シテ一様有界デアアル。

証明: 全マテ, k = 對シ $P^{(k)}(x, E)$ ハ同じ k, q デ
 de laublin ノ條件ヲ充スコト明カガカラ, 談話 724, §12
 系ト同じコトマルトヨイ。アソコデ使ツタノハ, 今ノ case
 デ云フト

$$P(E) = \int_0^1 P(d\cdot) P^{(n)}(x, E)$$

ナラ q ノ total variation on E : $\tilde{q}(E)$ ガス

$$\tilde{P}(E) = \int_0^1 \tilde{q}(dx) P^{(n)}(x, E)$$

ヲ満足スルト云フコトデアツタカラ。⁽²⁾ — 以上 —

故 = Lemma 1, Lemma 2, Lemma 3 カラ 充合ルヲ
 大キクトルト P^n ハ 定理 ノ條件ヲ満足シ且ツ P^n ハ 1/以外
 = 絶對值 1 ノ固有値ヲモタヌ。ヨツテ 定理 カラ

(1) 談話 736, p.594 ヲミラレタイ。尚コノ Lemma ノ証明 = ハ

定理 ヲ使ハズトモ mean ergodic theorem ノ間ニ合フコトハ
 注意スル迄モナイ。

(2) Kryloff - Bogoljuboff ノ論法 (談話 678, §3, 訂正談話 679
 参照)

$$(2) \begin{cases} P^n = P + S, P, S = SP, = 0, P^2 = P, = P^n P, = P, P^n \\ \|S^m\| \leq \frac{C}{(1+\delta)^m} (C, \delta > 0), P_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (P^n + P^{2n} + \dots + P^{nm})^{(1)} \end{cases}$$

⇔ P_1 は定義される non-negative + $P_1(x, E) \wedge$

$$(3) P_1(x, E) = \int_0^1 P_1(x, dy) P^{(n)}(y, E), \quad P_1(x, \Omega) = 1$$

が満足される。 所以尚

Lemma 3 の証明と同様にして (Kryloff-Bogoliouboff の論法) $\varphi_1(E), \varphi_2(E), \dots, \varphi_k(E)$ が存在して

$$(4) \begin{cases} \varphi_i \geq 0, \varphi_i(E) \varphi_j(E) = 0, \varphi_i(\Omega) = 1. \\ \varphi_i(E) = \int_0^1 \varphi_i(dx) P^{(n)}(x, E). \\ \text{且 } \varphi \geq 0, \varphi(\Omega) = 1, \varphi(E) = \int_0^1 \varphi(dx) P^{(n)}(x, E) \\ \text{+ 凡如き任意, } \varphi \wedge \varphi(E) = \sum_{i=1}^k C_i \varphi_i(E), C_i \text{ 常数} \\ \geq 0, \sum C_i = 1 \text{ と表わされる。} \end{cases}$$

§ 2. Doeblin の結果の導き方

$$(3), (4) \Rightarrow \exists 1)$$

$$(5) P_1(x, E) = \sum_{i=1}^k C_i(x) P_i(E), C_i(x) \geq 0 \text{ 且 } \sum_{i=1}^k C_i(x) = 1.$$

$\varphi \geq 0, \varphi(\Omega) = 1$ かつ $\psi = P \cdot \varphi$ かつ $\psi \geq 0, \psi(\Omega) = 1$ が満す。 $P^n(P \varphi_i) = P(P^n \varphi_i) = P \varphi_i$ 故に (4) $\Rightarrow \exists 1)$

(1) uniform limit

$$(6) \quad P g_i = \sum_{j=1}^k C_{ij} g_j, \quad C_{ij} \geq 0 \quad \text{且} \quad \sum_{j=1}^k C_{ij} = 1 \\ (i=1, 2, \dots, k)$$

$g_i = g_i = \exists$ 行列 $C = \|C_{ij}\|$ は $C^n = \text{unit matrix}$.
 コノコトカラ C は k コノ文字 $1, 2, \dots, k$, permutation

ヲ表ハスコトガワカル。何者、 $C^{n-1} \| C_{ij}^{(n-1)} \|$ ト置クト

$$C_{ij}^{(n-1)} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^k C_{ij}^{(n-1)} = 1 \quad \text{ナカラ} \quad C^{n-1} \cdot C = \text{unit}$$

matrix ナル掛ケ算ヲ實際者キ下シテミルトワカル。(1)

故 = $g_1, g_2, \dots, g_k$ ハ P ヲ施スト cyclic = permutation サレル幾ツカノ組 = ワカレル。之等ノ組ヲ第1組, 第2組, $\dots$, 第 λ 組ト名付ケ且ツ第 i 組 = 入ッテル g ノ個數ヲ d_i トスル: $\sum_{i=1}^{\lambda} d_i = k$.

P_i ハ total additive non negative n 次 Radon-Nikodym ノ定理(2) = $\exists$ $g_i(E) = \int_E f_i(x) dx + g_i(H_i \cdot E)$ ($f_i \geq 0$, H_i ハ measure zero ノ集合)。ヨツテ $f_i(x) > 0$ ナル如キ x ノ集合 = H_i 付ケ加ヘクモノヲ E_i トスレバ (4) = $\exists$ E_i ハ互 = disjoint 且 $g_i(E_i) = 1$ 又 $g_i(E) > 0$ if $E \subset E_i$, $mes(E) > 0$.

$$(6) \quad G_\alpha = \sum E_i \quad (g_i \text{ 第 } i \text{ 組} = \text{入ッテル様} + i = \text{付イテノ和})$$

(1) 之ハ角谷氏 = 考ヘテ頂イタ。極メテ面白コトデス。

(2) Sakai: Theory of integrals, p.

ト置ケバ, Doeblin / 結果 (角谷氏談話 728) = 於ケル

G_α ($\alpha=1, 2, \dots, d$) が final set ヲ悉シ且 d_α
ハ $G_\alpha = \text{attach}$ サレタ数デアル。

証明. 以下ノ事実ヲ証明スル。

i) $x \in \Omega = \text{對シテ一様} =$

$$P^{(t)}(x, \Omega - \sum G_\alpha) \leq M \tau^t \quad (t=1, 2, \dots)$$

ナル如キ常数 $M > 0$, $1 > \tau > 0$ が存在スル。

ii) 殆ド全テノ $x \in G_\alpha = \text{對シテ}$ $P(x, G_\alpha) = 1$

iii) $G'_\alpha \subset G_\alpha$ 且 $\text{mes}(G_\alpha - G'_\alpha) = 0$ ナル如キ G'_α が
存在シテ $E \subset G_\alpha$, $\text{mes}(E) > 0$ ナラバ, $P^{(m)}(x, E) > 0$
for $x \in G'_\alpha$ ナル如キ $m = m(x, E)$ が定ル。

iv) $E_i \subset G_\alpha$ ナラバ, $x \in (G'_\alpha \cdot E_i)$ 及ビ $E \subset E_i$
= 對シテ一様 = $|P^{(m d_\alpha)}(x, E) - \mathcal{P}_i(E)| \leq N \tau^m$ ($m=1, 2, \dots$)
ナル如キ常数 $N > 0$, $1 > \tau > 0$ が定ル。

i) ノ証明. E_i , 定義ト (2), (5) カラ

$$\begin{aligned} P^{(n d)}(x, \Omega - \sum G_\alpha) &= P^{(n d)}(x, \Omega - \sum E_i) \\ &= S^{(n S)}(x, \Omega - \sum E_i) \end{aligned}$$

ヨツテ, (2) ト $\|P\| = 1$ カラ明カ,

ii) ノ証明. $G_1 = E_1 + E_2 + \dots + E_{d_1}$ トスルト

$P \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2, P \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3, \dots, P \mathcal{P}_{d_1} = \mathcal{P}_1$ ナカ

$$\mathcal{P}_1(E) + \mathcal{P}_2(E) + \dots + \mathcal{P}_{d_1}(E)$$

$$= \int_0^1 \{ \mathcal{P}_1(dx) + \mathcal{P}_2(dx) + \dots + \mathcal{P}_{d_1}(dx) \} P(x, E),$$

ヨツテ $E = G_1$ ト置クト

$$1 = \int_0^1 \{g_1(dx) + g_2(dx) + \dots + g_{d_1}(dx)\} P(x, G_1).$$

$0 \leq P(x, G_1) \leq 1$ 且 $\{g_1 + \dots + g_{d_1}\} \geq 0$, $\{g_1(G_1) + \dots + g_{d_1}(G_1)\} = 1 = \exists$ リ, 殆ト全テ $x \in G_1 = \text{對シ}$
 $P(x, G_1) = 1$.

iii) / 証明. (2), (3), (4) = $\exists$ リ

$$g_i(E) = \int_0^1 g_i(dx) P_i(x, E)$$

ヨツテ $E = E_i$ トヲクト $1 = \int_0^1 g_i(dx) C_i(x)$ ヲ得ル。

$0 \leq C_i(x) \leq 1$ 且 $g_i \geq 0$, $g_i(E_i) = 1 = \exists$ リ E_i 内殆
 ト至ル所テ $C_i(x) = 1$. 故ニ $E \in E_i$ ガ $\text{mes}(E) > 0$
 トラバ

(7) $P_i(x, E) = P_i(E) > 0$ (殆ト全テ $x \in E_i = \text{對シ}$).

ヨツテ (2) カラ証明ヲ得ル。

iv) / 証明. (2) ト (7) カラ明カ。

—— 以上 ——

最後ニツ

注意. P ガ $G_1^{(1)}$ テ $\lambda \neq 1$, $|\lambda| = 1$ ナル如キ固有値モ
 ツタメノ必要條件ハ $d_1 \neq 1$ ナルコトデアル。

証明. 充分. $d_1 > 1$ トスル. $P \cdot g_i = g_{i+1}$ ($g_{d_1+1} = g_1$) = $\exists$ リ $\lambda^{d_1} = 1$ トラ

$$\lambda P \cdot (g_1 + \lambda g_2 + \lambda^2 g_3 + \dots + \lambda^{d_1-1} g_{d_1})$$

(i) ii) = $\exists$ リ G_1 ヲ最初ニ出ルシメト考ヘルコトガ出来ル。

$$= (\varphi_1 + \lambda \varphi_2 + \dots + \lambda^{d_1-1} \varphi_{d_1})$$

ヨツテ $(\varphi_1 + \lambda \varphi_2 + \dots + \lambda^{d_1-1} \varphi_{d_1})$ が或 λ ($\lambda \neq 1$, $\lambda^{d_1} = 1$) に対シ $\neq 0$ となるコトが云へルトヨイ。之ハ $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{d_1}$ が一次独立となるコトが示ワカル (E. Schmidt, 論法)。

必要. $\lambda P \varphi = \varphi$, $\lambda \neq 1$, $|\lambda| = 1$, $\varphi \neq 0$, 且ツ $d_1 = 1$ トシテ矛盾ヲ出ス。 $d_1 = 1$ カラ (iv) = ヨリ P^m ハ $m \rightarrow \infty$ ト共ニ一様収斂スル。一ツ Lemma 3 ヲ使ハバ $P^m \varphi = \lambda^{-m} \varphi$ ハ m = ヲイテ periodic (period > 1) ナカラ矛盾。
——以上——

之ヲ談話 724, §12 ノ終リニ述ベタ「積分方程式流ノ証明」が出来タ譯ニモナリマシタ。