



|              |                                                                             |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Title        | 確率法則ノ分解問題, V                                                                |
| Author(s)    | 北川, 敏男                                                                      |
| Citation     | 全国紙上数学談話会. 1939, 169, p. 666-673                                            |
| Version Type | VoR                                                                         |
| URL          | <a href="https://doi.org/10.18910/74677">https://doi.org/10.18910/74677</a> |
| rights       |                                                                             |
| Note         |                                                                             |

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

## 1747. 確率法則ノ分解問題 V

北川 敏 男(阪大)

吾々ハ、今マデ、映ヘラレタ確率法則ノ分解問題ヲ論ズルニ當リ、分解ノ構成因子ヲ $K$ 即チ凡ベテノ確率法則ノ集合ニ求メテ來タ。即チ、分解ノ構成因子トシテハ、コレニ何等ノ制限ヲ置カズ、確率法則デアリサヘスレバヨカツタ。無限ニ分解可能トカ、分解不可能トカイフ概念ミミナ $K$ ニ於ケル分解ニ關スルモノデアツタ。コノ様ナ分解問題ヲ、 $K$ ニ於ケ

ル分解問題ト呼ブナラバ、コレニ對立シテ、特殊領域ニ於ケル分解問題ガアル譯デアル。即チ此ヘラレタ確率法則  $\mathcal{L}$  ナ分解スルニ際シ、分解ノ構成因子  $K$  ノ或ル與ヘラレタ特定ノ部分集合  $K' =$  屬スルモノニ局限シタ場合ノ研究モ亦必要デアアル。

$\mathcal{L}$ ニ對シテ  $K'$ ノ與ヘ方ハ限リナクアリ、ソノ何レヲ研究スルカハ、任意デアアルガ、 $\mathcal{L}$ ニ何等カノ意味ガ近親デアルヤウナ確率法則ノ集合トシテ  $K'$ ヲトツテ、 $K' =$ 於ケル  $\mathcal{L}$ ノ分解問題ヲ論ズルコトカラ始メルノモレッツノ行キ方デアロウ。實際  $K'$ トシテ  $K[\mathcal{L}]$ ,  $K^*[\mathcal{L}]$ ヲトツタ場合ニツイテハ、以下紹介スル如ク、相當ハッキリシタ結果ガ知アレタ居ル。

茲ニ  $K[\mathcal{L}]$ ハ、 $\mathcal{L}$ ト同ジ型ノ確率法則全部ノ集合ヲ表ハス； $\mathcal{L}_1$ ガ  $\mathcal{L}$ ト同ジ型デアルトイフノハ、 $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1 =$ 對應スル分布函数ヲ夫々  $F(x), F_1(x)$ トスルトキ、適當ニ實數  $a > 0$ ,  $b$ ヲトレバ、 $F_1(x) = F(ax+b)$  ( $-\infty < x < \infty$ )トナルコトヲイフ。又  $K^*[\mathcal{L}]$ ハ、 $\mathcal{L}$ ト狭イ意味ガ同ジ型ノ確率法則全部ノ集合ヲ表ハス。コレハ  $K[\mathcal{L}]$ ノナカデ、特ニ、上述ノ  $b$ ガ0ナル如キ確率法則全部ノ集合ヲ意味スル。 $K[\mathcal{L}], K^*[\mathcal{L}]$ ノ代リニ夫々  $K[F], K^*[F]$ トモ書ク。

§8.  $K[\mathcal{L}], K^*[\mathcal{L}] =$ 於ケル  $\mathcal{L}$ ノ分解問題。

一般ニ確率法則ノ集合  $K'$ ガ結合<sup>(1)</sup>ニ關シテ開カテ居ルトイ

(1) 結合 (composition) トハ  $F_1 * F_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y) dF_2(y)$ .

フノハ。  $K' =$  属スル任意ノ二ツノ確率法則ノ乗積カ又、  $K' =$  属スルコトヲ意味スル。特ニ、  $K^*[F]$ ,  $K[F]$  カ結合ニ関シテ閉ガテ居ル場合ニハ夫々  $F(x)$  (或ハ  $L$ ) ヲバ、安定 (stable), 準安定 (quasi-stable) ト呼ブコトニスル。安定 + 確率法則, 準安定 + 確率法則ノ一般型式ハ、夫レ夫レ Lévy, Khintchine = 依ツテ表ヘラレテ居ル。コレヲ Gauss ノ分布重  $\Phi(x)$  ヲ特別ノ場合トシテ含ム。  $K[\Phi]$  ハ實ニ著シイ性質ヲモツ。以下コレヲ示サシ。

(I)  $K[\Phi] =$  就イテ: 先ヰ簡單ノ故ヲ以テ  $K[\Phi] =$  關係シタコトカラ始メヨウ。

定理 6.  $F(x)$  ナル分布函数ハ、平均値 0, 標準偏差 1 ガアルトスル。然ルトキニハ、  $K[F]$  カ結合ニ関シテ閉ガテ居ルヌメノ必要條件ハ  $F(x) \equiv \Phi(x)$  <sup>(3)</sup>。

証明: (i) 充分ナコトハ、  $\Phi\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right) * \Phi\left(\frac{x-m_2}{\sigma_2}\right)$ , 特性函数ガ  $\exp\left(im_1 t - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2\right) \exp\left(im_2 t - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2\right)$  デアリ、コレハ、  $\Phi\left(\frac{x-m_1-m_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)$  ノ特性函数ニ等シイコト

$$(2) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(3) Cramér, 著: Random variables and distr. functions  
= 714.

(4) Ueber eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion (Math. Zeitschr. 41)

カラ明ラカデアル。(ii) 必要ナコト: 函数方程式:

$$F\left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1}\right) * F\left(\frac{x - m_2}{\sigma_2}\right) = F\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) \text{ カラ } \forall \tau m_1 =$$

$$m_2 = \dots = m_n = 0 \text{ トシテ } F\left(\frac{x}{\sigma_1}\right) * F\left(\frac{x}{\sigma_2}\right) * \dots * F\left(\frac{x}{\sigma_n}\right) =$$

$$F\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}}\right) \text{ ヲ得。従ツテ } \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = 1/\sqrt{n}$$

トシテ、 $(F(x\sqrt{n}))^{n*} = F(x)$ 。然レ一方 Lindeberg, 中心極限定理ニヨリ  $(F(x\sqrt{n}))^{n*} \rightarrow \Phi(x)$ 。依ツテ  $\Phi(x) = F(x)$ 。〔証終〕

定理 7. (Cramér)<sup>(4)</sup>  $K[\Phi]$  = 属スル分布函数ノ分解因子ハ  $K[\Phi]$  = 属スル。即チ、ニツノ分布函数  $F_1(x)$  及ヒ  $F_2(x)$  が

$$(30) \quad F_1(x) * F_2(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) \quad (\sigma > 0)$$

ナル函数関係ヲ満足スルナラバ、実数  $\sigma_i, m_i$  ( $i = 1, 2, \sigma_i > 0$ ) ヲバ適當ニトツテ  $F_i(x) = \Phi\left(\frac{x - m_i}{\sigma_i}\right)$  ( $i = 1, 2$ )

トシテ表ハシ得ル。(茲ニ  $m = m_1 + m_2, \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ )

コレヲ証明スルノニハ、次ノ補助定理ヲ用ケル。

補助定理 8. ニツノ特性函数  $f_1(t), f_2(t)$  ノ積  $f(t)$  が整函数デアアルナラバ、ソノ各々モ亦整函数デアアル。

証明:  $f_1(t), f_2(t), f(t)$  = 對應スル分布函数ヲ夫々  $F_1(x), F_2(x), F(x)$  デ表ハサウ。  $f_1(t) f_2(t) = f(t)$  デアルカラ、適當ニ確率変数  $X, U, V$  ヲ選ンテ、 $U, V$

ハ相互 = 独立デ、且ツ  $X = U + V$ , シカモ、 $U, V, X$ ノ特性函数ハ夫々  $f_1(t), f_2(t), f(t)$  デアルヤウニ出来ル。  
一般性ヲ失フコトナシニ  $U, V$ ノ中央値ヲ  $0$ ニトレル。  
証明ヲ次ノ四段ニ分ツ。

第一段:  $\Pr\{|X| \geq x\} = F(-x-0) + 1 - F(x)$

ハ  $x \rightarrow \infty$ ノトキ、任意ノ  $\gamma > 0$ ニ對シテ、 $e^{-\gamma x}$ ヨリ小ナル order デ  $0$ ニナル:

$$\Pr\{|X| > x\} = o(e^{-\gamma x})$$

[証]  $f(t)$ ハ整函数デアルカラ、任意ノ実数  $\gamma > 0$ ニ對シテ

$$\frac{f(i\gamma) + f(-i\gamma)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma x} dF(x)$$

トナルコトカラ明ラカ。

第二段:  $P_f(\gamma) = \frac{f(i\gamma) + f(-i\gamma)}{2} = 1 + \gamma \int_0^{\infty} e^{-\gamma x} \Pr\{|X| \geq x\} dx$

[証]: 第一段ト ( ) トニヨリ明ラカデアル。

第三段:

$$(3) \begin{cases} (i) & \Pr\{X \geq x\} \geq \frac{1}{2} \Pr\{U > x\} \\ (ii) & \Pr\{X \leq -x\} \geq \frac{1}{2} \Pr\{U \leq -x\} \\ (iii) & \Pr\{|U| > x\} \leq 2 \Pr\{|X| \geq x\} \end{cases}$$

同様ノ關係ガ、 $V$ ニ關シテモ成立スル。

[証]: (i)ニ關シテハ: 任意ノ正数  $\varepsilon$ ニ關シテ

$$\text{Pr.}\{X > x + \varepsilon\} = 1 - F(x + \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_1(x + \varepsilon - y)) dF_2(y)$$

$$\geq \int_{-\infty}^{-0} (1 - F_1(x + \varepsilon - y)) dF_2(y)$$

$$\geq (1 - F_1(x + \varepsilon)) \int_{-\infty}^{-0} dF_2(y)$$

假定=ヨリ、0 が  $V$  ノ 中央値 デアルカラ、 $\int_{-\infty}^{-0} dF_2(y)$  ハ  $\frac{1}{2}$  ヨリ 小デハナイ。

依ツテ、任意ノ正数  $\varepsilon$  = 関シテ  $\text{Pr.}\{X > x + \varepsilon\} \geq \frac{1}{2} (1 - F_1(x + \varepsilon))$ 、依ツテ  $\varepsilon \downarrow 0$  ナラシメテ、

$$\text{Pr.}\{X \geq x\} \geq \frac{1}{2} (1 - F_1(x + 0)) = \frac{1}{2} (1 - F_1(x))$$

コレカラ (i) ヲ得ル。

(ii) = 関シテモ同様ニ出來ル。(iii)ハ (i), (ii) カラ得ラレル。

第四段: (証明ノ完了) 以上ノ三段ノ結果カラシテ

$$(32) \quad \text{Pr.}\{|U| > x\} \leq 2P(x) = o(e^{-rx})$$

(任意ノ  $r > 0$  = 對シテ)

従ツテ、任意ノ  $r > 0$  = 對シテ、 $f_1(-ir)$ ,  $f_1(ir)$  が存在スル。コノ事カラシテ  $f_1(z)$  ハ  $z$  ノ 整函数デアルコトヲ知ル。 $f_2(z)$  = 関シテモ同様デアル。〔証終〕

系1. ニツノ 特性函数ノ積ガ、 $O$  = ナラス 整函数デアルナラバ、各々モ亦  $O$  = ナラス 整函数デアル。

系2. 補助定理  $\delta$  = 於テ

$$(33) \quad M_{f_i}(r) \leq 4M_f(r) - 2 \quad (i=1, 2)$$

但シ、一般ニ  $M_g(r) \equiv \max_{|z| \leq r} |g(z)|$  ト置ク。

証明: 先ダ一般ノ特性函数  $\varphi(z)$  = 関シテ.

$$|\varphi(z)| = |\varphi(\zeta + i\zeta')| \leq \varphi(i\zeta') \quad (\zeta, \zeta' \text{ real})$$

従ッテ  $\varphi(i\zeta')$  が  $\zeta' =$  関シテ convex + コト = 注意シテ

$$M_{\varphi}(r) \leq \max_{-r \leq \zeta' \leq r} |\varphi(i\zeta')| \leq \frac{\varphi(ir) + \varphi(-ir)}{2} = P_{\varphi}(r)$$

又  $M_{\varphi}(r)$  ノ定義カラ明ラカニ、 $\varphi(\pm ir)$  ハ共 =  $M_{\varphi}(r)$  ノコエナイカラ、

$$(34) \quad P_{\varphi}(r) \leq M_{\varphi}(r) \leq 2P_{\varphi}(r)$$

ナル関係ガ一般ノ特性函数ニ関シテ成立ツ。

トナル。然ルニ補助定理 8 ノ第二段ト第三段 (iii) トカラ、 $f, f_1, f_2$  ノ間ニハ

$$P_{f_i}(r) \leq 2P_f(r) - 1 \quad (i=1, 2) \\ (\text{任意ノ } r > 0 = \text{對シテ})$$

ナル関係ガアル。依ッテ結局  $i=1, 2$  = 對シテ

$$M_{f_i}(r) \leq 2P_{f_i}(r) \leq 2(2P_f(r) - 1) \\ \leq 4P_f(r) - 2 \leq 4M_f(r) - 2$$

茲ニ、 $r > 0$  ハ任意デアアル。(証終)

定理 7 ノ証明:  $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$  , 特性函数  $\exp(imt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)$  ハ  $0 =$  ナラス整函数デアアルカラ、 $F_1, F_2$  ノ特性函数ヲ  $f_1, f_2$  トスルトキ、 $f_1(t), f_2(t)$  モ亦  $0 =$  ナラス整函数デアアル。依ッテ  $f_i(t) = \exp(g_i(t))$  トナルヤリナ多項式  $g_i(t)$  ガアル。コレハ系 2 = 依リ、高々 2

次でナケレバナラス。即チ  $f_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2$  トナルヲウナ常数  $a_i, b_i, c_i$  がアル。  $a_i = 0, c_i < 0$  ナル事ハ  $f_i(t)$  が特性函数ナルコトカラスガナル。〔証終〕

注意: 以上ノ如ク、定理 7 ノ証明ニハ特性函数ノ簡單ナ性質シカ用キテ居ナイ。シカモ、ソノ結果ハ着目ニ値スルモノト云ヘヨウ。Lévy ハ中心極限定理ノ証明ニ於イテ、コノ定理ヲ豫想シテ、コレヲ用キタ。始メテ証明ヲ映ヘタノハ、Cramér デアルガ、上ノ証明ハ Lévy ノ論文 (I, 前掲) ニ紹介サレタ Khintchine ノ方法ニ依ル。

注意: 定理 6 ノ証明ニ於テ Lindeberg ノ中心極限定理ヲ用キタコト、及び定理 7 が Lévy ノ中心極限定理ノ証明ニ用キラレルコトニハ注意ヲ要スル。カクノ如ク、今解定理トイフヲウナ代数的ナ結果ト、中心極限定理トイフ Limit process ニ関スル結果トが、密接ナ関係ニアルコトハ、コレカラ後ノ所論ニ於イテモ屢々見ラレルノデアル。