



Title	大數ノ法則, III
Author(s)	北川, 敏男
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 169, p. 673-680
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74678
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

748. 大数ノ法則, III

北川 敏 男 (阪大)

聯鎖級数 = 関スル大数ノ法則ヲ導ク準備トシテ、コレ

カラ、聯鎖級数ノ発散及ビ収斂ニツイテノ諸研究ヲ紹介スル。始メニ述ベタ如ク、独立級数ニ関スル結果ヲ知レルモノトシ、ソレヲバ聯鎖級数ヘ拡張スル方針デ吾々ハ進ムノガアル。

独立級数ノ発散及ビ収斂ニ関スル基本的ナ結果トシテ、Liapounoffノ定理トイフノガアル：

定理 A. (Liapounoff) 独立ナ確率変数ノ系列 $\{X_\nu\}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) ニ於テ、次ノ四條件ガ悉ク満足サレテ居ルトスル：

$$(1^\circ) \quad E(X_\nu) = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(2^\circ) \quad E(X_\nu^2) \equiv \sigma_\nu^2 < \infty \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(3^\circ) \quad |X_\nu| \leq b \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(4^\circ) \quad b_n^2 \equiv \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty \text{トキ})$$

然ルトキニハ、 S_n/b_n ($S_n \equiv X_1 + X_2 + \dots + X_n$)ノ分布函数ハ、 $n \rightarrow \infty$ ノトキ、Gaussノ分布函数 $\Phi(x)$ ヘスベテノ x ニ関シテ一様ニ収斂スル。

吾々ハ、Lévyニ従ヒ、コノ定理ヲバ、適當ナ條件ヲツケテ聯鎖級数ヘ拡張シヌウ。

§ 3. Liapounoffノ定理ニ對スル Lindeberg-Lévyノ方法⁽¹⁾

前述ノ Liapounoffノ定理ノ四條件ニ對應シテ Lévyハ一般ナ聯鎖級数ノ始メノ n 個ノ X_ν ニ関シテ

(1) Bulletin Sc. Math. 70 (1935) p p. 114-117.

$$(C) \quad E_{\nu-1}\{X_\nu\} = 0 \quad (\nu=1, 2, \dots, n)$$

$$(C_1) \quad \sigma_\nu^2 \equiv E_{\nu-1}\{X_\nu^2\} = E\{X_\nu^2\} < \infty \quad (\nu=1, 2, \dots, n)$$

$$(C') \quad |X_\nu| < \varepsilon b_n, \quad (\text{但し } b_n^2 \equiv \sum_{\nu=1}^n \sigma_\nu^2)$$

$$(\nu=1, 2, \dots, n)$$

ナル条件ヲ導入シ、次ノ定理ヲ証明シタ。

定理3: $(C), (C_1), (C')$ が共ニ成立ツ時ニハ、任意ノ実数 x ニ関シテ

$$\left| \Pr\left[\frac{S_n}{b_n} < x\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| < 6\varepsilon^{\frac{1}{4}}$$

茲ニ、條件 $(C), (C_1)$ ハ夫々上述ノ $(1^\circ), (2^\circ)$ ニ相應スルコトハ明ラカデアル。 $(E_{\nu-1})$ トイフノハ、 I デ述ベタ如ク、 $X_1, X_2, \dots, X_{\nu-1}$ ヲ知ツテ X_ν ノ (條件的) 平均値ヲ意味スル) 尚條件 (C') ハ前述ノ $(3^\circ), (4^\circ)$ ニ對應サセルトメノ伏線ヲナスコトモ容易ニ見ラレル。

定理3ノ証明ノ準備: 茲デハ、独立級数ニ関シテ知ラレタ *Lindeberg* ノ方法ヲ襲ヒタ *Lévy* ノ証明ヲ述ベル。コレヲ *Lindeberg-Lévy* ノ方法ト略称スルガ、ソノ手法ハ他ノ問題ニモ應用サレヨウナ氣カスル。証明ノ骨子トナル点ヲ先カ列挙スルト:

[1] 確率変數 X が如何ナル分布函数デアロウトモ、確率変數 Y ノ分布函数が或ル程度ノ滑カサヲ持テバ、 X ト Y トが独立ナトヤ、 $X+Y$ ノ分布函数ハ、 Y ト同ジ滑ヲカヲ保持スル。例ヘバ、 Y ノ分布函数が連続、或ハ

全連続，或ハ尤回連続微分可能等ニ應ジ， $X+Y$ ノ分布函数モ同ジ性質ヲモツ。コノコトハ， $X+Y$ ノ分布函数ガ， X, Y ノ分布函数 $F_X(x), F_Y(x)$ カラ⁽²⁾ *Faltung*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_Y(x-y) dF_X(y) = \text{依ツテ與ヘラレルコトカラ明}$$

ヲシテアル。

[2] ニツノ分布函数ノ距離トシテ、次ノヤリニ定義出來ル： 分布函数ニハ，可数無限個ノ不連続点ガアリ得ルガ，ソノイフ不連続点デハ，飛躍ノ上ト下トヲ線分デ結ブコトニ依リ、連続曲線ガ平面上ニ定義カレルコトニナル。今分布函数 $F(x), G(x)$ カラ、カクレテ連続曲線 Γ_1, Γ_2 ヲツクツタトシ、直線 $x+y=c$ ト Γ_1, Γ_2 トノ切口ヲ夫々 $A_1(c), A_2(c)$ トスル。点 $A_1(c), A_2(c)$ ノ距離ヲ $\text{dist.}(A_1(c), A_2(c))$ デ示ス。ソノトキ、

$$(F, G) = u. b. \text{ dist.}(A_1(c), A_2(c)) \\ -\infty < c < \infty$$

ニ依ツテ F ト G トノ距離ヲ定義スル。

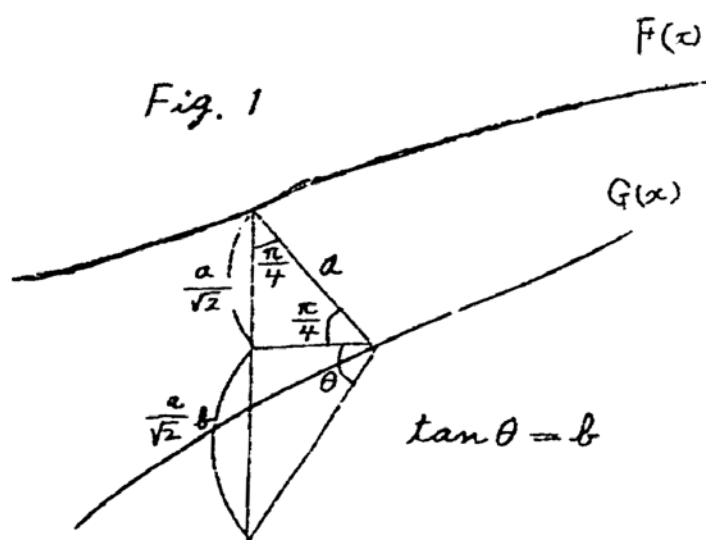
(α) 上ノ距離ハ法則收斂（又ハ *Bernoulli* ノ收斂トモイフ）ヲ特徴付ケル。確率変数ノ系列 $\{X_n\}$ ガ確率変数 X ニ法則收斂ヲナストイフノハ， $F_X(x)$ ノスベテノ不連続点ニ於テ $F_{X_n}(x) \rightarrow F(x)$ ノ成立スルコトヲイフ。

(2) 確率変数 X, Y, Z 等ノ分布函数ヲ夫々 $F_X(x), F_Y(x), F_Z(x)$ ト書ク。以下ニテ断ラナコトモアル。

(β) スベテノ實數 x = 関シテ $|F(x) - G(x)| \leq h$
ナル常數 h がアレバ, $(F, G) = \sqrt{2} h$.

(γ) 分布函數 $G(x)$ ハ
到ル所連続デ、且ツ
 $G'(x) \leq b$ ナル正數 b が
アルトスル。

$(F, G) = a + \text{リトス}$
ル。然ルトキ = ハ凡ベテ
ノ實數 x = 関シテ



$$|F(x) - G(x)| \leq a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} \right)$$

[証] Fig. 1 カヲ明ラカ。

[3] 確率変數 X, Z, ξ ハ相互 = 独立デ (i) $F_Z(x)$
ハ二階マデハ連続 + 微分係數ヲモチ、三階ノ微分係數ノ
絶對値ハ或ル常數 h ヲコエ + 1; (ii) ξ ハ Gauss,
分布 = 従ヒ; (iii) X ハ, 平均値 0, 標準偏差 σ , 且ツ
 $|X| \leq \varepsilon$ ナリトスル。然ル時 = ハ

$$|F_{X+Z}(x) - F_{\sigma_{\xi}+Z}(x)| \leq \frac{h}{6} (\varepsilon \sigma^2 + \varepsilon^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^2)$$

[証] X, Z, ξ ハ相互 = 独立カカラ

$$F_{X+Z}(x) - F_{\sigma_{\xi}+Z}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Z(x-y) d\{F_X(y) - F_{\sigma_{\xi}}(y)\}$$

假定 (i) = 依リ、任意ノ實數 x, y = 関シテ

$$F_Z(x-y) = F_Z(x) - y F_Z'(x) + \frac{y^2}{2} F_Z''(x)$$

$$+ \frac{ky^3}{6} \theta_z(x, y)$$

茲に $|\theta_z(x, y)| \leq 1$ と書き得ル。コレヲ前式ニ代入スル、
 ン、際、 $\bar{X}$, σ_z ハ共ニ平均値 0, 標準偏差 σ ナルコトニ
 注意スレバ:

$$F_{\bar{X}+\sigma_z}(x) - F_{\sigma_z}(x) = \frac{k}{6} \int_{-\infty}^{\infty} y^3 \theta(x, y) d[F_{\bar{X}}(y) - F_{\sigma_z}(y)]$$

サテ $|\bar{X}| \leq \varepsilon$ ナルコトト、 $|y| \leq \varepsilon$ ナラバ、 y^3 ハ、 εy^2 ヨリ
 小ナルコトカラ求メル不等式ヲ得ル。(証終)

定理 3 の証明: 簡単ノタメニ、以下 $b_n = 1$ トス
 ル。問題ハ $\text{Pr.}[S_n < x] - \text{Pr.}[\xi < x]$ 即チ $F_{S_n}(x) - \Phi(x)$
 ノ評価デアルガ、コノタメニ、(III) (i) ノ條件ヲ満足シ、
 $X_1, X_2, \dots, X_n, Z$ ノ何レトモ独立デアルマウナ確率変
 数 Z ヲ考ヘ、 $\lambda > 0$ ノ任意ニ與ヘテ $F_{S_n+\lambda Z}(x) - F_{\xi+\lambda Z}(x)$
 ヲ先必評價スル。コノデ ξ ノ代リニ、各々ハ又ハリ Gauss
 ノ分布ニ從ヒ、且ツ相互ニ独立デアルマウナ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$
 ヲトツテ $\xi = \sigma_1 \xi_1 + \sigma_2 \xi_2 + \dots + \sigma_n \xi_n$ ナラシメタル。ス
 ルト問題ハ $X_1 + X_2 + \dots + X_n + \lambda Z$ ノ分布函数ト $\sigma_1 \xi_1 + \sigma_2 \xi_2$
 $+ \dots + \sigma_n \xi_n + \lambda Z$ ノ分布函数ノ比較ニナル。

$S_\nu = X_1 + X_2 + \dots + X_\nu$, $R_{\nu+1} = \sigma_{\nu+1} \xi_{\nu+1} + \dots$
 $\dots + \sigma_n \xi_n$ ト置クト。

$$\text{Pr.}[S_n + \lambda Z < x] - \text{Pr.}[\xi + \lambda Z < x]$$

$$= \sum_{\nu=1}^n \left\{ \text{Pr.}_{\nu-1}[S_{\nu-1} + X_\nu + R_{\nu+1} + \lambda Z < x] \right.$$

$$-PY_{\nu-1}[S_{\nu-1}+\sigma_{\nu}\xi_{\nu}+R_{\nu+1}+\lambda Z < x]\}$$

トシテ書き表ハサレル。ツマリ、 $S_n+\lambda Z$ カラ、 $\xi+\lambda Z$ へ至ル橋渡シトシテ、中間=順次 $S_{n-1}+\sigma_n\xi_n+\lambda Z$, $S_{n-2}+\sigma_{n-1}\xi_{n-1}+\sigma_n\xi_n+\lambda Z$, ..., $S_1+\sigma_2\xi_2+\dots+\sigma_n\xi_n+\lambda Z$ ヲ考ヘテ訳デアル。上式ノ右辺ノ各項ヲ見ルト:

$$S_{\nu-1}+R_{\nu+1}+\lambda Z = W_{\nu} \text{ト略記スルト}$$

$$PY_{\nu-1}[X_{\nu}+W_{\nu} < x] - PY_{\nu-1}[\sigma_{\nu}\xi_{\nu}+W_{\nu} < x]$$

トナル。〔1〕=依リ、 W_{ν} ハ、ソノ構成要素タル λZ ト同ジク、二階マデ連続微分可能デ、三階ノ微係数ハ h/λ^3 ヲ越ヘナイ。

従ツテ、条件 (C), (C'), (C'') = 依リ、〔3〕ノ議論が使用出来テ:

$$\begin{aligned} & |PY_{\nu-1}[X_{\nu}+W_{\nu} < x] - PY_{\nu-1}[\sigma_{\nu}\xi_{\nu}+W_{\nu} < x]| \\ & \leq \frac{h}{6\lambda^3} (\varepsilon\sigma_{\nu}^2 + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\varepsilon\sigma_{\nu}^2) \end{aligned}$$

トナル。右辺ハ $h\varepsilon\sigma_{\nu}^2/2\lambda^3$ ヨリ小デアル。依ツテ辺ヲ相和シテ

$$\begin{aligned} & |PY[S_n+\lambda Z < x] - PY[\xi+\lambda Z < x]| \\ & < \frac{h\varepsilon}{2\lambda^3} \sum_{\nu=1}^n \sigma_{\nu}^2 = \frac{h\varepsilon}{2\lambda^3} \end{aligned}$$

トナル。($b_n=1$ トシタカラ、右辺ハ $h\varepsilon/2\lambda^3$ =ナル)

$$\text{従ツテ、} (F_{S_n+\lambda Z}, F_{\xi+\lambda Z}) \leq \frac{h\varepsilon}{2\lambda^3} \sqrt{2} = \sqrt{2} \frac{h\varepsilon}{\lambda^3} \text{ト}$$

ナル。(〔2〕)

他方、 $|Z| \leq 1$ ナル条件ヲ更ニ $Z = \text{加ヘルト}$, $[2] =$ 依リ、 $(F_{S_n}, F_{S_n + \lambda Z}) \leq \sqrt{2} \lambda$, $(F_{\xi}, F_{\xi + \lambda Z}) \leq \sqrt{2} \lambda$ トナル。

依ツテ、 $(F_{S_n}, F_{\xi}) < \sqrt{2} \frac{\delta \varepsilon}{\lambda^3} + 2\sqrt{2} \lambda$ (距離ノ三角不等式カラ) $\delta = 1$ ナル様ナ Z ヲトル。

左辺ハモハシ λ ヲ含マナイ。依ツテ、右辺ヲ最小ナラシメル λ ヲ求メルコトニ依リ、 $(F_{S_n}, F_{\xi}) < 16 \varepsilon^{\frac{1}{4}} / 3$ 。

茲カ $[2]$, (Y) ヲ援用スル。ソコニ $G(x) = \text{相違スルモノトシテ、重}(x)$ ヲトル。 $|\Phi'(x)| \leq 1/\sqrt{2\pi}$ ナルカラ、 $[2] (Y) =$ 依リ、

$$\begin{aligned} |F_{S_n}(x) - F_{\xi}(x)| &\equiv |\text{Pr.}[S_n < x] - \text{Pr.}[\xi < x]| \\ &< \frac{16 \varepsilon^{\frac{1}{4}}}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right) \end{aligned}$$

ヲ得ル。右辺ハ $6 \varepsilon^{\frac{1}{4}}$ ヨリ小ナル。[定理3, 証明終]

[註] 補助, 確率変数 Z ノ分布函数トシテ、 $F_Z(x) = 0$

$$(x < 0 \text{ ノトキ}); \quad F_Z(x) = \frac{x+1}{2} - \frac{\sin \pi x}{2\pi^3} \quad (0 \leq x \leq 1 \text{ ノ}$$

トキ); $F_Z(x) = 1 \quad (x > 1) =$ レバ、上ノ性質ヲ悉ク満足スル。