



Title	有界且ツ可測ナ核ニヨル積分 operator ニ就イテ, II
Author(s)	吉田, 耕作; 三村, 征雄; 角谷, 静夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 169, p. 681-684
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74679
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

749. 有界且可測ノ核ニヨル積分 operator ニ就イテ, II

吉田耕作, 三村征雄, 角谷静夫 (阪大)

§ 3

前号ニ於テ、有界且可測ノ核ニヨル積分 operator ハ (L)
ニ於ケル operator トシテハ *vollstetig* ナリ。カ
ル operator ヲニツ組合ヘシタモノハ (L) ニ於ケル operator
トシテ *vollstetig* ナルコトヲ証明シタ。トコロガソノ証
明ヲヨク調べテ見ルト実ハ次ノコトガ証明サレタキタノデ
アル。

定理。 有界且可測ノ核ニヨル積分 operator ハ
(M) ヲ (L) ニウツス operator トシテ *vollstetig*
ナル。

有界且可測ノ核ニヨル積分 operator ガ (L) ヲ (M)
ニウツス operator トシテ連続 (= 有界) ナルコトハ明
カザイルカラ、カナル積分 operator ヲ2回組合ヘセバ
(L) $\rightarrow$ (M) $\rightarrow$ (L) ナル operator ハ (L) ヲ (L) ニウツス
operator トシテ *vollstetig* ナル。

コレハ前号ノ §1 ノ終リ (635頁) ガ述べタコトト比較
スルト面白い。

§ 4

前号が出来上ツタカラ、最近來タ *Zentralblatt* ヲ見

マシタヲ、J. Sierpinski が C. R. URSS. 18 (1938), No. 4-5. p. 255 に於テ、私達ノト全ク同シ結果ヲ得タト報ジ
 テアリマシタ。早速 C. R. URSS ヲ探シテ見マシタラ確カ
 ニ同シ結果ヲ得テ居リマス。

コノ雜誌ハ今年4月ニ來テ居リマスノデ、コレヲ知ラナ
 カッタノハ全ク私達ノ不注意デアリマシタ。シカシ証明ノ方
 法ハ全然チガツテ居リマス。相當面倒ナモノデスガ考ヘハ面
 白イカラ次ニコレヲ簡單ナ形ニ直シテ紹介致シマス。

補助定理 有界且可測ナ核 $K(x, y)$ ($|K(x, y)| \leq K_0$.) が與ヘラレタトキ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ次ノ條件ヲ
 満足スル核 $K_\varepsilon(x, y)$ ヲ作ル。

- 1° $K_\varepsilon(x, y)$ ハ有界且可測, $|K_\varepsilon(x, y)| \leq K_0$.
- 2° 任意ノ x ニ對シテ y ヲ fix スレバ $K_\varepsilon(x, y)$ ハ
 y ニ關シテ連続。
- 3° $K(x, y) \neq K_\varepsilon(x, y)$ トナル如キ点 (x, y) 全体
 ノ集合ヲ E_ε , E_ε ノ characteristic function ヲ
 $g_\varepsilon(x, y)$ トスレバ殆ドスベテノ x ニ對シテ

$$\int_0^1 g_\varepsilon(x, y) dy < \varepsilon.$$

証明: $E_0 = [0, 1] \times [0, 1] \equiv e_0 \times [0, 1]$ ($e_0 = [0, 1]$) トオキ, $E_n \equiv e_n \times [0, 1]$, $E_0 \supset E_1 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$ (即チ $e_0 \supset e_1 \supset \dots \supset e_n \supset \dots$) ヲ帰納的ニ定義スル。⁽¹⁾ $E_n \equiv e_n \times [0, 1]$ が既ニ定義サレ $m_2(E_n) = \frac{1}{2^n}$

⁽¹⁾ 脚註ハ次頁ヘ

デアツクトセマ。任意, $\varepsilon > 0$ 對シテ次ノ如キ measurable set F_n 及ビ E_n 於テ定義サレ又連続函数 $K_n(x, y)$ が存在スル:

$$(i) \quad F_n \subset E_n, \quad m_2(E_n - F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

$$(ii) \quad (x, y) \in F_n \text{ ナルトキ } K_n(x, y) = K(x, y), \text{ 又 } (x, y) \in E_n \text{ ナルトキ } |K_n(x, y)| \leq K_0.$$

$E_n - F_n$, characteristic function $\varphi_n(x, y)$ ト
 オキ $\int_0^1 \varphi_n(x, y) dy > \varepsilon$ トナル如キ点 x 全体ノ集合ヲ e_n^* ト
 セヨ。 $e_n^* \subset e_n = \bar{e}$ 且 $m_1(e_n^*) < \frac{1}{2^{n+1}}$ ナアル。ヨツテ
 $e_n^* \subset e_{n+1} \subset e_n$, $m_1(e_{n+1}^*) = \frac{1}{2^{n+1}}$ ナル如キ measurable set e_{n+1} が存在スル。 $E_{n+1} = e_{n+1} \times [0, 1]$ トオク。

此ノ如ク E_n ($n=0, 1, 2, \dots$) ヲ定義シテカラ

$$K_\varepsilon(x, y) = K_n(x, y), \quad (x, y) \in E_n - E_{n+1} \quad \text{即} \quad x \in e_n - e_{n+1}$$

$$= 0 \quad (x, y) \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{即} \quad x \in \prod_{n=1}^{\infty} e_n$$

トオク。 $K_\varepsilon(x, y)$ が求ムル函数ナアル。 $K_\varepsilon(x, y)$ が $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ ヲ満足スルコトハ明ラカデアル。(補助定理ノ証明終)

- (1) E_n, F_n ハ平面上ノ点集合ヲ表ハル。 e_n, e_n^* 等ハ直線(2軸)上ノ点集合ヲ表ハス。又 m_1 ハ直線上ノ measure, m_2 ハ平面上ノ measure ヲ表ハス。

此、如ク $K_\varepsilon(x, y)$ を定義スレバ、コノ $K_\varepsilon(x, y)$ を核トスル積分 operator $h(M) \rightarrow (C) =$ ウツス operator トシテ *vollstetig* デアル。コレハ Banach, 書 *opérations linéaires* 98 頁ノ定理ヨリ明カ。

ヨツテ、コノ operator $h(M) \rightarrow (L) =$ ウツス operator トシテ ε *vollstetig*。シカル $= K, K_\varepsilon =$ 對應スル operator ヲ夫々 U, U_ε トスレバ $U, U_\varepsilon h(M) \rightarrow (L) =$ ウツス operator トシテ $\|U - U_\varepsilon\| \leq 2K \cdot \varepsilon$ ヲ満足シテキル。コレハ $K_\varepsilon(x, y)$ ノ作り方ヨリ明カデアル。 $\varepsilon > 0$ ハ任意デアツタカラ、ヨク知ラレタ定理 (Banach, 書 *opérations linéaires* 96 頁定理 2) = ヨリ $U h(M) \rightarrow (L)$ へウツス operator トシテ *vollstetig*。(2)

最後 = Sirvint ハ有界且ツ可測ナ核ヲモツ integral operator $\mathcal{A}(L) \rightarrow (L)$ へウツスト考ヘタトキ *vollstetig* デナイモノノ example ヲ與ヘテキマスガ、コレハ偶然ニモ私達が §2 デ與ヘタモノト本質ニ於テ全ク一致シテキルモノデアリマシタ。

-
- (2) J. Sirvint ハ U^2 が $(L) \rightarrow (L)$ へウツス operator トシテ *vollstetig* ナルコトヲ証明シテキルガケデ U が $(M) \rightarrow (L)$ へウツス operator トシテ *vollstetig* デアルコトハ述べテキナイ。