OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Euclid 空間ノ一ツノ characterisation
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 169, p. 685-693
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74680
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

750. Euclid 空間ノ一ツノ Characterisation

角谷 靜夫 (阪大)

Banach 空間が一般 Euclid 空間 (即チ、有限次元ノ Euclid 空間, separable ナ Hilbert 空間及ビ separable デナイ Hilbert 空間)[1] デアルタメノ一ツノ必要且十分ナ條件ヲ與ヘルノガ目的デアル。

Banach 空間 E ノ一ツノ closed linear subspace E_1 ガ與ヘラレタトキ E_1 ガ定義サレタ linear functional ハ良ク知ラレタ如ク E 全体ヘソノ norm ヲ上ゲナイヤウニ linear ニ拡張スルコトガ出來ル。

シカシ linear operator ニ對シテハ同様ナ定理ハ成立シナイ。即チ E_2 ヲ他ノ Banach 空間トスルトキ E_1 ヲ E_2 ニウツス linear operator ハ必ズシモ、E 全体ヘソノ norm ヲ上ゲナイヤウニ拡張スルコトハ出來ナイ。(取ル値ハ常ニ E_2 ニ屬スルモノトスル)。コレハ特ニ $E_2 = E_1$ デ且ツ始メノ linear operator ガ E_1 ニ於ケル identical transformation デアル場合ヲ考ヘラ見レバヨクワカル。コノ場合ニハ我々ノ問題ハ E カラ E_1 ヘノ projection[2] デ

---

(1) 一般 Euclid 空間トハ Banach 空間 E デソノ norm ガ任意ノ $x, y \in E$ ニ對シテ $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ ヲ満足スルモノデアル。

(2) E カラ E_1 ヘノ projection トハ E ヲ E_1 全体ヘウツス linear operator P デアッテ $P^2 = P$ ヲ満足スルモノヲ云フ。

ソノ norm が 1 ニナルモノガ存在スルカドウカト云フ問題ニナル。又逆ニ 1 ニナル projection P が存在スレバ E_1 ヲ E_2 ヘウツス任意ノ linear operation $y=U(x)$ ニ対シテ $y=U_1(x)=U(P(x))$ トオケバ ホムル拡張ガ得テレルコトハ明ラカデアル。コヅテ我々ハ単ニ E カラ E_1 ヘノ projection ヲ問題ニスレバヨイコトガ分ル。

然ルニ F. J. Murray[9] ガ示シタ如ク、(L_p) $(p>1)$ ニ於テハ norm ガ有限ナ projection ガ存在シナイヤウナ closed linear subspace ガ存在スルカラ我々ノ問題ハ常ニ可能デハナイ。然テバコノ問題 (norm が 1 ノ場合) ガ如何ナル closed linear subspace ニ対シテモ可能デアル如キ Banach 空間ハ如何ナルモノカ？コレガ一般 Euclid 空間ニ限ルト云フノガ我々ノ結果デアル。一般 Euclid 空間ニテハ如何ナル closed linear subspace ニ対シテモ projection ガ存在スルコトハ容易ニ示スコトガ出来ルカラ、コレデ一般 Euclid 空間ノ一ツノ characterisation ガ挙ゲラレタコトニナル。即チ

> 定理 1. Banach 空間 E ガ一般 Euclid 空間デアルタメニ必要且ツ十分ナ条件ハ E ノ任意ノ closed linear subspace E_1 ニ対シテ E ヲ E_1 ヘウツス norm 1 ノ projection ガ存在スルコトデアル。

---

(3) F. J. Murray: On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p. Trans Amer. Math. Soc. 41 (1937).

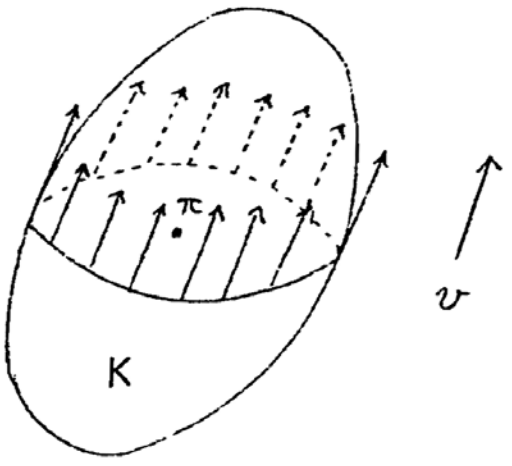
必要ナコトハ明カ。十分ナコトヲ証明スルタメニハ、有限次元ノ所ダケヲ考ヘレバヨイ。次ノ定理ヲ証明スレバ足リル。

定理2. Eヲ3次元ノ Minkowski 空間[4] トスルトキ、若シ原点ヲ通ル任意ノ平面 E_1 ニ對シテEヲ E_1 ヘウツス norm 1 ノ projection P が存在スレバEヘ Euclid 空間デアル。

定理2ハ次ノ如キ形ニ変形スルコトガ出来ル。

定理3. Kヲ3次元ノ（Euclid）空間内ノ有界ナ凸集合ニテ、原点ヲ内点ニ含ミ且ツ原点ニ関シテ Symmetric デアルモノトスル。若シ、原点ヲ通ル任意ノ平面 π ニ對シテ一ツノ方向ひガ定マッテ、Kノ表面ト π トノ切口ノ各点ヲ通ッテひノ方向ニ引イタ直線ガ何レモKノ内部ヲ通ラナイ（即チKノ Stützgerade ニナル）ナラバ、Kハ Ellipsoid デアル。

コレハ定理2ニ於テ $\|x\| \leq 1$ トナル如キx全体ノ集合ヲKトスレバヨイ。



(4) 有限次元ノ Banach 空間ヲ Minkowski 空間トイフ。

K ノ表面が滑カデ、各点デ切平面が unique ニ定マリ、且ツ各々ノ切平面ハ一点ノミニテ K ニ切シル場合ニハ、コノ定理ハ既ニ証明サレテ居ル。(5)

コンデハ、ソノ様ナ仮定ヘナイカラ証明ハ少シ面倒デアル。シカシ大体同ジ方法デ証明スルコトガ出来ル。

先ヅ K ノ表面ノ点ニテ、切平面が unique ニ定マル点ヲ regular ト呼ビ、regular デナイ点ヲ singular デアルト呼ブ。K ノ singular ナ点全体ハ spherical measure 0 デアル。(6) 但シ K ノ表面上ノ点集合 A ノ spherical measure トハ A ヲ K ノ中心ヨリ unit sphere 上ニ radial ニ射影シタトキノ unit sphere ノ上ノ像ノ measure (球面上ノ Lebesgue measure) ノコトデアル。

次ニ K ヲ原点 O ヲ通ル任意ノ平面 π デ切リ、切口ノ曲線 C_π ヲ考ヘル。C_π ノ上ニ K ノ regular point ガ dense ニ乗ッテ居ルトハ限ラナイ。シカシ任意ノ原点ヲ通ル平面 π。及ビ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シテ、π。トノ交角ガ ε ヨリ小サク、且ツ C_π 上ニ K ノ regular point ガ dense ニアル如キ、原点ヲ通ル平面 π ガ存在スル。コレハ K ノ singular point ガ spherical measure 0 デアルコトカラ容易ニ得ラレル。(Fubini ノ定理ト同様ノ

---

(5) W. Blaschke: Kreis und Kugel; 160頁

(6) Bonnesen und Fenchel: Theorie der konvexen Körper, 頁

考ヘヲ用フレバヨイ)。

Kが ellipsoid デアルコトヲ示スニハ任意ノ原点ヲ通ル平面 π ニ對シテ C_π が ellipse ニナルコトヲ云ヘバヨイ。次ニ我々ハ補助定理1ニ於テ、C_π ノ上ニ regular point ガ dense ニアル場合ニハ C_π が ellipse デアルコトヲ証明スル。サウスレバ上記ノコトヨリ任意ノ C_π ハカカル C_π ノ limit トシテ與ヘラレルカラ、任意ノ C_π が ellipse トナリ定理3ノ証明ガ完結スルノデアル。

> 補助定理1. C_π ノ上ニ regular point ガ dense デアレバ C_π ハ ellipse デアル。

補助定理1ヲ証明スルニハ、次ノ補助定理2ヲ証明スレバヨイ。

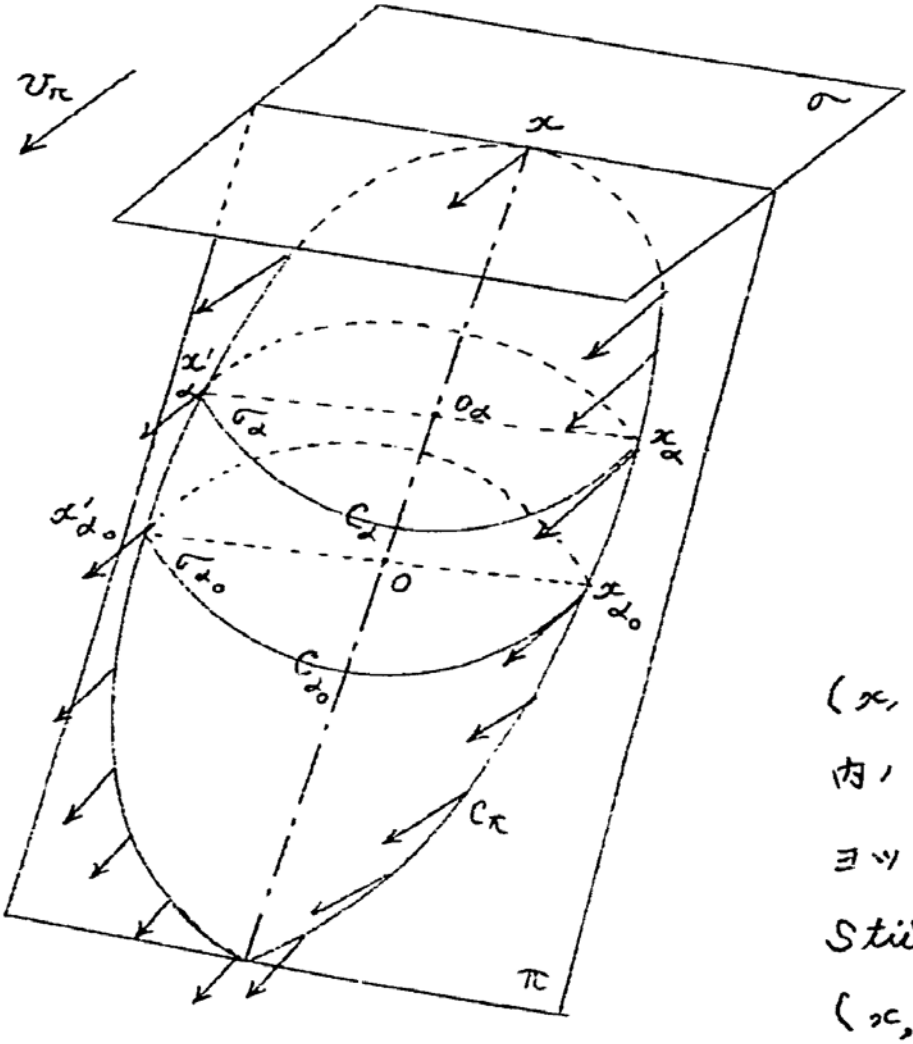
> 補助定理2. C_π 上ノ一点 x が regular ナラバ x ヲ通ル C_π ノ直径ハ、x ニ於ケル C_π ノ切線(コレハ明カニ存在シテ unique ニ定マル)ニ平行ナスベテノ C_π ノ弦ヲ二等分スル。

<u>補助定理2ヨリ補助定理1ヲ証明スルコト</u>。x ヲ C_π 上ノ任意ノ点トスレバ、コレハ C_π 上ノ regular point ノ limiting point デアル。

x ニ右(又ハ左)カラ收斂スル C_π 上ノ regular point ノ sequence ヲ $\{x_n\}$ トスレバ x_n ニ於ケル切線ハ x ニ於ケル右(又ハ左)ノ切線ニ收斂スル。ヨッテ、容易ニ分ル

如ク、コノ切線ニ平行ナ C_π ノ弦ハスベテ之ヲ通ル C_π ノ直径ニヨリ二等分サレル。此ノ如クシテ C_π ノ各直径ニ對シテソレニ〝Conjugate〟ナ方向ガ定マリソノ方向ノ弦ハスベテモトノ直径ニヨリ二等分サレル。ヨッテ C_π ハ ellipse デアル。(補助定理1ノ証明終)。

<u>補助定理2ノ証明</u>。 x ニ於ケル K ノ切平面(コレハ x ガ regular デアルカラ unique ニ定マル)ヲ σ トシ、σ ト平行ナ平面 σ_α ニヨル K ノ切口ノ曲線ヲ C_α, C_α ト C_π トノ交点ヲ x_α, x'_α トセヨ。定理3ノ假定ヨリ、平面 π ニ對シテイツノ方向 v_π ガ定マッテ C_π 上ノ各点 x_α ヨリ v_π ノ方向ニ引イタ直線 (x_α, v_π) ハ何レモ K ノ Stiitzgerade ナル。



特ニ $x_\alpha = x$ ノトキヲ考ヘレバ、x ニ於ケル K ノ切平面ハ σ ニツシカナイカラ (x, v_π) ハ σ 内ノ直線デアル。ヨッテ、各々ノ Stiitzgerade (x, v_π) ハ平

面 σ_α 内ノ直線デ、平面 σ_α 内ニ於ケル C_α ヘノ Stiitz-gerade デアル。

コレヨリ補助定理 3 ニヨリ、C_α ハ互ニ相似デアリ、シカモ何レモ x ヲ通ル K ノ直径ガソノ相似ノ中心ヲ通ッテヰルコトガワカル。σ_α ガ特ニ原点ヲ通ッテヰルトキ（$\alpha = \alpha_0$ ナルトキトスル）ヲ考ヘレバ C_{α_0} ハ K ノ中心 O ニ對シテ Symmetric デアルカラ、各々ノ C_α モ中心 O_α（O_α ハ $x_\alpha x'_\alpha$ トxヲ通ル直径 O_x トノ交ハリ）ヲ有シテ O_α ニ對シテ Symmetric デアル。ヨッテ $x_\alpha x'_\alpha$ ハ O_α ニヨリ二等分サレル。

$x_\alpha x'_\alpha$ ハ何レモ x ニ於ケル C_x ヘノ切線（即チ O_x トノ交ハリ）ニ平行デアルカラ、補助定理 2 ノ証明ハ完結スル。

ヨッテ我々ハ次ノ補助定理 3 ヲ証明スレバヨイ。

> **補助定理 3.** 平面上ニ二ツノ convex closed curve C, C′ ガアリ、一点 O ヲ内部ニ共有スルモノトスル。O ヲ通ル任意ノ半直線ト C, C′ トノ交点ヲ A, A′ トスルトキ、A, A′ ニ於イテ、互ニ平行ナ C, C′ ニ對スル Stiitzgerade ヲ常ニ引キ得ルトキハ C, C′ ハ互ニ相似デアリ、ソノ相似ノ中心ハ O デアル。

コレヲ示スタメニハ、次ノ補助定理 4 ヲ証明スレバヨイ。

補助定理4. $f(x)$, $g(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ ニテ定義サレタ連続函数デ $a \leqq x \leqq b$ ノ各点ニテ D^+f, D^-f, D^+g, D^-g が存在スルモノトセヨ。若シ $a \leqq x \leqq b$ ノ各点ニテ $D^+f = D^+g$, $D^-f = D^-g$ ガ成立スレバ $f(x) - g(x) = \text{constant}$ デアル。

証明: $a \leqq x \leqq b$ ナル任意ノ x 及ビ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ対シテ $\delta = \delta(x) > 0$ ガ定マッテ $0 < h < \delta(x)$ ナル任意ノ h ニ対シテ

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - D^+f(x) \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - D^+g(x) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \frac{f(x) - f(x-h)}{h} - D^-f(x) \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{g(x) - g(x-h)}{h} - D^-g(x) \right| < \varepsilon$$

トナル。$D^+f(x) = D^+g(x)$, $D^-f(x) = D^-g(x)$ ナル故、カヽル h ニ対シテハ $|(f(x+h) - g(x+h)) - (f(x) - g(x))| < 2\varepsilon h$, $|(f(x) - g(x)) - (f(x-h) - g(x-h))| < 2\varepsilon h$. Borel ノ被覆定理ニヨリ $a \leqq x \leqq b$ ハ $(x - \delta(x), x + \delta(x))$ ナル形ノ有限個ノ open intervals ニヨッテ覆ハレルカラ、$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n = b$ ナル有限個ノ $x_0, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ ガトッテ $|(f(x_i) - g(x_i)) - (f(x_{i-1}) - g(x_{i-1}))| < 2\varepsilon |x_i - x_{i-1}|$ が $i = 1, 2, \cdots, n$ ニ対シテ成立スル様ニ出来ル。ヨッテ

$$\left| (f(b) - g(b)) - (f(a) - g(a)) \right| \leqq \sum_{i=1}^{n} \left| (f(x_i) - g(x_i)) \right.$$

$$-\{f(x_{i-1})-g(x_{i-1})\}\Big|<2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i-1}|=2\varepsilon(b-a).$$

$\varepsilon>0$ ハ任意デアツテカラ $f(b)-g(b)=f(a)-g(a)$.

b ノ代リニ任意ノ $a\leqq x\leqq b$ ナル x ヲトレバ

$f(x)-g(x)=f(a)-g(a)$ ヲ得レカラ $f(x)-g(x)$

ハ constant デアル。