OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Banach空間ニ於ケル positive operation I
Author(s)	角谷, 靜夫
Citation	全国紙上数学談話会. 1939, 170, p. 695-709
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74682
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

752. Banach 空間ニ於ケル Positive operation I

角谷　静夫（阪大）

Semi-order ノツイタ Banach 空間 E ヲ考ヘル。(1) 即チ、Banach 空間 E 内ニ positive part（正確ニハ zero + positive part）S ヲ考ヘ、コノ S ガ次ノ條件ヲ満足スルモノトスル。

(1) $x \in S$, $y \in S$ ナラバ $x+y \in S$

(2) $x \in S$, $\lambda \geq 0$ ナラバ $\lambda x \in S$

(3) S ハ closed（strong topology ニテ）

(4) $x \in S$, $x \neq 0$ ナラバ $-x \notin S$

---

(1) 積分ノ間ハ real Banach space ヲ考ヘル。

$x \in S$ ナルコトヲ $x \geqq 0$（正確ニハ $x \in S$, $x \neq 0$ ナルコトヲ $x > 0$）ニテ表ハシ $x > 0$ ナルコトヲ x ハ positive デアルト云フ。又 $x-y \geqq 0$, $x-y > 0$ ナルコトヲ夫々 $x \geqq y$, $x > y$ ニヨッテ表ハス。S ニ関スル條件 (1)－(4) ヨリ

(5) $x \geqq y$, $y \geqq z$ ナラバ $x \geqq z$

(6) $x \geqq y$, $\lambda \geqq 0$ ナラバ $\lambda x \geqq \lambda y$

(7) $x_n \geqq y_n$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ (strongly) ナラバ $x \geqq y$

(8) $x \geqq y$, $y \geqq x$ ナラバ $x = y$

ガ得ラレルコトハ明カデアル。此ノ如クシテ E = semi-order ガツケラレル。(2)

Banach 空間 E ヲ E ノ中ニウツス operator T ハ S ヲ S ノ中ヘウツストキ positive operator デアルト云フ。(3) positive デ且ツ completely continuous ナ linear operator T ノ固有値ニ関スル問題ハ M. A. Rutmann (4) ニヨッテ論ゼラレ色々興味アル結果ガ得ラレテキル。Rutmann

---

(2) Semi-order ニ関シテハ通常ハ (5)－(8) 以外ニモウ少シ條件ヲ入レル。コノ談話ニ於テモ後デ條件ヲ入レルノデアルガ今ハコレダケニ止メル。

(3) 紙上談話会162号, 吉田氏ノ談話 7/10, 299-300頁参照.

(4) M. A. Rutmann: Sur une classe spécielle d'opérateurs linéaires totalement continues, C. R. URSS, 18 (1938), No. 9.

ノ論文ハ単ニ結果ト、ソレヲ得ルタメニ用ヒタ Lemma ガ書イテアルダケデ証明ヲ辿ルコトハ出来ナイ。ソレデコノ談話ガハ Rutmann トハ全然独立ニ positive operator ノ固有値ニ関スル二三ノ結果ヲ証明シヨウ。

Rutmann ノ使ッテヰル Lemma ハ非常ニ面倒ナモノデアリ、且ツ Schauder ノ不動点定理ヲ用ヒルト書イテアルカラ、次ニ述ベル証明ハ Rutmann ノソレヨリモ遙カニ elementary デ且ツ簡単ナワケデアル。唯 positive part S ト Banach 空間 E ノ norm トノ関係ニ関シテ二三ノ假定ガ必要ナノハ残念デアル。シカモ実際ニハコレラノ假定ハ大概ノ場合ニ満足サレテヰル。

positive part S ト norm トノ関係ニ関スル條件

(I) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ ナラバ $\|x+y\| \geqq \|x\|$, 即チ

$x \geqq y \geqq 0$ ナラバ $\|x\| \geqq \|y\|$.

(II) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ ナラバ $\|x+y\| > \|x\|$, 即チ

$x > y \geqq 0$ ナラバ $\|x\| > \|y\|$.

(II) ハ明カニ (I) ヨリモ強イ條件デアル。

S ハ (strong topology ニテ) 必ズシモ内点ヲ有シナイ。特ニ S ガ内点ヲ有スルトキハ $x \in S$ ガ S ノ内点デアルコトヲ $x \gg 0$ ニヨッテ表ハスコトニスル。コノトキ x ハ strongly positive デアルト云フ。$x-y \gg 0$ ナルコトヲ $x \gg y$ ニヨッテ表ハス。$x \gg 0$ デアレバ任意ノ $y \in E$ ニ對シテ十分大キク $C = C(y)$ ヲトレバ $Cx \gg y$ トナル。何トナレバ $x \gg 0$ ナルコトヨリ (十分小サイ) $\delta > 0$ ガ定マッ

テ $\|x-z\|<\delta$ ナルzハ untere Grenze トナル。ヨッテ $C=C(y)$ ヲ $\|y\|<\delta\cdot C$ ナル如ク（十分大キク）トッテオケバコノCニ對シテ $Cx-y=C\left(x-\frac{y}{C}\right)\equiv Cz$ ハ $\|x-z\|=\|x-(x-\frac{y}{C})\|=\|\frac{y}{C}\|<\delta$ ナル故 $Cx-y\geqq 0$, $Cx\geqq y$ トナル。

又 $x\gg y\geqq 0$ ナラベ十分小サイ $\delta>0$ ニ對シテ $x\geqq(1+\delta)y$ トナルコトモ明カデアル。

Banach 空間 E ノ positive operator T ノウチ $x>0$ ナルトキ $Tx\gg 0$ トナルモノヲ特ニ strongly positive ト呼ブコトニスル。strongly positive operator ハ定理2以下ニテ取扱ハレル。

定理ヲ述ベル前ニ具体的ナ Banach 空間ニ於イテ positive part S 及ビ positive（又ハ strongly positive）operator T ガ如何ナルモノニ取リ得ルカヲ示サウ。

(R_n). Euclid ノn次元空間、$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots\cdots,\xi_n)$. ξ_k $(k=1,2,\cdots\cdots,n)$ ハ皆 real number. $\xi\geqq 0$（即チ $\xi\in S$）トナルノハスベテノ $\xi_k\geqq 0$ ナル時ト定メル，$\xi>0$ トナルノハコノウチ、少クトモ一ツノ $\xi_k>0$ トナルトキデアル。條件(I),(II)ハ何レモ満足サレテヰル。(5)

---

(5) S ガ條件(1),(2),(3),(4)ヲ満足スルコトハ勿論明カデアル。條件(1)－(4)ハ以下ノ例ニテハ常ニ満足サレテヰル。今後 positive part S トイフトキニハ(1)－(4)ハ常ニ満足サレテヰルモノトスル。

又Sハ内点ヲ有シテヰル。$\xi \gg 0$トナルノハ、スベテノ$\xi_k > 0$トナルトキデアル。

(R_n) / positive linear operator ハスベテノ element ガ non-negative + square matrix = ヨッテ與ヘラレ、特ニ strongly positive linear operator ハスベテノ element ガ positive + square matrix = ヨッテ與ヘラレル。

(l_p) $(p \geq 1)$. $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n, \cdots\cdots)$,

$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$ ナル real number / 系列全体ノ集合. $\|\xi\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ = ヨッテ norm ガ定義サレル。$\xi \geq 0$ (即チ $\xi \in S$) トナルノハスベテノ $\xi_k \geq 0$ ナルトキト定メル。$\xi > 0$ トナルノハ勿クトモーツノ $\xi_k > 0$ トナルトキデアル。條件(I), (II) ハ満足サレテヰルガ Sハ内点ヲ有シナイ![6]

(L_p) $(p \geq 1)$. $0 \leq x \leq 1$ ニテ定義サレタ實數値ノ measurable function $f(x)$ ニテ $\int_0^1 |f(x)|^p dx < \infty$ トナルモノ全体ノ集合 $\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ ニテ norm ヲ定義スル。measure zero ヲ除イテ一致スル函数ハ同ジモノト考ヘル。$f \geq 0$ (即チ $f \in S$) トナルノハ measure zero ノ集合ヲ除イテ $0 \leq x \leq 1$ ニ於テ $f(x) \geq 0$ ナルトキト定メル。$f > 0$ トナルノハ、コノ外ニテ measure positive

---

(6) コレハ始ド明カデアロウ。

ナ集合ニテ $f(x)>0$ トナルモノデアル。條件(I),(II)ハ満足サレテヰルガSハ内点ヲ有シナイ!

(C). $0\leqq x\leqq 1$ ニテ定義サレタ real valued continuous function $f(x)$ 全体ノ集合。$\|f\|=\max_{0\leqq x\leqq 1}|f(x)|$ ニヨッテ norm ヲ定義スル。

$f\geqq 0$ (即チ $f\in S$) トナルノハ $0\leqq x\leqq 1$ ノ各点ニテ $f(x)\geqq 0$ ナルトキト定メル。$f>0$ トナルノハ，コノウテ $0\leqq x\leqq 1$ ノ少クトモ一点ニテ $f(x)>0$ トナルトキデアル。條件(I)ハ満足サレルガ(II)ハ満足サレナイ。(II)ガ満足サレルタメニハ $|||f|||=\|f\|+\int_0^1|f(x)|dx$ ニヨッテ新シイ norm $|||f|||$ ヲ考ヘレバヨイ。(7) $|||f|||$ ガ norm ノ條件ヲ満足スルコトハ明カデアルシ、$\|f\|\leqq|||f|||\leqq 2\|f\|$ デアルカラ $|||f|||$ ニヨッテ與ヘラレル topology ト $\|f\|$ ニヨッテ與ヘラレル topology トハ equivalent デアル。Sハ内点ヲ有スル。($|||f|||$ ニヨル topology ト $\|f\|$ ニヨル topology トハ equivalent デアルカラ何レノ topology ニ関シテモ内点ヲモツ)。$f\gg 0$ トナルノハ $0\leqq x\leqq 1$ ノ各点ニテ $f(x)>0$ トナルコト。即チ $f(x)\geqq\delta>0$ ナル positive number $\delta>0$ ガ存在スルコトデアル。

(M) $0\leqq x\leqq 1$ ニテ定義サレタ実数値ノ bounded measurable function $f(x)$ 全体ノ集合 $\|f\|=$

---

(7) コノ様ナ新シイ norm ヲ定義スルコトハ E が separable デSガ内点ヲ有スル時ニ可能デアル。

$\underset{0\leq x\leq 1}{\text{ess. max}}\,|f(x)|$ ニヨッテ norm ヲ定義スル。measure zero ノ集合ヲ除イテ一致スル函数ハ同ジモノト考ヘル。$f\geq 0$ (即チ $f\in S$) トナルノハ $0\leq x\leq 1$ ニテ measure zero ノ集合ヲ除イテ $f(x)\geq 0$ ナルトキト定メル。$f>0$ トナルノハ、ソノ内デ measure positive ナ集合ニテ $f(x)>0$ トナル場合デアル。條件 (I) ハ満足サレルガ (II) ハ満足サレナイ。(II) ガ満足サレルタメニハ

$$\|\!|f|\!\| = \|f\| + \int_0^1 |f(x)|\,dx$$

ニヨリ新シイ norm $\|\!|f|\!\|$ ヲ定義スレバヨイ。((M) ハ separable デハナイガ)。[8]

S ハ由点ヲ有スル。$f\gg$ ノトナルノハ $\underset{0\leq x\leq 1}{\text{ess. min}}\,f(x)>0$ トナルトキデアル。即チ $\delta>0$ ガ定マッテ measure zero ノ集合ヲ除イテ $0\leq x\leq 1$ ニテ $f(x)\geq\delta>0$ トナルトキデアル。

---

(8) $-\infty<x<\infty$ ニテ定義サレタ有界可測ナ実数値函数ノ空間ノ場合モ同様ニ

$$\|\!|f|\!\| = \|f\| + \int_0^1 |f(x)|\,\frac{dx}{1+|x|^2}$$

ニヨッテ新シイ norm ガ定義出来ル。

定理1. E ヲ semi-order ノアル Banach 空間，T ヲ E ヲ E ノ中ヘウツス positive, completely continuous + linear operator トスル。若シ條件(II)ガ滿足サレ、且ツ $Tx_0 \geqq c_0 x_0$ トナル如キ positive element $x_0 > 0$ 及ビ positive real number $c_0 > 0$ トガ存在スレバ $Ty_0 = d_0 y_0$ トナル如キ positive element $y_0 > 0$ 及ビ positive real number $d_0 \geqq c_0 > 0$ ガ存在スル。

証明： $Tx \geqq cx$ ガ少クトモ一ツノ positive element $x > 0$ ニ對シテ成立スル如キ positive number $c > 0$ 全体ヲ考ヘ、カヽル c 全体ノ上限ヲ d_0 トスル。假定ニヨリ $Tx_0 \geqq c_0 x_0$, $x_0 > 0$, $c_0 > 0$ デアルカラ $d_0 \geqq c_0$ デアル。又 $d_0 \leqq \|T\|$ トナルコトハ明カデアル。

先ヅ $Tz_0 \geqq d_0 z_0$ ガ成立スル如キ positive element $z_0 > 0$ ガ存在スルコトヲ証明シヨウ。

d_0 ノ定義ヨリ $Tx_n \geqq c_n x_n$, $x_n > 0$, $c_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$, $c_n \to d_0$ トナル如キ positive element $x_n > 0$ 及ビ positive number c_n ノ系列ガ存在スル。$\|x_n\| = 1$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。$\{Tx_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ考ヘレバ T ガ completely continuous ナルコトヨリ $\{Tx_n\}$ ノ部分列 $\{Tx_{n_\nu}\}$ ガ存在シテ $Tx_{n_\nu} \to z_0 \in E$ (strongly). $Tx_{n_\nu} \geqq 0$ ナル故 $z_0 \geqq 0$. シカモ $\|Tx_{n_\nu}\| \geqq \|c_{n_\nu} x_{n_\nu}\| = |c_{n_\nu}| \to d_0$

ナル故 $\|Z_0\| \geqq d_0$, ヨッテ $Z_0 \neq 0$. $Z_0 \geqq 0$, $Z_0 \neq 0$ ナル故 $Z_0 > 0$.

又、$T'^2 x_{n_\nu} \longrightarrow T Z_0$ ニテ且ツ $T^2 x_{n_\nu} \geqq C_{n_\nu} \cdot T x_{n_\nu} \to d_0 Z_0$ (strongly) ナル故 $T Z_0 \geqq d_0 Z_0$

此ノ如クシテ $T Z_0 \geqq d_0 Z_0$ トナル如キ positive element $Z_0 > 0$ ノ存在ガワカッタ。次ニコノ Z_0 ヲ對シテ系列

$\left\{ \frac{1}{d_0^n} T^n Z_0 \right\}$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ考ヘル。 $Z_0 \leqq \frac{1}{d_0} T Z_0$

$\leqq \frac{1}{d_0^2} T^2 Z_0 \leqq \cdots\cdots \leqq \frac{1}{d_0^n} T^n Z_0 \leqq \cdots\cdots$ ナル故 (II) ヨリ

$\|Z_0\| \leqq \frac{1}{d_0} \|T Z_0\| \leqq \frac{1}{d_0^2} \|T^2 Z_0\| \leqq \cdots\cdots \leqq \frac{1}{d_0^n} \|T^n Z_0\| \leqq \cdots\cdots$

ヨッテ $\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\|T^{n+1} Z_0\|}{\|T^n Z_0\|} \geqq d_0$

以下二ツノ場合ニ分ケテ考ヘル。

(i) $\boxed{\varlimsup_{n \to \infty} \frac{\|T^{n+1} Z_0\|}{\|T^n Z_0\|} = d_0 \quad \text{ナルトキ}}$

$\{n\}$ ノ部分列 $\{n_\nu\}$ ヲ適當ニトレバ $\lim_{\nu \to \infty} \frac{\|T^{n_\nu + 1} Z_0\|}{\|T^{n_\nu} Z_0\|} = d_0$.

今コノ $\{n_\nu\}$ ヲ對シテ $Z_{n_\nu} = \frac{T^{n_\nu - 1} Z_0}{\|T^{n_\nu - 1} Z_0\|}$, $\nu = 1, 2, \cdots\cdots$, ヲ考ヘル。

$\|Z_{n_\nu}\| = 1$, $\nu = 1, 2, \cdots\cdots$ ナル故 T が completely continuous ナルコトヨリ $\{n_\nu\}$ ノ部分列 $\{n'_\nu\}$ ヲ適當

ニトレバ $Tz_{n'_\nu} = \dfrac{T^{n'_\nu} z_0}{\| T^{n'_\nu} z_0 \|} \to y_0 \in E$ (△strongly).

$Tz_{n'_\nu} \geqq 0$ ナル故 $y_0 \geqq 0$. 又 $\| Tz_{n'_\nu} \| = \dfrac{\| T^{n'_\nu} z_0 \|}{\| T^{n'_\nu - 1} z_0 \|} \geqq d_0$

ナル故 $\| y_0 \| \geqq d_0$, $y_0 \neq 0$. $y_0 \geqq 0$, $y_0 \neq 0$ ナル故 $y_0 > 0$.

又 $T^2 z_{n'_\nu} \to T y_0$ テ且ツ

$$T^2 z_{n'_\nu} = \frac{T^{n'_\nu - 1} z_0}{\| T^{n'_\nu - 1} z_0 \|} \geqq d_0 \frac{T^{n'_\nu} z_0}{\| T^{n'_\nu - 1} z_0 \|} = d_0 \cdot T z_{n'_\nu} \to d_0 y_0$$

ナル故 $T y_0 \geqq d_0 y_0$ シカモ $\{ n_\nu \}$ ノ選ビカタヨリ

$$\frac{\| T^2 z_{n'_\nu} \|}{\| T z_{n'_\nu} \|} = \frac{\| T^{n'_\nu + 1} z_0 \|}{\| T^{n'_\nu - 1} z_0 \|} \Big/ \frac{\| T^{n'_\nu} z_0 \|}{\| T^{n'_\nu - 1} z_0 \|} = \frac{\| T^{n'_\nu + 1} z_0 \|}{\| T^{n'_\nu} z_0 \|} \to d_0$$

ナル故 $\| T y_0 \| = \| d_0 y_0 \|$. 此ノ如ク $T y_0 \geqq d_0 y_0 > 0$ ニテ

且ツ $\| T y_0 \| = \| d_0 y_0 \|$ ガ得ラレタカラ (II) ニヨリ

$T' y_0 = d_0 y_0 \neq 0$. ヨッテ (i) ノ場合ニハ定理ハ証明サレ

タ。

(ii) $\boxed{\lim_{n \to \infty} \dfrac{\| T^{n+1} z_0 \|}{\| T^n z_0 \|} > d_0 \text{ ナルトキ.}}$

十分小サイ $\varepsilon > 0$ ト十分大キイ n_0 ヲトレバ $n > n_0$ ニ對レ

テ $\dfrac{\| T^{n+1} z_0 \|}{\| T^n z_0 \|} > d_0 (1+\varepsilon)^2$, $\varepsilon > 0$. ヨッテ z_0 ノ代リニ

$T^{n_0} z_0$ ヲ考ヘレバ $\dfrac{\| T^{n+1} z_0 \|}{\| T^n z_0 \|} > d_0 (1+\varepsilon)^2$ ガ $n = 1, 2, \cdots\cdots$

ニ對シテ成立スルト考ヘラレ支ヘナイ。

$$z_n=(1+\varepsilon)\frac{Tz_0}{\|Tz_0\|}+(1+\varepsilon)^2\frac{T^2z_0}{\|T^2z_0\|}+\cdots\cdots+(1+\varepsilon)^n\frac{T^nz_0}{\|T^nz_0\|},$$

$n=1,2,\cdots\cdots$ ヲ考ヘル。$z_n>0$ デアル。右辺ノ各項ハ >0 ナル故 (II) ヨリ $\|z_n\|\geqq\left\|(1+\varepsilon)^n\frac{T^nz_0}{\|T^nz_0\|}\right\|=(1+\varepsilon)^n\to\infty$.

ヨッテ $\alpha_n=\frac{1}{\|z_n\|}$ トオケバ $\alpha_n\to0$. $\alpha_nz_n=y_n$ トオケ。$y_n>0$, $\|y_n\|=1$, $n=1,2,\cdots\cdots$ デアル。T ハ completely continuous デアッタカラ $\{n_\nu\}$ ヲ適當ニトレバ $Ty_{n_\nu}\to y_0\in E$ (strongly). $Ty_{n_\nu}\geqq0$ ナル故 $y_0\geqq0$. 且ツ $Ty_{n_\nu}\geqq\alpha_0y_{n_\nu}$ ナル故 $\|Ty_{n_\nu}\|\geqq\alpha_0\|y_{n_\nu}\|=\alpha_0$. ヨッテ $\|y_0\|\geqq\alpha_0$ 即チ $y_0\neq0$. $y_0\geqq0$, $y_0\neq0$ ナル故 $y_0>0$. 更ニ $T^2y_{n_\nu}\geqq\alpha_0Ty_{n_\nu}\to\alpha_0y_0$ (strongly). $T^2y_{n_\nu}\longrightarrow Ty_0$ ナル故 $Ty_0\geqq\alpha_0y_0$. シカシ我々ハ更ニ進ンデ $Ty_0\geqq(1+\varepsilon)\alpha_0y_0$ ガ成立スルコトヲ証明スルコトガ出來ル。即チ

$$(1+\varepsilon)\alpha_0Ty_{n_\nu}=\alpha_{n_\nu}\left\{\alpha_0(1+\varepsilon)^2\frac{T^2z_0}{\|Tz_0\|}+\alpha_0(1+\varepsilon)^3\frac{T^3z_0}{\|T^2z_0\|}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\cdots+\alpha_0(1+\varepsilon)^{n_\nu+1}\frac{T^{n_\nu+1}z_0}{\|T^{n_\nu}z_0\|}+\quad *\quad .\right\}$$

$$T^2y_{n_\nu}=\alpha_{n_\nu}\left\{\quad *\quad +(1+\varepsilon)\frac{T^2z_0}{\|Tz_0\|}+\cdots\cdots+(1+\varepsilon)^{n_\nu-1}\frac{T^{n_\nu+1}z_0}{\|T^{n_\nu-1}z_0\|}\right.$$

$$\left.+(1+\varepsilon)^{n_\nu}\frac{T^{n_\nu+2}z_0}{\|T^{n_\nu}z_0\|}\right\}$$

デアリ且ツ右辺ノ對應スル項ハ、假定ニヨリ

$$d_0(1+\varepsilon)^{k+2}\frac{T^{k+2}z_0}{\|T^{k+1}z_0\|}<(1+\varepsilon)^{k}\frac{T^{k+2}z_0}{\|T^{k}z_0\|},$$

$$K=1,2,\cdots\cdots,n_\nu-1$$

ナル故

$$T^2y_{n_\nu}-(1+\varepsilon)d_0Ty_{n_\nu}$$

$$\geqq d_{n_\nu}(1+\varepsilon)^{n_\nu}\frac{T^{n_\nu+2}z_0}{\|T^{n_\nu}z_0\|}-d_{n_\nu}(1+\varepsilon)^2\frac{T^2z_0}{\|Tz_0\|}$$

然ルニ

左辺$\longrightarrow Ty_0-(1+\varepsilon)d_0y_0$，右辺第一項$\geqq 0$，右辺第二項$\longrightarrow 0$ナル故 $Ty_0-(1+\varepsilon)d_0y_0\geqq 0$，

$$Ty_0\geqq(1+\varepsilon)d_0y_0.$$

此ノ如クシテ $Ty_0\geqq(1+\varepsilon)d_0y_0$ ナル如キ positive element $y_0>0$ ノ存在が示サレタ。コレハ d_0 ノ定義ニ矛盾スルカラ (ii) ノ場合ハ起リ得ナイ。

コレニテ定理1ノ証明ハ完結スル。

定理2. Eヲ semi-order ノアル Banach 空間，TヲEヲEノ中ヘウツス strongly positive, completely continuous ナ linear operator トスル。若シ條件 (I) が満足サレテ居レバ $Ty_0=d_0y_0$ トナル如キ strongly positive element $y_0\gg 0$ 及ビ positive number $d_0>0$ が存在スル。

証明: $x>0$ ナル任意ノ $x\in S$ ヲトレバ[9] $Tx\gg 0$

脚註 次頁ヘ

デアルカラ十分小サイ positive number $c>0$ ニ對シテ $Tx \geqq cx$ ガ成立スル。ヨッテ今 $Tx \geqq cx$ ガ少クトモ一ツノ $c>0$ ニ對シテ成立スル如キ C 全体ヲ考ヘ、ソノ上限ヲ d_0 トスレバ定理1ノ証明ト全ク同様ニ $Tz_0 \geqq d_0 z_0$ トナル如キ positive element $z_0 > 0$ ガ存在スルコトガワカル。(10)

コノ z_0 ニ對シテ $Tz_0 = d_0 z_0$ ガ成立スルコトヲ証明シヨウ。若シサウデナケレバ $Tz_0 > d_0 z_0$ デアルカラ、T ガ strongly positive デアルコトヨリ $T(Tz_0) \gg d_0 Tz_0$. ヨッテ十分小サイ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $T(Tz_0) \geqq (d_0+\varepsilon) Tz_0$. コレハ d_0 ノ定義ニ矛盾スル。ヨッテ $Tz_0 = d_0 z_0$ デナケレバナラナイ. (定理2ノ証明終).

定理2ニ於テハ T ガ strongly positive デアル代リニ T^k $(k>1)$ ガ strongly positive デアッテモ同様デアルコトハ容易ニワカルデアロウ。又更ニ條件ヲユルクシテ

---

(9) S ハツクトモ一点ヲ含ムモノト假定スル。S ガ0ノミヨリナルトキハ S ハ内点ヲ含マナイカラ strongly positive operator ヘ考ヘラレナイ。

(10) 定理1ノ証明ニ於テハコノコロデニハ條件(II)ハ使ハナカッタ。定理1ノ証明ニテ條件(II)ヲ使ッタノハ(i)ノ場合ニ於テ $Ty_0 \geqq d_0 y_0 > 0$, $\| Ty_0 \| = \| d_0 y_0 \|$ カラ $Ty_0 = d_0 y_0$ ヲ出ストキダケデアッタ。ソレ以外ノトコロデハ(II)ノ代リニ(I)ガ成立シテ居レバ十分デアッタノデアル。

「任意ノ $x>0$ ニ對シテ $k=k(x)$ ガ定マリ $T^k x \gg 0$ トナル」ヲ取ルコトモ出來ル。

又一般ニ T が positive linear operator デアルトキ T^k が λ^k (λ ハ real positive) ヲ固有値ニモチ、且ツソノ固有要素 x が $x>0$ トナルモノニ取ルコトが出來レバ T が λ ヲ固有値ニモツコトヲ注意シテオコウ。コレハ若シ $T^k x = \lambda^k x$, $\lambda>0$, $x>0$ トラバ Schmidt ノ方法ニヨッテ $y = x + \frac{Tx}{\lambda} + \frac{T^2x}{\lambda^2} + \cdots\cdots + \frac{T^{k-1}x}{\lambda^{k-1}}$ ヲ作ッタトキ、$Ty = \lambda y$ ニテ且ツ $x, \frac{Tx}{\lambda}, \frac{T^2x}{\lambda^2}, \cdots\cdots, \frac{T^{k-1}x}{\lambda^{k-1}}$ ガスベテ $\geqq 0$ トナルコトヨリ $y \geqq x > 0$, $y \neq 0$ トナルカラデアル。

定理2ハ E. Hopf ノ定理[11]ノーツノ抽象化デアル。Hopf ハ $0 \leqq x \leqq 1$ ニテ定義サレタ連続函數ノ空間 (C) ニ於テ、positive, 且ツ連続ナ Kernel $K(x,y)$ ニヨル integral operator

$$f(x) \to Tf = g: \quad g(y) = \int_0^1 f(x)\, K(x,y)\, dx$$

ヲ考ヘツノデアル。コノ linear operator T が completely continuous デ且ツ strongly positive デアルコトハ容易ニワカルカラ定理2ニヨッテ

---

(11) E. Hopf: Über lineare Integralgleichungen mit positivem kern, Sitzungsberichte d. Preussischen Akad. Berlin, 1928, 233頁

$$d_0 f(y) = \int_0^1 f(x) K(x, y)\, dx$$

トナル如キ positive number $d_0 > 0$ ト strongly postive function (即チ $0 \leqq x \leqq 1$ ノ各点ニテ positive) $f \gg 0$ トガ存在スルコトデアル。

)Hopf ハ更ニ complex value ノ固有値ノコトヲモ論ジテヰル。(12) complex number ノ固有値ヲ論ジルタメニハ complex Banach 空間デノ semi-order ヲ考ヘネバナラナイ。コレニツイテハ次ノ談話デ論ジルコトニスル。

---

(12))Hopf ヨリ以前ニハ Jentzsch ガヤハリコノ問題ヲ論ジテヰル。

Jentzsch: Über Integral gleichungen mit positivem Kern, Crellés Journal, 141(19), 235−244.

更ニ positive element ノ Matrisc ニツイテハ Frobenius, Perron 等ノ研究ガアルコトヲ附記シテオク。